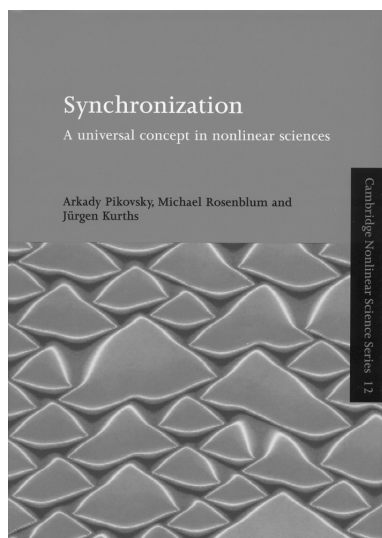


Синхронизация

Фундаментальное нелинейное явление

Аркадий Пиковский, Михаил Розенблюм, Юрген Куртс
Институт физики, Потсдамский университет, Германия



Явление синхронизации широко распространено в науке, технике и обществе. Тенденция к синхронному поведению наблюдается в столь различных системах как часы, лазеры, стрекочущие сверчки, пейсмейкеры сердца, нейроны, электронные генераторы и аплодирующие зрители. Такие эффекты универсальны; их можно объяснить в рамках единого подхода, основанного на современных достижениях нелинейной динамики.

Первая часть книги описывает синхронизацию без формул, на качественном уровне. Основные эффекты проиллюстрированы экспериментальными примерами и рисунками; представлена история исследований в этой области. Во второй и третьей частях на строгом уровне излагаются как классические результаты по синхронизации периодических автоколебаний, так и последние достижения в исследовании хаотических систем, больших ансамблей и колебательных сред. Монография адресована широкой аудитории – от студентов до квалифицированных исследователей в области физики, прикладной математики, инженерных и естественных наук.

Оглавление

Предисловие	11
Часть I: Синхронизация без формул	
Глава 1 Введение	19
1.1 Синхронизация в исторической перспективе	19
1.2 Синхронизация: краткое описание явления	27
1.2.1 Что такое синхронизация?	28
1.2.2 Что не является синхронизацией?	36
1.3 Синхронизация: обзор различных случаев	40
1.3.1 Терминологические замечания	46
1.4 Основная библиография	47
Глава 2 Основные понятия: автоколебательная система и ее фаза	49
2.1 Автоколебательные системы: математические модели естественных осцилляторов	50
2.1.1 Автоколебательные системы типичны в природе	50
2.1.2 Геометрический образ периодических автоколебаний: предельный цикл	51
2.2 Фаза: определение и свойства	54
2.2.1 Фаза и амплитуда квазилинейного осциллятора	54
2.2.2 Амплитуда устойчива, фаза свободна	56
2.2.3 Общий случай: предельный цикл произвольной формы	57
2.3 Автоколебательная система: основные свойства	59
2.3.1 Диссипация, устойчивость и нелинейность	60

2.3.2	Автономные системы и системы под действием силы: фаза вынужденных колебаний не свободна!.....	63
2.4	Автоколебательные системы: дополнительные примеры и обсуждение.....	65
2.4.1	Типичная автоколебательная система с контуром обратной связи.....	66
2.4.2	Релаксационные автоколебательные системы.....	67
Глава 3	Синхронизация периодических автоколебаний внешней силой	72
3.1	Слабое воздействие на квазилинейные автоколебания	73
3.1.1	Автономные автоколебания и сила во вращающейся системе координат.....	74
3.1.2	Захват фазы и частоты.....	77
3.1.3	Переход к синхронизации.....	82
3.1.4	Пример: захват частоты дыхания механической вентиляцией.....	85
3.2	Синхронизация внешней силой: более общий подход..	88
3.2.1	Стробоскопический метод.....	89
3.2.2	Пример: периодическая стимуляция светлячка.....	91
3.2.3	Захват последовательностью импульсов.....	93
3.2.4	Синхронизация высшего порядка. Языки Арнольда....	96
3.2.5	Пример: периодическая стимуляция пейсмекерных клеток.....	98
3.2.6	Захват фазы и частоты: общий подход.....	99
3.2.7	Пример: синхронизация лазера.....	101
3.3	Особенности синхронизации релаксационных автоколебаний.....	102
3.3.1	Сброс внешним импульсом. Пример: кардиостимулятор	103
3.3.2	Электрическая модель сердца по Ван-дер-Полю и Ван-дер-Марку.....	104
3.3.3	Вариация порога. Пример: электронный релаксационный автогенератор.....	106
3.3.4	Изменение собственной частоты.....	108
3.3.5	Модуляция и синхронизация.....	110
3.3.6	Пример: синхронизация песен сверчков.....	111
3.4	Синхронизация в присутствии шума.....	113
3.4.1	Диффузия фазы в автоколебаниях с шумом.....	113
3.4.2	Автоколебания с шумом и внешней силой. Проскоки фазы.....	114
3.4.3	Пример: захват дыхания при механической вентиляции	119
3.4.4	Пример: захват сердечного ритма слабым внешним стимулом.....	119

3.5	Различные примеры	121
3.5.1	Циркадные ритмы	121
3.5.2	Менструальный цикл	124
3.5.3	Захват периодических колебаний уровня инсулина периодическими инъекциями глюкозы	125
3.5.4	Синхронизация плазмодия миксомицета <i>Physarum</i>	126
3.6	Явления, близкие к синхронизации	126
3.6.1	Явления при большой внешней силе	126
3.6.2	Воздействие на возбудимые системы	129
3.6.3	Стохастический резонанс с точки зрения синхронизации	131
3.6.4	Захват нескольких осцилляторов общей силой	135
Глава 4	Синхронизация двух и многих осцилляторов	140
4.1	Взаимная синхронизация автоколебательных систем	141
4.1.1	Два взаимодействующих осциллятора	141
4.1.2	Пример: синхронизация триодных генераторов	144
4.1.3	Пример: частота дыхания и частота взмаха крыльев свободно летящих уток	146
4.1.4	Пример: переход между состояниями с синфазными и противофазными движениями	148
4.1.5	Заключительные замечания и связанные с синхронизацией эффекты	150
4.1.6	Релаксационные осцилляторы. Пример: клетки истинного и латентного водителей ритма синоатриального узла	151
4.1.7	Синхронизация в присутствии шума. Пример: активность мозга и мышц при болезни Паркинсона	153
4.1.8	Синхронизация ротаторов. Пример: контакты Джозефсона	157
4.1.9	Несколько осцилляторов	159
4.2	Цепочки, решетки и колебательные среды	161
4.2.1	Синхронизация в цепочке. Пример: цепочка лазеров	161
4.2.2	Образование кластеров. Пример: электрическая активность кишечника млекопитающих	163
4.2.3	Кластеры и биения в среде: подробное рассмотрение	164
4.2.4	Колебательная среда под периодическим воздействием. Пример: воздействие на реакцию Белоусова–Жаботинского	167
4.3	Глобально связанные осцилляторы	170
4.3.1	Самосинхронизация в ансамбле: переход Курамото	170
4.3.2	Пример: синхронизация менструальных циклов	174
4.3.3	Пример: синхронизация гликолитических колебаний в популяции дрожжевых клеток	174

4.3.4	Экспериментальное изучение ритмических аплодисментов	176
4.4	Различные примеры	177
4.4.1	Бег и дыхание у млекопитающих	177
4.4.2	Синхронизация двух осцилляторов «соль–вода»	178
4.4.3	Захват колебаний тубулярного давления в нефронах ...	179
4.4.4	Клеточные популяции	179
4.4.5	Синхронизация колебаний систем хищник–жертва	180
4.4.6	Синхронизация в нейронных системах	181
Глава 5	Синхронизация хаотических систем	184
5.1	Хаотические колебания	184
5.1.1	Пример: модель Лоренца	185
5.1.2	Чувствительность к начальным условиям	187
5.2	Фазовая синхронизация хаотических автоколебаний ..	190
5.2.1	Фаза и средняя частота хаотических автоколебаний ...	190
5.2.2	Захват частоты внешней силой. Пример: хаотический разряд в газе	193
5.3	Полная синхронизация хаотических систем	197
5.3.1	Полная синхронизация идентичных систем. Пример: синхронизация двух лазеров	197
5.3.2	Синхронизация неидентичных систем	199
5.3.3	Полная синхронизация в общем контексте. Пример: синхронизация и кластеры в глобально связанных электрохимических осцилляторах	200
5.3.4	Синхронизация путем подавления хаоса	202
Глава 6	Экспериментальное исследование синхронизации	204
6.1	Оценка фазы и частоты по сигналу	204
6.1.1	Фаза импульсной последовательности. Пример: электрокардиограмма	205
6.1.2	Фаза узкополосного сигнала. Пример: дыхание	206
6.1.3	Несколько практических замечаний	207
6.2	Анализ данных в «активном» и «пассивном» эксперименте	208
6.2.1	«Активный» эксперимент	208
6.2.2	«Пассивный» эксперимент	209
6.3	Анализ взаимоотношения между фазами	212
6.3.1	Непосредственный анализ разности фаз. Пример: регуляция позы человека	213
6.3.2	Высокий уровень шума	216
6.3.3	Стробоскопический метод	217

6.3.4	Фазовый стробоскоп в случае $n\Omega_1 \approx m\Omega_2$. Пример: взаимодействие сердечно-сосудистой и дыхательной систем	218
6.3.5	Фазовые соотношения при сильной модуляции. Пример: генерация потенциалов действия электрорецепторами веслоноса	221
6.4	Заключение и библиографические заметки	223
6.4.1	Несколько заметок о «пассивных» экспериментах	223
6.4.2	Количественное оценивание фазовых соотношений и его статистическая значимость	226
6.4.3	Некоторые полезные ссылки	227

Часть II: Захват фазы и частоты

Глава 7	Синхронизация периодических автоколебаний периодическим внешним воздействием	231
7.1	Фазовая динамика	232
7.1.1	Предельный цикл и фаза автоколебаний	232
7.1.2	Малые возмущения и изохроны	234
7.1.3	Пример: уравнение для комплексной амплитуды	236
7.1.4	Уравнение фазовой динамики	238
7.1.5	Пример: неавтономное уравнение для комплексной амплитуды	239
7.1.6	Медленная динамика фазы	240
7.1.7	Медленная динамика фазы: захват фазы и область синхронизации	242
7.1.8	Итоги рассмотрения фазовой динамики	245
7.2	Слабо нелинейные автоколебания	248
7.2.1	Амплитудное уравнение	248
7.2.2	Свойства синхронизации: изохронный случай	252
7.2.3	Свойства синхронизации в случае неизохронных автоколебаний	258
7.3	Отображения окружности и кольца	260
7.3.1	Отображение окружности: вывод и примеры	261
7.3.2	Свойства отображения окружности	265
7.3.3	Отображение кольца	273
7.3.4	Большая сила и переход к хаосу	276
7.4	Синхронизация ротаторов и контактов Джозефсона	279
7.4.1	Динамика ротаторов и контактов Джозефсона	279
7.4.2	Передемпфированный ротатор во внешнем поле	281
7.5	Системы фазовой автоподстройки	283
7.6	Библиографические заметки	285

Глава 8	Взаимная синхронизация двух взаимодействующих периодических осцилляторов	286
8.1	Фазовая динамика	287
8.1.1	Усредненные фазовые уравнения	289
8.1.2	Отображение окружности	291
8.2	Слабонелинейные осцилляторы	292
8.2.1	Общие уравнения	292
8.2.2	Вымирание (гашение) колебаний	295
8.2.3	Притягивающее и отталкивающее взаимодействие	296
8.3	Релаксационные колебания	299
8.4	Библиографические заметки	303
Глава 9	Синхронизация в системах с шумом	304
9.1	Автоколебания в присутствии шума	304
9.2	Синхронизация в присутствии шума	306
9.2.1	Качественная картина ланжевеновской динамики	306
9.2.2	Количественное описание в случае белого шума	309
9.2.3	Синхронизация квазигармонической флуктуирующей силой	314
9.2.4	Взаимная синхронизация автоколебаний с шумом	315
9.3	Библиографические заметки	316
Глава 10	Фазовая синхронизация хаотических систем	317
10.1	Фаза хаотического осциллятора	318
10.1.1	Понятие фазы	318
10.1.2	Фазовая динамика хаотических осцилляторов	325
10.2	Синхронизация хаотических осцилляторов	327
10.2.1	Фазовая синхронизация внешней силой	327
10.2.2	Косвенное описание синхронизации	331
10.2.3	Синхронизация в терминах неустойчивых периодических орбит	333
10.2.4	Взаимная синхронизация двух связанных осцилляторов	335
10.3	Библиографические заметки	337
Глава 11	Синхронизация в осциллирующих средах	339
11.1	Цепочки осцилляторов	339
11.2	Непрерывное по пространству распределение фазы	342
11.2.1	Плоские волны и мишени	343
11.2.2	Влияние шума: шероховатость против синхронизации	345
11.3	Слабо нелинейная колебательная среда	348
11.3.1	Комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау	348

11.3.2	Внешнее воздействие на колебательную среду	352
11.4	Библиографические заметки	354
Глава 12	Ансамбли глобально связанных осцилляторов	355
12.1	Переход Курамото	356
12.2	Осцилляторы с шумом	360
12.3	Обобщения	364
12.3.1	Модели, основанные на фазовом приближении	364
12.3.2	Глобально связанные слабонелинейные осцилляторы ...	368
12.3.3	Связанные релаксационные осцилляторы	369
12.3.4	Связанные контакты Джозефсона	370
12.3.5	Эффекты конечности числа элементов ансамбля	373
12.3.6	Ансамбль хаотических осцилляторов	374
12.4	Библиографические заметки	377
 Часть III: Синхронизация хаотических систем		
Глава 13	Полная синхронизация I: Основные свойства	381
13.1	Простейшая модель: два связанных отображения	382
13.2	Устойчивость синхронного режима	386
13.3	Статистическая теория перехода к синхронизации	388
13.3.1	Возмущение как случайное блуждание	389
13.3.2	Диффузия определяется статистикой локальных по времени ляпуновских показателей	390
13.3.3	Модуляционная перемежаемость: степенные распределения	392
13.3.4	Модуляционная перемежаемость: корреляционные свойства	400
13.4	Переход к синхронизации: геометрическое рассмотрение	402
13.4.1	Поперечные бифуркации периодических траекторий	402
13.4.2	Слабая и сильная синхронизация	404
13.4.3	Локальный и глобальный ридлинг	407
13.5	Библиографические заметки	409
Глава 14	Полная синхронизация II: обобщения и сложные системы	410
14.1	Идентичные отображения, связь общего вида	410
14.1.1	Однонаправленная связь	412

14.1.2	Асимметричная локальная связь.....	414
14.1.3	Глобальная связь (через среднее поле).....	414
14.2	Системы с непрерывным временем.....	416
14.3	Распределенные системы.....	418
14.3.1	Пространственно однородный хаос.....	419
14.3.2	Поперечная синхронизация пространственно- временного хаоса.....	420
14.3.3	Синхронизация в связанных клеточных автоматах.....	423
14.4	Синхронизация как симметричное состояние общего вида.....	424
14.4.1	Копированные системы.....	425
14.5	Библиографические заметки.....	427

Глава 15	Синхронизация сложной динамики внеш- ним воздействием.....	429
15.1	Синхронизация периодической силой.....	430
15.2	Синхронизация шумовым воздействием.....	432
15.2.1	Периодические колебания под действием шума.....	433
15.2.2	Синхронизация хаотических колебаний внешним шумом.....	436
15.3	Синхронизация хаотических колебаний хаотической силой.....	437
15.3.1	Полная синхронизация.....	437
15.3.2	Обобщенная синхронизация.....	438
15.3.3	Обобщенная синхронизация квазипериодической силой.....	444
15.4	Библиографические заметки.....	445

Приложения

П1	Открытие синхронизации Христиааном Гюйгенсом.....	447
П1.1	Письмо Христиаана Гюйгенса его отцу, Константину Гюйгенсу.....	447
П1.2	Морские часы (симпатия часов). Часть V.....	448
П2	Мгновенные фаза и частота сигнала.....	453
П2.1	Аналитический сигнал и преобразование Гильберта..	453
П2.2	Примеры.....	454
П2.3	Численные проблемы и практические рекомендации..	459
П2.4	Вычисление мгновенной частоты.....	461
	Список литературы.....	465
	Предметный указатель.....	503

<i>Моему отцу Самуилу</i>	<i>АП</i>
<i>Соне</i>	<i>МР</i>
<i>Моему отцу Герберту</i>	<i>ЮК</i>

Предисловие

Предисловие к русскому изданию

Мы рады, что наша книга выходит в свет на родном для нас языке и становится доступной русскоязычному читателю. Мы взялись за перевод по совету ряда наших друзей и коллег, которые, ознакомившись с английским изданием, сочли, что книга была бы полезной для широкого круга читателей – студентов, аспирантов, научных работников разных специальностей – в странах СНГ. Мы благодарим Ю. А. Данилова и Л. Ф. Соловейчика, непосредственно подтолкнувших нас к работе над переводом. Мы хотели бы выразить свою особую признательность Е. М. Розенблюму и С. А. Розенблюму за неоценимую помощь в наборе и корректуре русского текста.

А. С. Пиковский, М. Г. Розенблюм

Предисловие к английскому изданию

Слово «синхронный» часто встречается как в научной, так и в обычной речи. Происходя от греческих слов *χρόνος* (*хронос* – время) и *σύν* (*син* – тот же самый, общий), в прямом переводе «синхронный»

означает «разделяющий общее время», «происходящий в то же самое время». Этот термин, как и родственные слова «синхронизация» и «синхронизованный», относится ко множеству явлений, встречающихся почти во всех областях естественных наук, техники и социальной жизни, явлений, которые кажутся совершенно различными, но, тем не менее, подчиняются универсальным закономерностям.

Если в какой-либо научной базе данных ввести запрос на поиск статей, содержащих в заголовке слово с корнем «синхро», то мы получим список из сотен (если не тысяч) публикаций. Изначально эффект синхронизации был обнаружен и изучен в различных устройствах, от маятниковых часов до музыкальных инструментов, электронных генераторов, силовых электрических установок и лазеров; ему было найдено множество практических применений в инженерном деле. В наши дни «центр тяжести» исследований сместился в сторону изучения биологических систем, где синхронизация встречается на самом различном уровне. Синхронное изменение клеточных ядер, синхронная генерация потенциалов действия нейронами, подстройка сердечного ритма к дыханию и/или локомоторным ритмам, различные формы коллективного поведения насекомых, животных и даже человеческих сообществ – все это лишь некоторые примеры фундаментального явления природы, которое и является предметом данной книги.

В нашем окружении сплошь и рядом встречаются осциллирующие объекты. Системы радиосвязи и электрическое оборудование, скрипки в оркестре, светлячки, испускающие последовательности световых импульсов, стрекочущие сверчки, птицы, машущие крыльями, химические системы, демонстрирующие колебательное изменение концентрации реагентов, нервные центры, управляющие сокращением сердца человека, и само сердце, центр патологической активности, вызывающей непроизвольное дрожание конечностей вследствие болезни Паркинсона, – эти и многие другие системы имеют общее свойство: они генерируют ритмы. Обычно эти объекты не отделены от своего окружения, а, наоборот, взаимодействуют с другими объектами; иными словами, они являются открытыми системами. Действительно, биологические часы, управляющие ритмами суточной активности (циркадными ритмами), подвержены влиянию суточного и сезонного изменения освещенности и температуры, скрипач слышит своего коллегу по оркестру, на светлячка воздействует световое излучение всей популяции, различные центры ритмической активности мозга воздействуют друг на друга, и так далее. Такое

взаимодействие может быть очень слабым, иногда едва заметным, но, тем не менее, оно часто приводит к качественному изменению состояния: объект подстраивает свой ритм, согласуя его с ритмами других объектов. В результате, скрипачи играют в унисон, насекомые в популяции генерируют световые или акустические импульсы с общей частотой, птицы в стае одновременно машут крыльями, сердце быстро галопирующей лошади сокращается один раз за каждый локомоторный цикл.

Такая подстройка ритмов за счет взаимодействия и является сущностью синхронизации, явления, которое систематически исследуется в этой книге.

Книга рассчитана на широкую аудиторию: физиков, химиков, биологов, инженеров, а также на других специалистов, занимающихся исследованиями на стыке различных областей;¹ она рассчитана как на теоретиков, так и на экспериментаторов. Поэтому изложение экспериментальных фактов, основных принципов и математических методов в разных главах неоднородно, и иногда повторяется. Разнообразие предполагаемой аудитории отражено в структуре книги.

Первая часть книги, «Синхронизация без формул», рассчитана на читателя с минимальной математической подготовкой (знание математического анализа не требуется), по крайней мере, книга писалась с таким намерением. Хотя часть I практически не содержит уравнений, в ней описываются и объясняются на качественном уровне все основные идеи и эффекты.² Здесь мы иллюстрируем синхронизацию экспериментами и наблюдениями из различных областей. Часть I может быть пропущена физиками-теоретиками, специалистами в нелинейной динамике, или же она может быть использована как источник примеров и приложений.

Части II и III охватывают тот же круг идей, но на уровне количественного описания; предполагается, что читатель этих частей знаком с основами нелинейной динамики. Мы надеемся, что основная часть материала будет понятна студентам старших курсов. В этих частях мы приводим обзор классических результатов по синхронизации периодических осцилляторов, как без учета, так и с учетом влияния шумов; рассматриваем явление синхронизации в ан-

¹ Так как авторы – физики, то акцент неизбежно делается на физическом подходе к описанию естественных явлений.

² Для упрощения изложения мы опускаем в первой части ссылки на оригинальные работы, где эти идеи были высказаны; ссылки могут быть найдены в библиографическом разделе Введения, а также в библиографических заметках к частям II и III.

самблях осцилляторов и в распределенных системах; представляем различные эффекты взаимодействия хаотических систем; приводим обширную библиографию.

Мы надеемся, что эта книга заполнит пробел в литературе. Действительно, хотя почти каждая книга по теории колебаний (или, в современных терминах, по нелинейной динамике) рассматривает синхронизацию в числе других нелинейных эффектов, только монографии И. И. Блехмана [1971; 1981], написанные в «дохаотическую» эру, специально посвящены этой теме. В них главным образом рассматриваются механические и электромеханические системы, но они также содержат подробный обзор теории, природных явлений и приложений в различных областях. При написании нашей книги мы пытались совместить описание классической теории с детальным обзором недавних результатов, делая упор на междисциплинарные приложения.

Благодарности

В процессе исследований по синхронизации мы с радостью сотрудничали и обсуждали результаты с В. С. Афраймовичем, В. С. Анищенко, В. Blasius, И. И. Блехманом, Н. Chaté, U. Feudel, P. Glendinning, P. Grassberger, С. Grebogi, J. Hudson, С. П. Кузнецовым, П. С. Ланда, А. Lichtenberg, R. Livi, Ph. Marcq, Ю. Майстренко, E. Mosekilde, F. Moss, А. Б. Нейманом, Г. В. Осиповым, E.-H. Park, U. Parlitz, K. Piragas, A. Politi, А. Поповичем, R. Roy, O. Rudzick, S. Ruffo, Н. Ф. Рульковым, С. Schäfer, L. Schimansky-Geier, L. Stone, Н. Swinney, P. Tass, E. Toledo и А. А. Заикиным.

Мы высоко ценим комментарии А. А. Непомнящего, А. А. Пиковского, А. Politi и С. Ziehmman, которые частично прочли рукопись.

О. Футер, Н. Б. Игошева и R. Mrowka терпеливо отвечали на наши многочисленные вопросы, касающиеся медицинских и биологических проблем.

Мы хотели бы выразить свою особую благодарность Михаилу Александровичу Заксу, который поддерживал нас на всех стадиях реализации этого проекта.

Мы также благодарим Philips International B.V., Company Archives (Эйндховен, Нидерланды) за присланные фотографию и биографию Балтазара Ван-дер-Поля и А. Kurths за ее помощь в подготовке библиографии.

В заключение мы хотим отметить доброжелательное отношение сотрудников Cambridge University Press. Мы в особенности благодарны S. Carelin за его поддержку и терпение и F. Chapman за ее

превосходную работу по улучшению рукописи.

Интернет–страничка книги

Мы просим всех, кто желает высказать свои комментарии по поводу книги, прислать электронную почту по адресам:

pikovsky@stat.physik.uni-potsdam.de;

mros@agnld.uni-potsdam.de;

jkurths@agnld.uni-potsdam.de.

Все опечатки и ошибки будут отмечены на интернет–страничке (URL: <http://www.agnld.uni-potsdam.de/~syn-book/>).

Часть I

Синхронизация без формул

Глава 1

Введение

1.1 Синхронизация в исторической перспективе

Голландский ученый Христиаан Гюйгенс (рис. 1.1), наиболее известный своими работами по оптике и конструкцией телескопа и часов, был, по всей видимости, первым исследователем, наблюдавшим и описавшим явление синхронизации еще в 17-ом столетии. Он открыл, что двое маятниковых часов, висящих на общей опоре, синхронизируются, т.е. их колебания идеально совпадают, а маятники движутся всегда в противоположных направлениях. Это открытие было сделано во время морских испытаний часов, предназначенных для определения долготы. Создание и конструирование маятниковых часов было одним из важнейших достижений Гюйгенса. Оно оказало огромное влияние на технологическое и научное развитие той эпохи и очень сильно увеличило точность определения времени. В 1658 году, спустя всего лишь два года после получения Гюйгенсом голландского патента на его изобретения, часовая мастер из Утрехта, Самюэль Костер, построил церковные маятниковые часы и гарантировал недельное отклонение менее восьми минут.

После этого изобретения Гюйгенс продолжил свои усилия по увеличению точности и устойчивости таких часов. Он уделял особое внимание конструированию часов, пригодных для использования на кораблях в открытом море. В своем трактате *Horologium Oscillatorium* (Маятниковые часы, или геометрические демонстра-

ции, касающиеся движения маятников применительно к часам), в котором он подвел итоги своим теоретическим и экспериментальным достижениям, Гюйгенс [Huygens 1673] привел детальное описание таких часов.

Маятник этих часов имел длину 9 дюймов и груз полфунта. Механизм приводился в движение гирями, заключенными в ящик вместе с механизмом. Длина ящика была 4 фута. Внизу он был отягчен по крайней мере 100 фунтами свинца, чтобы весь механизм возможно лучше сохранял на судне вертикальное положение.

Хотя движение часов в данных экспериментах было постоянным и очень равномерным, мы, тем не менее, предприняли дальнейшие усилия к их усовершенствованию, как описано



Рис. 1.1. Христиаан Гюйгенс (1629–1695), знаменитый голландский математик, астроном и физик. Среди его основных достижений – открытие первого спутника Сатурна и истинной формы его колец; первая печатная работа об исчислении вероятностей; исследования свойств кривых; формулировка волновой теории света, включая то, что известно сегодня как принцип Гюйгенса. В 1656 году Христиаан Гюйгенс запатентовал первые маятниковые часы, изобретение которых сильно увеличило точность измерений времени и помогло ему решить проблему определения долготы. Во время морских испытаний он наблюдал синхронизацию двух таких часов (см. также исторический обзор во введении к английскому переводу его книги [Huygens 1673]). Фотография: Rijksmuseum voor de Geschiedenis der Natuurwetenschappen, предоставлена American Institute of Physics Emilio Segre Visual Archives.

ниже. ... Результатом была еще бóльшая точность хода двух часов, чем ранее.

Более того, Гюйгенс кратко, но исключительно точно описал свое наблюдение синхронизации.

... Очень важно отметить, что когда мы подвесили двое таким способом сконструированных часов к одной и той же деревянной балке, оба маятника двигались всегда в противоположные стороны, и колебания так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились. Тикание обоих часов было слышно в одно и то же мгновение. Если это совпадение искусственно нарушалось, то оно само восстанавливалось в короткое время. Сначала я был поражен этим странным явлением, но, наконец, после внимательного исследования нашел, что причина лежит в незаметном движении самой балки. Колебания маятника сообщают некоторое движение и самим часам, как бы тяжелы они ни были. А это движение передается балке, и, если маятники сами не двигались в противоположных направлениях, то теперь это произойдет с необходимостью, и только тогда движение балки прекратится. Но эта причина не была бы достаточно эффективна, если бы ход обоих часов не был с самого начала очень однороден и согласован между собой.

Первое упоминание об этом открытии может быть найдено в письме Гюйгенса к отцу от 26 февраля 1665 года, перепечатанном в собрании его трудов [Huygens 1967a] и воспроизведенном в приложении П1. Как следует из этого письма, обнаружение синхронизации

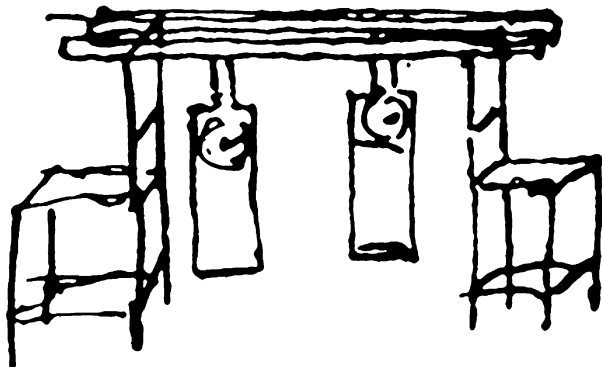


Рис. 1.2. Оригинальный рисунок Христиаана Гюйгенса, иллюстрирующий его эксперименты с двумя маятниковыми часами, подвешенными к общей балке.

было сделано в то время, когда Гюйгенс был болен и вынужден был оставаться несколько дней в постели, наблюдая двое часов, висящих на стене (рис. 1.2). Интересно, что в своем описании открытия этого явления, Гюйгенс писал о «симпатии часов» (*le phénomène de la sympathie, sympathie des horloges*).

Таким образом, Гюйгенс не только привел точное описание, но также дал изумительное качественное объяснение эффекта **взаимной синхронизации**; он правильно понял, что согласованность ритмов двух часов была вызвана недоступными восприятию движениями балки. В современной терминологии это означает, что часы синхронизовались в противофазе за счет **связи** через балку.



Рис. 1.3. Сэр Джон Вильям Стретт, лорд Рэлей (1842–1919). Он учился в Тринити-Колледже Кембриджского университета и окончил его в 1864 году. Его первая статья 1865 года была посвящена электромагнитной теории Максвелла. Стретт работал над проблемой распространения звука и, во время путешествия в Египет, предпринятого для улучшения здоровья, он написал *Трактат о звуке* (1870–1871). В 1879 году он написал работу о бегущих волнах; из этой теории впоследствии выросла теория солитонов. Его теория рассеяния (1871) была первым правильным ответом на вопрос, почему небо голубое. В 1873 году он получил титул барона Рэля. С 1879 по 1884 год он занимал должность профессора экспериментальной физики в Кембридже. Он был вторым после Максвелла, кто занимал эту должность, носящую имя Кавендиша. В 1884 году он стал секретарем Королевского Общества. В 1895 году Рэлей открыл инертный газ аргон – эта работа принесла ему в 1904 году Нобелевскую премию. Фотография: Photo Gen. Stab. Lit. Anst., предоставлена AIP Emilio Segrè Visual Archives.

В середине девятнадцатого столетия, в своем знаменитом труде *Теория звука*, Джон Вильям Стретт, он же лорд Рэлей (рис. 1.3), следующим образом описал интересное явление синхронизации в акустической системе [Рэлей 1945].

Когда две органнне трубы с одинаковой высотой звука расположены рядом, возникают последствия, которые изредка приводят к практическим проблемам. В экстремальных случаях трубы могут заставить друг друга почти замолчать. Даже если взаимное влияние не столь сильно, то оно может, тем не менее, быть причиной того, что трубы будут звучать абсолютно в унисон, несмотря на неизбежные малые различия.



Рис. 1.4. Сэр Эдуард Виктор Эплтон (1892–1965). Получив образование в Кембриджском университете, он начал исследовательскую деятельность в Кавендишской Лаборатории под руководством В. Л. Брэгга. Во время первой мировой войны он заинтересовался электронными лампами и беспроводной передачей сигналов, что повлияло на всю его дальнейшую научную карьеру. Он вернулся в Кавендишскую Лабораторию в 1919 году, продолжая работать над лампами, и, совместно с Б. Ван-дер-Полем, над нелинейными проблемами, а также над атмосфериками. В 1924 году, совместно с М. F. Barnett, он провел решающий эксперимент, который позволил определить и измерить отражающий слой в атмосфере. В 1936 году он возглавил кафедру естественной философии в Кембридже, где он продолжал исследования ионосферных явлений. За исследования ионосферы он был награжден Нобелевской премией по физике 1947 года. Фотография предоставлена: AIP Emilio Segrè Visual Archives, E. Scott Barr Collection.

Итак, Рэлей не только наблюдал взаимную синхронизацию, когда различные, но схожие, органнне трубы, начинают звучать в унисон, но также и эффект **гашения (вымирания) колебаний**, когда связь приводит к подавлению колебаний во взаимодействующих системах.

Новый этап в исследовании синхронизации был связан с развитием электро- и радиотехники. 17 февраля 1920 года В. Экклес и



Рис. 1.5. Балтазар Ван-дер-Поль (1889–1959). Он изучал физику и математику в Утрехте, а затем отправился в Англию, где провел несколько лет, работая в Кавендишской Лаборатории в Кембридже. Там он встретился с Э. Эпплтоном, и они начали совместные исследования в области радиофизики. В 1919 году Ван-дер-Поль вернулся в Голландию, где в 1920 году получил докторскую степень Утрехтского университета. В 1922 году он принял предложение от компании Филипс и начал работать в исследовательской лаборатории Филипс в Эйндховене, где он вскоре стал директором по фундаментальным исследованиям в области радио. Ван-дер-Поль приобрел международную репутацию своими пионерскими работами по распространению радиоволн и по нелинейным колебаниям. Его исследования колебаний в контуре с триодом привели к выводу уравнения Ван-дер-Поля – одной из основных моделей теории колебаний и нелинейной динамики (см. уравнение (7.2)). Совместно с Ван-дер-Марком он первым применил теорию колебаний к физиологическим системам. Их работа по моделированию сердца человека тремя связанными релаксационными системами [van der Pol and van der Mark 1928] остается шедевром биологической физики. Фото предоставлено: Philips International B.V., Company Archives, Eindhoven, The Netherlands (см. подробную биографию в Bremmer [1960/61]).



Дж. Винсент подали заявку на британский патент, подтверждающий открытие ими свойства синхронизации триодного генератора – довольно простого электрического устройства, основанного на вакуумной радиолампе и предназначенного для генерации переменного тока [Eccles and Vincent 1920]. Частота колебаний тока определялась параметрами схемы, например, емкостью. В своих экспериментах, Экклес и Винсент связали два генератора со слегка различными частотами и продемонстрировали, что связь вынуждает системы осциллировать на общей частоте.

Несколькими годами позже Эдвард Эпплтон (рис. 1.4) и Балтазар Ван-дер-Поль (рис. 1.5) повторили и расширили эксперименты Экклеса и Винсента и сделали первый шаг в развитии теории этого эффекта [Appleton 1922; van der Pol 1927]. Рассмотрев простейший случай, они показали, что частота генератора может быть захвачена, или синхронизована, слабым внешним сигналом несколько другой частоты. Эти исследования имели огромное прикладное значение, так как триодные генераторы стали базовым элементом систем радиосвязи. Явление синхронизации использовалось для стабилизации частоты мощного генератора с помощью маломощного, но зато очень точного.

Теоретическое рассмотрение Эпплтона и Ван-дер-Поля было расширено и обосновано с точки зрения теории нелинейных колебаний А. А. Андроновым и А. А. Виттом (рис. 1.6). В двух работах [Андронов и Витт 1930b,a] они провели детальный анализ задачи о захватывании.

Синхронизация в живых системах также известна уже несколько столетий. В 1729 Жан-Жак Дорту де Мэран, французский астроном и математик, позднее – секретарь Королевской Академии наук в Париже, сообщил о результатах своих экспериментов с фасолью. Он заметил, что листья этого растения поднимаются и опускаются в соответствии со сменой дня и ночи. Сделав это наблюдение, де Мэран поместил фасоль в темную комнату и обнаружил, что движение листьев продолжается и без изменения освещенности окружающей среды. С тех пор подобные и значительно более сложные эксперименты были повторены в разных лабораториях, и теперь уже хорошо известно, что все биологические системы, от простейших и до высокоорганизованных, имеют внутренние биологические часы, снабжающие своего «владельца» информацией о смене дня и ночи. Разгадка устройства таких часов до сих пор является захватывающей проблемой, но уже твердо установлено, что они могут подстра-

ивать свои циркадные ритмы (от *circa* = примерно и *dies* = день) ко внешним сигналам: если такая система полностью изолирована от окружающей среды и содержится в неизменных условиях (постоянная освещенность, температура, давление, параметры электромагнитных полей и т.д.), то их внутренний цикл может существенно отличаться от суточного. В естественных условиях биологические часы подстраивают свои ритмы в соответствии с 24-часовым периодом земных суток.

В качестве последнего исторического примера процитируем еще одного голландца, врача Энгельберта Кэмпфера [Kaempfer 1727],¹ писавшего после своего путешествия в Сиам в 1680 году:

Светлячки ... представляют собой другое зрелище, которое возникает на некотором дереве, как сверкающее облако, при

¹ Цитата воспроизведена по [Buck and Buck 1968].



Рис. 1.6. Александр Александрович Андронов (1901–1952, левое фото) и Александр Адольфович Витт (1902–1938, правое фото) учились вместе в Московском Университете и начали научную деятельность в области теории колебаний под руководством Л. И. Мандельштама. Их продолжавшееся около десяти лет плодотворное сотрудничество привело к появлению ряда основополагающих работ в теории нелинейных колебаний, подытоженных в написанной совместно с С. Э. Хайкиным монографии «Теория колебаний» [Андронов и др. 1937]. Совместная научная работа прервалась в результате ареста и гибели А. А. Витта в сталинском ГУЛАГе.

тех удивительных обстоятельствах, что целый рой этих насекомых, завладев одним деревом и распространившись по его ветвям, время от времени прекращают свое свечение и моментом позже заставляют его появиться вновь с высочайшей регулярностью и точностью . . .

Насколько нам известно, это первое опубликованное наблюдение синхронизации в большой популяции колебательных систем.

Мы заканчиваем наш исторический экскурс двадцатыми годами прошлого века. С тех пор множество интересных явлений синхронизации было обнаружено и описано в литературе (некоторые из них изложены в следующих главах) и, что еще более важно, постепенно стало ясно, что различные явления, на первый взгляд не имеющие ничего общего, подчиняются неким универсальным законам. Множество исследований, выполненных математиками, инженерами, физиками и специалистами из других областей, привели к пониманию того, что, скажем, согласованность звучания органных труб или же стрекотания сверчков не случайна, а может быть описана единой теорией. В следующих главах мы намереваемся показать, что эти и множество других, кажущихся различными, эффектов имеют общие характерные особенности и могут быть объяснены в рамках единого подхода.

1.2 Синхронизация: краткое описание явления

Мы показали на нескольких вводных примерах (и мы проиллюстрируем это дальнейшими примерами ниже), что синхронизация встречается в различных областях науки, в технике и в социальном поведении. Мы не собираемся формулировать сейчас какое-либо строгое определение этого явления. Прежде, чем мы детально, хотя и без применения математических методов, обсудим это понятие в части I и прежде, чем мы приведем теоретическое описание в частях II и III, мы дадим здесь простое качественное описание этого эффекта; этот раздел может быть пропущен читателем со знанием основ физики и нелинейной динамики. Используя несколько характерных примеров, мы объясним, что такое синхронизация, и выделим общие свойства систем, допускающих этот эффект. Тем не менее, ответ на вопрос – почему так происходит? – будет отложен до главы 2.

1.2.1 Что такое синхронизация?

Мы понимаем синхронизацию как **подстройку ритмов осциллирующих объектов за счет слабого взаимодействия между ними**. За исключением редких случаев, когда будет явно сказано другое, эта концепция используется во всей книге. Чтобы качественно объяснить эту концепцию, сконцентрируемся на четырех следующих вопросах.

- Что такое осциллирующий объект?
- Что мы понимаем под словом «ритм»?
- Что такое взаимодействие осциллирующих систем?
- Что такое подстройка ритмов?

Для иллюстрации этой общей концепции возьмем классический пример – маятниковые часы.

Автоколебательная система: модель естественного осциллятора

Рассмотрим, как работают часы. Их механизм преобразует потенциальную энергию поднятого груза (или сжатой пружины, или электрической батареи) в колебательное движение маятника. В свою очередь, эти колебания преобразуются во вращение стрелок на циферблатах (рис. 1.7а). Нам не интересны частности устройства механизма; важно только, что он черпает энергию из некоторого источника и поддерживает постоянные колебания маятника, которые продолжаются без каких-либо изменений, пока не иссякнет приток энергии. Следующее важное свойство состоит в том, что форма колебательного движения полностью определяется внутренними параметрами часов и не зависит от того, как именно маятник был приведен в движение. Более того, если движение маятника слегка возмутить, то после некоторого переходного процесса маятник восстановит внутренне присущий ему ритм.

Такие свойства типичны не только для часов, но и для многих других колебательных объектов самой различной природы. Набор этих свойств определяет ответ на первый из сформулированных выше вопросов. В физике такие колебательные системы называют **автоколебательными**; ниже мы детально обсудим их свойства. Далее мы часто будем опускать слово «автоколебательная»; по умолчанию мы описываем только системы из этого класса. Подводя итоги, сформулируем кратко свойства автоколебательных систем.

- Такой осциллятор является **активной системой**. Он содержит внутренний **источник энергии**, которая трансформируется в колебательное движение. Будучи изолированным, осциллятор продолжает генерировать один и тот же ритм, пока не иссякнет источник энергии. Математически такой осциллятор описывается **автономной** (т.е. без явной зависимости от времени) динамической системой.
- Форма автоколебаний определяется параметрами системы и не зависит от того, как система была «включена», т.е. от перехода к стационарным колебаниям.
- Автоколебания устойчивы по отношению к (по крайней мере малым) возмущениям: будучи возмущенными, колебания вскоре восстанавливают свою исходную форму.

Примерами автоколебательных систем являются электронные автогенераторы, лазеры, среды, в которых идут реакция Белоусова-Жаботинского или другие колебательные химические реакции, водители ритма (пейсмекеры) сердца человека (например, синоатриальный узел) или кардиостимуляторы, используемые при кардиологических патологиях, и многие другие естественные или искусственные системы. Как мы увидим далее, замечательным общим свойством таких систем является их способность к синхронизации.

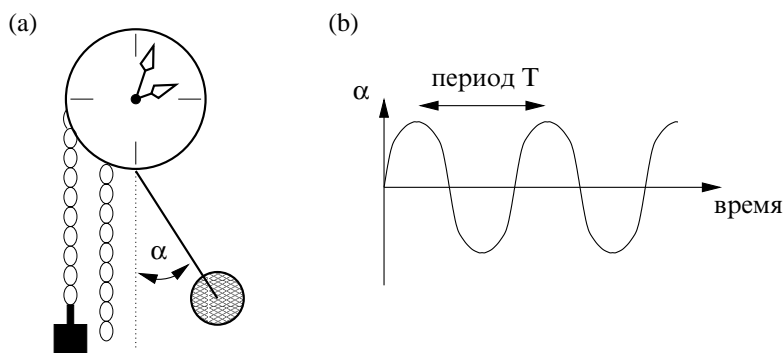


Рис. 1.7. (а) Пример автоколебательной системы – маятниковые часы. Потенциальная энергия поднятого груза преобразуется в колебания маятника и, в конечном итоге, приводит к вращению стрелок. (б) Движение маятника – периодическое, т.е. его угол α по отношению к вертикали изменяется во времени с периодом T .

Характеристики ритма: период и частота

Автоколебательные системы могут демонстрировать ритмы самой разной формы, от простых, близких к синусоиде, сигналов до последовательности коротких импульсов. Охарактеризуем такие ритмы количественно, используя наш частный пример – маятниковые часы. Колебания маятника – периодические (рис. 1.7b), и **период** T есть главная характеристика часов. Действительно, вращающий стрелки механизм на самом деле подсчитывает число колебаний маятника, так что его период составляет минимальную единицу отсчета времени.

Часто бывает удобно характеризовать ритм числом колебаний в единицу времени или же **частотой** колебаний

$$f = \frac{1}{T}.$$

При теоретическом анализе колебаний более удобной часто бывает **угловая частота** $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$; ниже мы часто опускаем слово «угловая» и называем ее просто частота. Далее мы увидим, что частота может изменяться за счет внешнего воздействия на осциллятор или же взаимодействия с другой системой. Чтобы избежать неоднозначности, мы назовем частоту автономной (изолированной) системы *автономной частотой*.

Связь между колебательными объектами

Предположим теперь, что у нас есть не одни часы, а двое. Даже если они одного и того же типа и сделаны одним производителем, то они только кажутся идентичными, но это не так. Какие-либо параметры механизма всегда различаются, пусть всего лишь на десятую долю процента, но это мельчайшее различие приводит к различию в периодах колебаний. Следовательно, эти двое часов будут показывать немного различное время, и, если мы посмотрим на них в какой-нибудь момент времени, то скорее всего увидим, что маятники находятся в разных положениях (рис. 1.8).

Представим теперь, что эти двое неидентичных часов не независимы, а слабо взаимодействуют. Могут существовать различные формы взаимодействия, или **связи**, между двумя осцилляторами. Пусть двое часов закреплены на общем подвесе, и предположим, что это не абсолютно жесткая балка (рис. 1.9), как это и было в первоначальном наблюдении Гюйгенса. Балка может изгибаться, или она может слегка вибрировать, двигаясь справа налево, это не очень важно.

Действительно важно только то, что движение каждого маятника передается через структуры подвеса к другому маятнику, и в результате часы «чувствуют» друг друга: они взаимодействуют через вибрацию общего подвеса. Эта вибрация может быть практически незаметна; для того, чтобы ее обнаружить и визуализировать, могут потребоваться высокоточные механические измерения. Тем не менее, несмотря на то, что вибрация очень слаба, она может изменить ритм обоих часов!

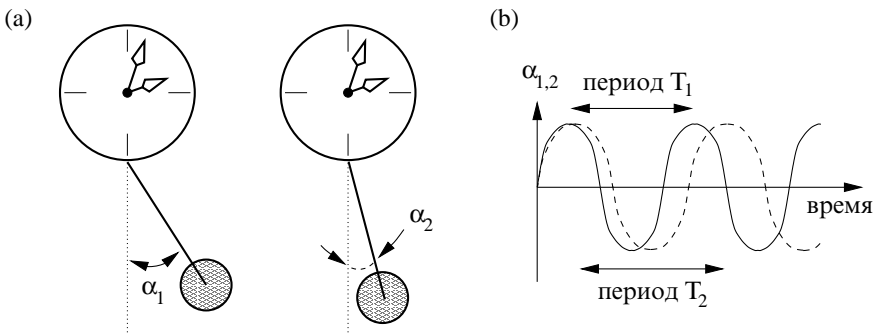


Рис. 1.8. Двое аналогичных маятниковых часов (а) не могут быть идеально идентичными; из-за мельчайшего разброса в параметрах они имеют слегка различные периоды (здесь $T_2 > T_1$) (б). Следовательно, если мы взглянем на них в некий произвольный момент времени, то вообще говоря обнаружим маятники в различных положениях: $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

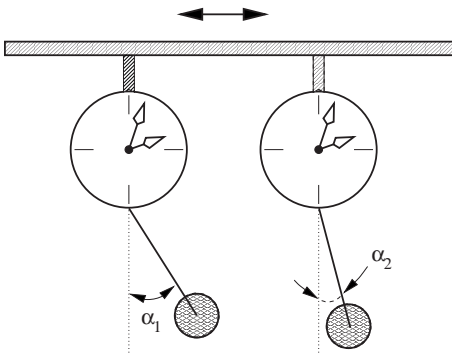


Рис. 1.9. Двое маятниковых часов, связанных через общий подвес. Балка, к которой подвешены часы, не жесткая, а может слегка вибрировать, как показано стрелками вверх рисунка. Эта вибрация вызывается движением обоих маятников, в результате чего двое часов «чувствуют» присутствие друг друга.

Подстройка ритмов: захват фаз и частот

Эксперименты показывают, что даже слабое взаимодействие может синхронизовать двое часов. Это значит, что двое неидентичных часов, которые, взятые по отдельности, имеют различные периоды, при наличии связи подстраивают свои ритмы и начинают демонстрировать колебания с общим периодом. Это явление часто и называют в терминах совпадения частот их **захватом**:² если два неидентичных осциллятора имеющих свои собственные частоты f_1 и f_2 связываются, то они могут начать осциллировать с общей частотой. Произойдет это или нет, т.е. синхронизуются ли они, зависит от двух факторов.

1. Сила связи

Этот параметр характеризует, насколько слабо или сильно взаимодействие. В эксперименте не всегда ясно, как измерить эту величину. В описанном выше эксперименте она сложным образом зависит от способности балки (подвеса) двигаться. Действительно, если балка абсолютно жесткая, то движение маятников не передается через опору, и, следовательно, часы не могут воздействовать друг на друга. Если часы не взаимодействуют, то сила связи равна нулю. Если балка не жесткая, а может сгибаться или продольно вибрировать, то имеет место взаимодействие.

2. Расстройка по частоте

Расстройка частот $\Delta f = f_1 - f_2$ характеризует, насколько различны осцилляторы. В противоположность силе связи, в экспериментах с часами расстройка может быть легко измерена или изменена. Действительно, частоту часов можно подстроить, меняя длину маятника.³ Используя это, мы можем выяснить, как результат взаимодействия (т.е. возникновение синхронизации часов) зависит от расстройки частот. Представим себе следующий эксперимент. Сначала поместим часы в разные комнаты и измерим их частоты f_1 и f_2 . Сделав это, поместим часы на общий подвес и измерим частоты F_1 и F_2 *связанных* систем (часов). Мы можем выполнить такие измерения для различных параметров расстройки и получить зависимость $\Delta F = F_1 - F_2$ от Δf . Нарисовав эту зависимость, мы получим кривую, показанную на рис. 1.10. Она *типична для взаимодей-*

² В английском этому соответствуют слова «entrainment» и «locking» (см. терминологические замечания в разделе 1.3.1).

³ Механические часы обычно имеют механизм, позволяющий это делать. Такая подстройка используется для того, чтобы ускорить часы, если они отстают, или замедлить их, если они спешат.

ствующих автоколебательных систем, независимо от их природы (механической, химической, электронной, и т.д.). Проанализировав эту кривую, мы видим, что, если рассогласованность автономных систем не очень велика, то частоты двух часов (двух систем) становятся равными, или **захваченными**, т.е. наступает синхронизация. Подчеркнем, что частоты $f_{1,2}$ и $F_{1,2}$ должны измеряться для одного и того же объекта, но в разных экспериментальных условиях: $f_{1,2}$ характеризуют свободные (несвязанные, или автономные) осцилляторы, в то время как частоты $F_{1,2}$ получены в присутствии связи. В общем случае мы ожидаем, что ширина области синхронизации возрастает с увеличением силы связи.

Более детальное рассмотрение синхронных состояний показывает, что синхронизация двух часов может возникнуть в различных формах. Может случиться, что два маятника качаются сходным образом: например, они оба движутся налево, почти одновременно достигают крайнего левого положения и начинают двигаться направо, почти одновременно пересекают вертикаль, и так далее. В этом случае положения маятников изменяются во времени как показано на рис. 1.11а. Также возможна ситуация, при которой оба маятника всегда движутся в противоположных направлениях: когда первый маятник достигает, скажем, крайнего левого положения, второй достигает крайнего правого; когда они пересекают вертикаль, они движутся в противоположных направлениях (рис. 1.11б). Чтобы описать эти два явно различных режима, введем ключевое понятие теории синхронизации, а именно понятие **фазы** осциллятора.

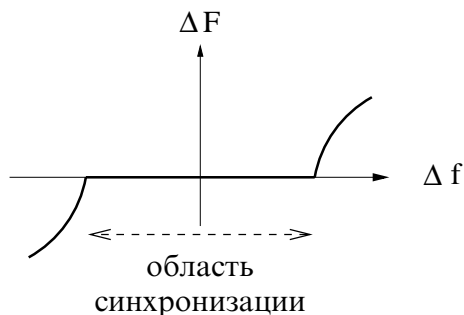


Рис. 1.10. График «разность наблюдаемых частот – расстройка» для некоторой фиксированной силы связи. Разность частот ΔF двух связанных осцилляторов изображена как функция расстройки (рассогласования частот) Δf несвязанных систем. В определенном диапазоне расстроек частоты связанных осцилляторов идентичны ($\Delta F = 0$), что указывает на синхронизацию.

Мы понимаем фазу как величину, которая пропорциональна доле периода и возрастает на 2π в течение одного цикла колебаний

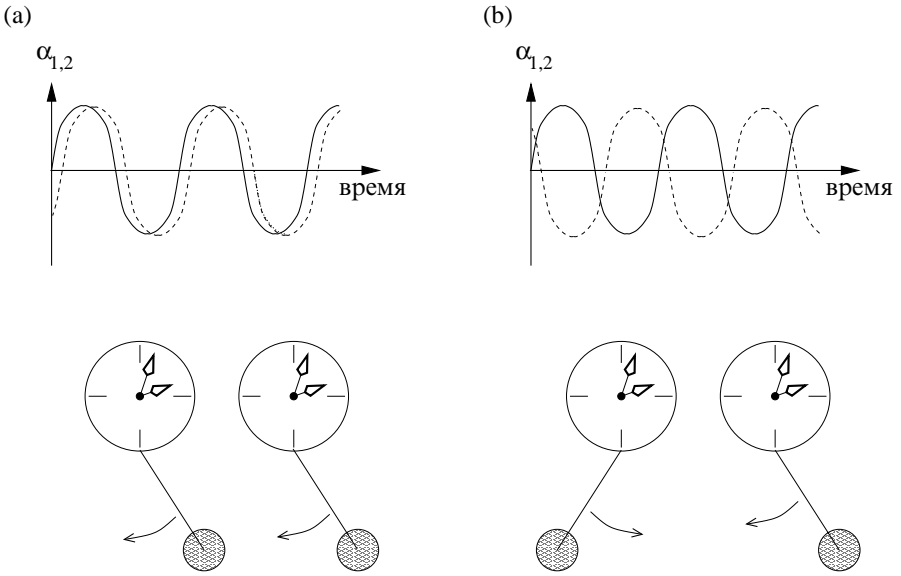


Рис. 1.11. Возможные синхронные режимы двух почти идентичных осцилляторов: они могут быть синхронизованы почти в фазе (а), т.е. с разностью фаз $\phi_2 - \phi_1 \approx 0$, или в противофазе (б), когда $\phi_2 - \phi_1 \approx \pi$.

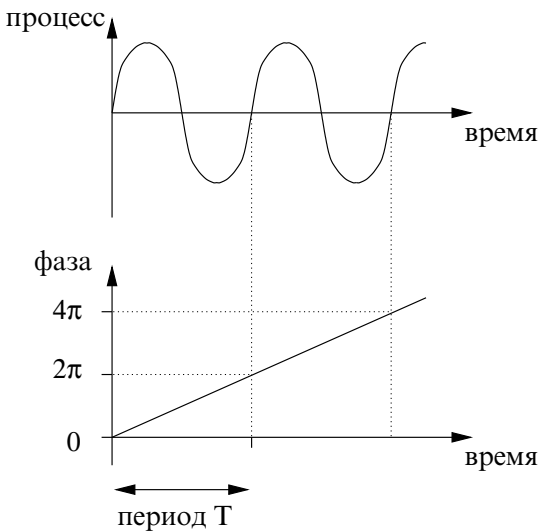


Рис. 1.12. Определение фазы. Фаза периодического колебания растет равномерно во времени и увеличивается на 2π с каждым периодом.

(рис. 1.12). Фаза однозначно определяет состояние периодического осциллятора; как и время, она параметризует сигнал внутри одного цикла. На первый взгляд, фаза не дает новой информации о системе, но ее преимущества становятся очевидными, если мы рассмотрим разность фаз⁴ двух часов. Это дает возможность различить два разных синхронных режима.

Если два маятника движутся в одном направлении и почти одновременно достигают, скажем, крайнего правого положения, то их фазы ϕ_1 и ϕ_2 близки и такой режим называется **синфазной синхронизацией** (рис. 1.11a). Если мы взглянем на движение маятников с большей точностью (вполне вероятно, что для этого нам понадобится довольно сложное оборудование), то мы сможем выявить, что эти движения не в точности одновременны. Часы, которые изначально шли чуть быстрее, оказываются немного впереди других, так что обычно говорят о **фазовом сдвиге** между двумя колебаниями. Этот фазовый сдвиг может быть очень мал, в случае двух часов он может быть невидим невооруженным глазом, но он всегда присутствует, если две системы изначально имели разные периоды колебаний, или же разные частоты.

Если маятники двух синхронизованных часов движутся в противоположных направлениях, то говорят о синхронизации в **противофазе** (рис. 1.11b). Именно такое синхронное состояние наблюдал и описал Христиан Гюйгенс. Недавнее повторение этого эксперимента, выполненное И. И. Блехманом с сотрудниками, а также теоретические исследования показывают, что возможны как син- так и противофазные синхронные режимы [Блехман 1981], в зависимости от того, как связаны между собой часы (см. детали в разделе 4.1.1). Опять-таки, колебания двух маятников сдвинуты не точно на половину периода – они не в точности в противофазе, а существует дополнительный малый фазовый сдвиг.

Возникновение определенного соотношения между фазами двух синхронизованных автоколебательных систем часто называют **захватом фаз**. Здесь мы описали его простейшую форму; в следующих главах мы рассмотрим более общий случай.

Наш мысленный эксперимент с часами демонстрирует основной

⁴ Фазу можно ввести двумя различными, хотя и связанными способами. Можно считать, что она сбрасывается в ноль в начале каждого цикла, и тем самым рассматривать ее на интервале от 0 до 2π ; альтернативно, можно все время суммировать набег фазы и, следовательно, считать, что она растет до бесконечности. Эти два определения почти эквивалентны, поскольку обычно важна только разность фаз.

признак синхронизации: будучи связанными, два осциллятора с изначально различными частотами и независимыми фазами подстраивают свои ритмы и начинают осциллировать на общей частоте; это также предполагает наличие определенного соотношения между фазами двух систем. Мы хотим подчеркнуть, что это *точное равенство* частот выполняется в некотором диапазоне изначальной расстройки по частоте (а не в одной точке, как было бы при случайном совпадении).

1.2.2 Что не является синхронизацией?

Только что сформулированное определение синхронизации содержит несколько ограничений. Подчеркнем эти ограничения, проиллюстрировав понятие синхронизации несколькими контрпримерами.

Не бывает синхронизации без колебаний в автономной системе

Чтобы получить незатухающие колебания маятника, поместим рядом электромагнит, питаемый переменным током с частотой f . Соответственно, на маятник действует переменная магнитная сила. Эти колебания заметны, только если частота магнитной силы f близка к собственной частоте f_0 , иначе же они пренебрежимо малы; это хорошо известное явление резонанса. После некоторого переходного процесса маятник колеблется с частотой магнитного поля f . Если бы эта частота изменилась, то и частота колебаний маятника тоже бы изменилась. Кажется, что это и есть описанное выше явление захвата, но это не так! Этот случай не может быть назван синхронизацией, так как одна из двух взаимодействующих систем —

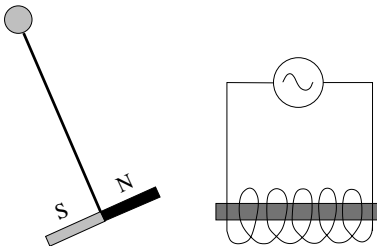


Рис. 1.13. Резонанс – это не синхронизация! Магнитный маятник колеблется в электромагнитном поле с частотой электрического тока. Это пример вынужденных колебаний системы, не имеющей собственного ритма: если маятник закрыт экраном от электромагнита, то колебания затухают.

маятник – не имеет собственного ритма. Если мы нарушим связь между системами, например, поместим металлическую пластину между электромагнитом и маятником, то после некоторого переходного процесса маятник остановится. Следовательно, в этом случае нельзя говорить о подстройке ритмов.

Прежде всего, мы хотим подчеркнуть разницу между синхронизацией и другим хорошо известным явлением в колебательных системах – резонансом. Для иллюстрации рассмотрим систему, которая немного похожа на часы, так как ее колебательный элемент – тоже маятник. Пусть этот маятник свободно вращается на горизонтальном валу и имеет магнит на свободном конце (рис. 1.13). Маятник – не автоколебательная система и не может осциллировать непрерывно: если его толкнуть, то он начнет качаться, но эти свободные колебания затухнут из-за сил трения. Частота f_0 свободных колебаний определяется геометрией маятника и, при малых отклонениях, не зависит от амплитуды.

Синхронное изменение двух переменных – это не всегда синхронизация

Наше понимание синхронизации предполагает, что наблюдаемый объект может быть разделен на несколько подсистем, которые могут, пусть и не в конкретном эксперименте, а, по крайней мере, в принципе, генерировать независимые сигналы. Таким образом мы исключаем случаи, когда две колебательные переменные являются просто двумя разными координатами одной и той же системы. Рассмотрим, например, скорость и смещение маятника часов; очевидно, что эти переменные осциллируют с общей частотой и определенным сдвигом фаз, но ведь и не может же быть скорости без смещения, и наоборот. Конечно, в таком тривиальном примере очевидно, что синхронизация здесь ни при чем, но в некоторых сложных случаях может быть совершенно неочевидно, к одной или к разным системам относятся наблюдаемые сигналы.

Проиллюстрируем это примером из динамики популяций. Изменение численности взаимодействующих видов – это широко известное в экологии явление; хорошим примером могут быть колебания в системе «зайцы – рыси» (рис. 1.14). Число животных-хищников и их жертв изменяется с одним и тем же периодом $T \approx 10$ лет, так что можно сказать, что они изменяются синхронно, с некоторым сдвигом фаз. Этот график напоминает рис. 1.11, но тем не менее мы не можем в этом случае говорить о синхронизации, так как экологи-

ческая система не может быть разделена на два осциллятора. Если бы зайцы и рыси были бы изолированы друг от друга, то не было бы никаких колебаний вообще: хищники бы просто вымерли, а число жертв ограничивалось бы количеством доступной им пищи и другими факторами. Зайцы и рыси представляют собой два компонента одной неделимой системы. Так как мы не можем рассматривать их как две подсистемы с собственными ритмами, то мы и не можем говорить о синхронизации. Напротив, очень интересно рассмотреть возможность синхронизации (и она, действительно, есть) двух или многих популяций зайцы – рыси, заселяющих соседние регионы и слабо взаимодействующих между собой, например, за счет локальной миграции животных.

Слишком сильная связь делает систему единой

В заключение, мы объясним, что мы понимаем под слабой связью; для этого опять используем наш «виртуальный» эксперимент. Одновременно (можно также сказать «синхронно») мы еще раз проиллюстрируем разницу между терминами «синхронное движение» и «синхронизация». Возьмем опять двое часов и механически соединим их маятники жесткой связью (рис. 1.15). Очевидно, что часы или остановятся, или же их маятники будут двигаться синхронно. Мы бы не хотели называть этот тривиальный эффект синхронизацией:

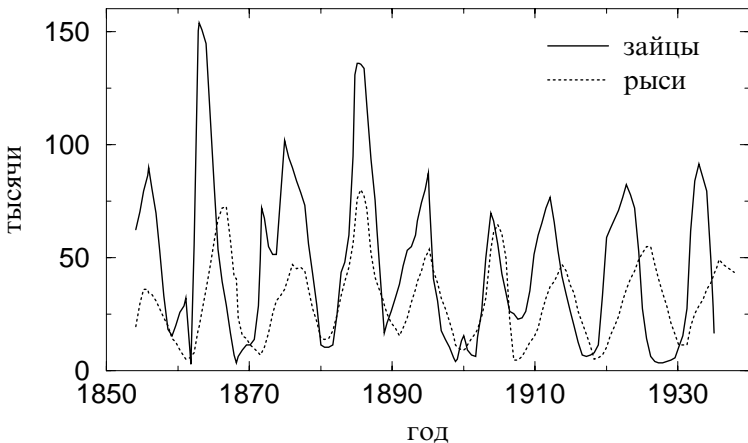


Рис. 1.14. Классический набор данных (взятый из [Odum 1953]) для системы хищник – жертва: записи канадской меховой компании Гудзонова залива о числе добытых рысей и зайцев более чем за столетие. Понятие синхронизации в данном случае неприменимо, т.к. рыси и зайцы представляют собой неделимую систему.

связь не слаба, она накладывает слишком сильные ограничения на движение двух систем, и, следовательно, естественно рассматривать всю систему как неделимую.

Итак, возможность разделения одной большой системы на несколько осциллирующих подсистем может зависеть от параметра. Обычно довольно сложно, если вообще возможно, строго определить, какую связь можно считать слабой, где лежит граница между слабым и сильным и, соответственно, должны ли мы рассматривать проблему синхронизации или же изучать новую, единую, систему. В довольно расплывчатой формулировке мы можем сказать, что введение связи не должно качественно изменять поведение каждой из взаимодействующих систем и не должно лишать систему ее индивидуальности. В частности, если одна система перестает осциллировать, то это не должно мешать второй системе поддерживать ее собственный ритм.

Подводя итоги, скажем, что, если в каком-либо эксперименте мы наблюдаем две переменные, которые кажутся изменяющимися синхронно, то это не обязательно означает, что мы наблюдаем синхронизацию. Чтобы назвать явление синхронизацией, мы должны быть уверены в том, что:

- мы анализируем поведение двух автоколебательных систем, т.е. систем, способных генерировать собственные ритмы;
- системы подстраивают свои ритмы за счет слабого взаимодействия;
- подстройка ритмов происходит в некотором диапазоне расстройек между системами; в частности, если частота одного из ос-

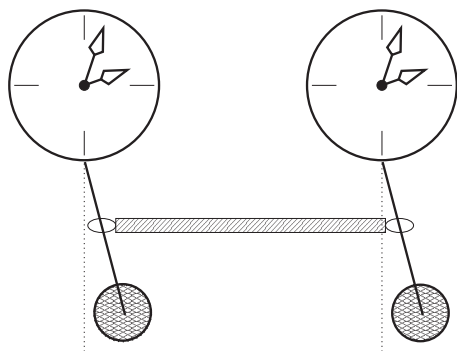


Рис. 1.15. Пример того, что *не может* быть рассмотрено как слабая связь.

цилляторов медленно изменяется, то вторая система следует за этим изменением.

Соответственно, одного наблюдения недостаточно, чтобы сделать вывод о наличии синхронизации. Синхронизация – это **сложный динамический процесс, а не состояние.**

1.3 Синхронизация: обзор различных случаев

Мы уже упомянули много примеров коллективного поведения различных колебательных систем, от простых механических или электрических устройств до живых организмов. Теперь мы хотим перечислить различные формы синхронизации. При этом мы не будем обращать внимание ни на природу колебаний (т.е. генерируются ли они электронным устройством или живой клеткой), ни на природу связи (т.е. осуществляется ли она за счет механического соединения или диффузии реагентов химической реакции), а остановимся на общих свойствах: являются ли колебания периодическими или нерегулярными; является ли связь взаимной или однонаправленной и т.д. Это не будет полной и строгой классификацией, а просто кратким обсуждением основных проблем теории синхронизации, которые рассматриваются в данной книге.

Основной пример предыдущего раздела – двое взаимодействующих часов – иллюстрирует важный случай, который называется **взаимной синхронизацией** (см. также главы 4 и 8). Действительно, эти два объекта в равной степени воздействуют друг на друга и взаимно подстраивают свои ритмы. Может, однако, случиться, что осциллятор подвержен воздействию, которое совершенно не зависит от колебаний этого осциллятора. Мы начнем с рассмотрения такого случая, а затем перейдем к более сложным задачам.

Синхронизация внешней силой (главы 3 и 7)

Синхронизация была открыта Гюйгенсом как побочный результат его усилий по созданию высокоточных часов. В наши дни этот эффект используется для точного и недорогого измерения времени с помощью радиоуправляемых часов. В этом случае передаваемый по радио слабый сигнал от центральных высокоточных часов каждую минуту подстраивает ритм других часов, тем самым захватывая их

и делая излишним улучшение их качества. Подчеркнем существенную разницу между радиоуправляемыми часами и «вокзальными часами». Первые являются автоколебательной системой и поэтому способны показывать время (пусть и не очень точно) даже в отсутствие синхронизирующих радиосигналов. Вокзальные же часы, наоборот, – это обычная пассивная система, управляемая электрическим сигналом; они не будут функционировать, если сигнал исчезнет. Собственно говоря, вокзальные часы есть не что иное как одни (центральные) часы со многими удаленными циферблатами; следовательно, понятие синхронизации здесь неприменимо.

Похожая схема синхронизации была «реализована» природой для подстройки биологических часов, которые регулируют суточные (циркадные) и сезонные ритмы живых систем, от бактерии до человека. Для большинства людей внутренний период этих часов отличается от 24 часов, но он захватывается сигналами окружающей среды, например, освещенностью, имеющей период вращения Земли. Очевидно, что воздействие в этом случае – одностороннее: человечество не влияет на вращение планет (пока); таким образом, это еще один пример синхронизации внешней силой. В обычных условиях эта сила достаточно сильна, чтобы обеспечить идеальный захват; для того, чтобы десинхронизовать биологические часы, надо отправиться либо в полярные области, либо в пещеру. Интересно, что хотя обычно период активности человека в точности захвачен вращением Земли, фазовый сдвиг между внутренними часами и внешней силой изменяется от индивида к индивиду: некоторые люди относят себя к «жаворонкам», в то время как другие называют себя «совами». Возмущение привычного фазового сдвига сильно нарушает нормальную активность. Каждый день многие люди осуществляют подобный эксперимент, быстро меняя долготу места (например, пересекая Атлантику) и испытывая сбой суточного ритма. Им может потребоваться до нескольких дней для восстановления нужного фазового соотношения с внешней силой; на языке нелинейной динамики говорят о различной длине переходного процесса к устойчивому синхронному состоянию.

Ансамбли осцилляторов и колебательные среды (главы 4, 11 и 12)

Во многих естественных ситуациях взаимодействуют более двух объектов. Если два осциллятора способны к подстройке ритмов, то можно ожидать такой способности и от большого числа систем. Один

пример был уже упомянут в разделе 1.1: большая популяция светлячков может излучать вспышки света синхронно; такую систему мы называем ансамблем взаимно связанных осцилляторов. Очень похожее явление, самоорганизация аплодирующей публики, наблюдалось, вероятно, каждым из читателей этой книги, например, в театре. Действительно, если аудитория достаточно велика, то часто можно услышать довольно быстрый (несколько периодов колебаний) переход от шумовых к ритмическим, почти периодическим, аплодисментами. Это происходит, когда большинство публики аплодирует в унисон, т.е. синхронно.

Светлячок «общается» посредством световых импульсов со всеми остальными насекомыми в популяции, а человек в театре слышит всех остальных членов аудитории. В этом случае можно говорить о **глобальной** (каждый с каждым) связи. Бывают и другие ситуации, когда осцилляторы упорядочены в цепочки или решетки, где каждый элемент взаимодействует с несколькими соседями. Такие структуры типичны для созданных человеком систем, например, для решеток лазеров или цепочек контактов Джозефсона, но могут также встречаться и в природе. Так, гладкая мускулатура кишечника млекопитающих может быть с электрической точки зрения рассмотрена как цепочка слабо связанных пейсмекеров, имеющих свои собственные частоты. Их активность приводит к сокращению мускулатуры. Эксперименты показывают, что соседние источники активности часто подстраивают свои частоты и формируют синхронные кластеры.

Достаточно часто мы не можем выделить отдельный колебательный элемент внутри естественного объекта. Вместо этого мы должны рассматривать систему как непрерывную колебательную среду, как в случае химической реакции Белоусова – Жаботинского. Она может протекать, например, в тонкой мембране, зажатой, как слой бутерброда, между двумя резервуарами реагентов. Концентрации веществ изменяются локально, а коллективные колебания, имеющие общую частоту, могут интерпретироваться как синхронизация в среде.

Фазовая и полная синхронизация хаотических осцилляторов (главы 5, 10 и часть III)

В наши дни широко известно, что автоколебательные системы, например, нелинейные электронные цепи, могут генерировать довольно сложные, **хаотические** сигналы. Многие естественные системы также демонстрируют сложное поведение. Недавние исследования

показывают, что при наличии связи такие системы также могут синхронизоваться. Конечно же, в этом случае нам необходимо уточнить понятие синхронизации, потому что совершенно не очевидно, как характеризовать ритм хаотического осциллятора. Здесь нам поможет то, что иногда хаотические сигналы относительно просты, как, например, показанный на рис. 1.16. Такой сигнал – «почти периодический»; мы можем считать, что он состоит из похожих циклов с изменяющейся амплитудой и периодом (который может быть грубо определен как интервал между соседними максимумами). Выбрав большой интервал времени τ , мы можем сосчитать число циклов в этом интервале N_τ , вычислить **среднюю частоту**

$$\langle f \rangle = \frac{N_\tau}{\tau}$$

и взять ее в качестве характеристики хаотического колебательного процесса.

С помощью средних частот мы можем описать коллективное поведение взаимодействующих хаотических систем точно так же, как и периодических. Если связь достаточно велика (например, для рези-

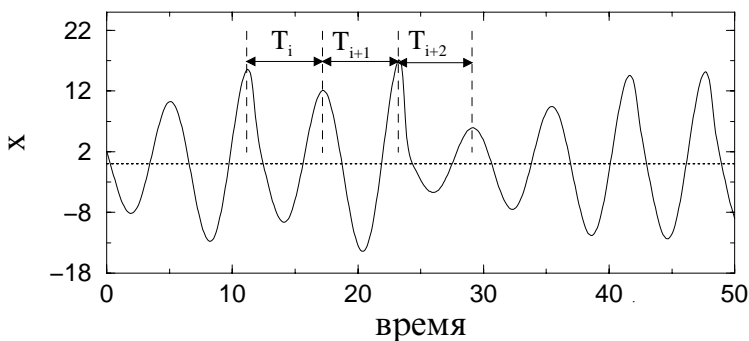


Рис. 1.16. Пример хаотических колебаний, полученных моделированием системы Рёсслера (она может рассматриваться в качестве модели обобщенной химической реакции) [Rössler 1976]. (Система Рёсслера, так же как и другие динамические модели, обсуждаемые в данной книге (например, модели Лоренца и Ван-дер-Поля), обычно записывается в безразмерном виде. Поэтому на рис. 1.15, 1.16 и многих других рисунках в книге как время, так и зависящая от него переменная безразмерны.) Интервал времени между соседними максимумами нерегулярно меняется от цикла к циклу, $T_i \neq T_{i+1} \neq T_{i+2}$, также как и высота максимумов (амплитуда). Хотя варибельность T_i в данном конкретном случае едва видна, в общем случае она может быть довольно большой; поэтому мы характеризуем ритм усредненной величиной – средней частотой.

ственно связанных электрических цепей это означает, что сопротивление должно быть достаточно мало), средние частоты двух осцилляторов становятся равными и может быть получена зависимость, как на рис. 1.10. Важно отметить, что совпадение средних частот не означает, что сигналы также совпадают. Оказывается, что слабая связь не оказывает влияния на хаотическую природу обоих осцилляторов; их амплитуды остаются нерегулярными и некоррелированными, в то время как частоты подстраиваются таким образом, что мы можем говорить о фазовом сдвиге между сигналами (см. рис. 1.17с и ср. его

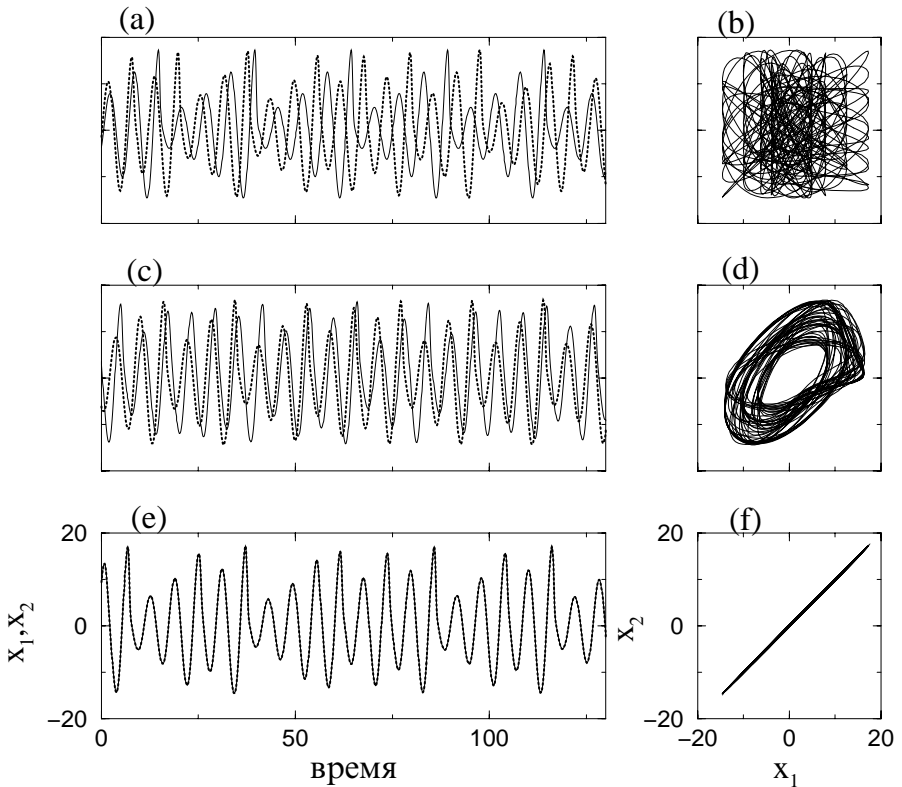


Рис. 1.17. На (а) показаны два хаотических сигнала x_1 , x_2 , генерируемых несвязанными неидентичными системами. На изображенном интервале времени они имеют, соответственно, 21 и 22 максимума. Введение связи между осцилляторами подстраивает их частоты, хотя амплитуды остаются различными (с). Зависимость x_1 от x_2 (d) демонстрирует теперь кольцевую структуру, типичную для случая двух сигналов с одинаковыми частотами и постоянным фазовым сдвигом (ср. с (b), где никакой структуры не видно). Сильная связь делает сигналы почти идентичными ((e) и (f)).

с рис. 1.11а). Такой режим называется **фазовой синхронизацией хаотических систем**.

Очень сильная связь стремится сделать состояния обоих осцилляторов идентичными. Она влияет не только на средние частоты, но также и на хаотические амплитуды. В результате, сигналы совпадают (или почти совпадают) и наступает режим **полной синхронизации** (рис. 1.17е,ф).

Явление синхронизации может также наблюдаться в больших ансамблях взаимно связанных хаотических систем и в сформированных ими пространственных структурах. Эти эффекты также обсуждаются в книге.

Что еще есть в книге

Релаксационные осцилляторы (разделы 2.4.2, 3.3 и 8.3)

Достаточно часто форма колебаний весьма далека от синусоидальной. Многие осцилляторы демонстрируют чередование эпох «молчания» и быстрой активности; примерами могут быть сокращения сердца и генерация потенциалов действия нейронами (спайкинг – от английского spiking). Такие системы называются **релаксационными осцилляторами**, и популярной моделью является **осциллятор «накопление – сброс»** (по-английски integrate-and-fire). Понимание синхронизации таких систем важно, например, в контексте исследования поведения ансамблей нейронов или в кардиологии (взаимодействие первичного и вторичного пейсмекеров сердца).

Ротаторы (разделы 4.1.8 и 7.4)

Механические системы с вращающимися элементами представляют особый класс объектов, способных к синхронизации. Электрическим аналогом ротаторов являются сверхпроводящие контакты Джозефсона. Синхронизация таких систем играет важную роль в инженерных приложениях.

Шум (раздел 3.4, глава 9)

Периодические осцилляторы – это идеализированные модели естественных систем. Реальные системы не могут считаться идеально изолированными от окружающей среды и, следовательно, всегда подвержены нерегулярным возмущениям. Кроме того, внутренние параметры осциллирующих объектов слегка изменяются, например из-за тепловых флуктуаций. Поэтому, чтобы оставаться близкими к реальности, мы должны изучать свойства синхронизации в присутствии шума.

Выявление синхронизации по данным (глава 6)

Отдельно стоящей проблемой является экспериментальное исследование осцилляторов, которые, возможно, связаны между собой. Весьма часто, особенно в биологических и геофизических приложениях, измеряемые сигналы имеют гораздо более сложную форму, чем периодическое движение маятника часов, и просто наблюдение может оказаться недостаточным: чтобы выявить синхронизацию, требуются специальные методы анализа данных. Более того, часто мы не имеем доступа к параметрам систем и связи, а можем только наблюдать колебания. Например, человеческий организм содержит несколько осцилляторов, таких как ритмически сокращающееся сердце и система дыхания. В отличие от описанного мысленного эксперимента с часами, подстраивать эти системы или связь между ними невозможно (или, по крайней мере, очень сложно). Единственный способ обнаружить взаимодействие – это анализировать колебания, зарегистрированные в естественных условиях.

1.3.1 Терминологические замечания

Представляется важным определить словарь теории синхронизации. Действительно, толкование таких основных терминов как *синхронизация* и *захват* различается в зависимости от специализации, индивидуальных точек зрения и вкуса исследователя. Чтобы избежать неоднозначности, мы обговорим здесь как *мы* понимаем эти термины.

Мы подчеркиваем, что мы не предлагаем какого-либо общего определения *синхронизации*, которое включало бы все эффекты во взаимодействующих колебательных системах. Мы понимаем синхронизацию как подстройку ритмов за счет взаимодействия, и мы уточняем это понятие в конкретных случаях, например, при рассмотрении зашумленных или хаотических осцилляторов. В общем случае мы не ограничиваем явление полным совпадением сигналов, как это иногда делается.

Мы не предполагаем различного значения английских терминов *locking* и *entrainment*; в качестве русского эквивалента мы используем слово *захват*. Подчеркнем, что мы понимаем захват фаз *не как равенство фаз*, а в более широком смысле, допуская также постоянный фазовый сдвиг и (малые) флуктуации разности фаз. Так, мы говорим, что фазы ϕ_1 и ϕ_2 захвачены в отношении $n : m$, если выполняется неравенство $|n\phi_1 - m\phi_2| < \text{constant}$.

При рассмотрении взаимодействия хаотических систем мы различаем несколько стадий синхронизации. В этом контексте термин *фазовая синхронизация* (*phase synchronization*) используется для обозначения такого состояния, при котором устанавливается только соотношение между фазами взаимодействующих систем, в то время как амплитуды остаются хаотическими и могут быть практически некоррелированными. Это состояние, как и в случае периодических колебаний, может быть описано в терминах захвата фаз и частот, и слова «фазовая синхронизация» используются лишь для того, чтобы отличить этот режим от *полной синхронизации*, когда хаотические процессы становятся идентичными. Последнее состояние называют также идентичной (*complete, full, identical*) синхронизацией.

Подчеркнем, что «осциллятор», если не сказано явно иначе, означает автоколебательную систему. (В английском используются прилагательные *self-sustained, self-oscillatory* или *autonomous*). Предельным циклом мы, в соответствии с основным объектом нашего интереса, называем только аттрактор автоколебательной системы, но не системы с периодически действующей силой.

1.4 Основная библиография

Здесь мы приводим ссылки лишь на некоторые книги и обзоры. Этот список, конечно, не полон, потому что описание явления синхронизации может быть найдено во многих монографиях и учебниках.

Единственные книги, целиком посвященные проблемам синхронизации, – это книги И. И. Блехмана [1971; 1981]; они в первую очередь рассматривают механические осцилляторы, в частности, маятниковые часы, системы с вращающимися элементами, технологическое оборудование, но также некоторые электронные и квантовые генераторы, химические и биологические системы.

Краткое и популярное введение в проблему может быть найдено в [Strogatz and Stewart 1993]. Введение в теорию синхронизации, иллюстрированное разнообразными биологическими примерами дано в [Winfrey 1980; Гласс и Мэки 1988; Glass 2001].

Теория синхронизации автоколебательных систем гармонической силой в присутствии шума была разработана Р. Л. Стратоновичем [1963]. Влияние шума на взаимную синхронизацию двух осцилляторов, синхронизация силой с флуктуирующими параметрами и другие проблемы были описаны А. Н. Малаховым [1968].

Различные аспекты синхронизации исследованы в монографии П. С. Ланда [1980]: синхронизация автоколебательной системы внеш-

ней силой, взаимная синхронизация двух, трех и многих осцилляторов, влияние шума на синхронизацию и захват осциллятора узкополосным шумом, синхронизация релаксационных осцилляторов.

И. Курамото [Kuramoto 1984] разработал метод фазового приближения, который допускает универсальное описание слабо связанных осцилляторов. В его книге также приводятся описания синхронизации в больших ансамблях и синхронизации распределенных систем (сред). Некоторые аспекты синхронизации пространственно распределенных систем, формирование синхронных кластеров за счет влияния флуктуаций, синхронизация глобально (каждый с каждым) связанных осцилляторов обсуждены в монографиях [Романовский и др. 1975, 1984]; основное внимание в них уделено химическим и биологическим приложениям. Эффекты синхронизации в лазерах описаны в книге [Siegman 1986].

Синхронизации хаотических систем посвящены главы в книгах Неймарка и Ланда [1987] и Анищенко [1995]. Упомянем также сборник статей и обзоров [Schuster (ed.) 1999], а также специальные журнальные выпуски [Pecora (ed.) 1997; Kurths (ed.) 2000].

Мы предполагаем, что читатель второй и третьей частей этой книги знаком с основами нелинейной науки. Если это не так, то в качестве вводного чтения по теории колебаний и нелинейной динамике мы рекомендуем следующие книги: [Андронов и др. 1937; Теодорчик 1952; Боголюбов и Митропольский 1961; Хаяси 1964; Найфэ 1979; Guckenheimer and Holmes 1986; Бутенин и др. 1987; Рабинович и Трубецков 1989; Glendinning 1994; Strogatz 1994; Ланда 1996]. В частности, книги [Рабинович и Трубецков 1989; Ланда 1996] содержат главы, освещающие основные проблемы теории синхронизации.

Читатель, желающий больше узнать о хаотических колебаниях, имеет богатый выбор, от книг для первого чтения [Мун 1987; Peitgen *et al.* 1992; Tufillaro *et al.* 1992; Lorenz 1993; Hilborn 1994; Strogatz 1994; Baker and Gollub 1996; Кузнецов 2001] и до книг, рассчитанных на специалистов [Guckenheimer and Holmes 1986; Неймарк и Ланда 1987; Шустер 1988; Wiggins 1988; Devaney 1989; Wiggins 1990; Lichtenberg and Lieberman 1992; Ott 1992; Argyris *et al.* 1994; Alligood *et al.* 1997].

Глава 2

Основные понятия: автоколебательная система и ее фаза

В этой главе мы уточняем понятие автоколебательной системы, кратко обсужденное во введении. Мы показываем, что такие системы широко распространены в природе и технике, и вводим их универсальное описание в фазовом пространстве и их универсальный образ – предельный цикл. Далее мы обсуждаем понятие и свойства фазы – переменной, играющей первостепенную роль в объяснении явления синхронизации. В заключение, мы рассматриваем несколько простых примеров автоколебательных систем, а также контрпримеры. Таким образом мы проиллюстрируем те свойства автоколебаний, которые отличают их от вынужденных колебаний и колебаний в консервативных системах; в следующих главах мы покажем, что именно эти свойства объясняют возникновение синхронизации. Наше изложение не будет полным и систематическим введением в теорию автоколебаний: мы остановимся только на основных аспектах, важных для понимания синхронизации.

Понятие **автоколебательных систем** было введено А. А. Андроновым и А. А. Виттом [Андронов и др. 1937]. Хотя уже Рэлей различал самоподдерживаемые и вынужденные колебания и А. Пуанкаре ввел понятие **предельного цикла**, именно Андронов и Витт свели вместе строгие математические методы и физические идеи. Автоколебательные системы являются подмножеством более широкого класса **динамических систем**. Последнее понятие означает, что мы рассматриваем детерминированные движения, т.е., если мы

знаем состояние системы в некоторый момент времени, то мы можем однозначно предсказать ее состояние в будущем. Динамические системы – это идеализированные модели, которые не учитывают естественные флуктуации параметров системы и другие источники шума, неизбежного в объектах реального мира, а также квантовую неопределенность микроскопических систем. В 30-ых годах 20-го века были известны только периодические автоколебания. В наши дни широко известны также нерегулярные, **хаотические** автоколебательные системы; их рассмотрение мы отложим до главы 5.

2.1 Автоколебательные системы: математические модели естественных осцилляторов

2.1.1 Автоколебательные системы типичны в природе

Что общего у таких разных осцилляторов как генератор радиочастоты на электронной лампе, маятниковые часы, светлячок, испускающий импульсы света, сокращающееся сердце человека и многие другие системы? Основное универсальное свойство состоит в том, что все это – активные системы, и, если их изолировать от окружающей среды, то они будут продолжать генерировать колебания в своем собственном ритме. Этот ритм полностью определяется свойствами самой системы; он поддерживается благодаря внутреннему источнику энергии, который компенсирует *диссипацию* в системе. Такие осцилляторы называются *автономными* и описываются классом *нелинейных* моделей, известных в физике и нелинейной динамике как **автоколебательные** системы.¹

Довольно часто мы можем проверить, является ли система автоколебательной, если мы изолируем ее от окружающей среды и убедимся, что она продолжает осциллировать. Так, можно изолировать светлячка (или сверчка) от других насекомых, поместив его в условия с постоянной температурой, освещенностью и т.д., и увидеть, что, даже в одиночестве, он все равно ритмически испускает

¹ В радиофизике, электро- и радиотехнике термин «генератор» традиционно используется как синоним автоколебательной системы. В дальнейшем, если не сказано явно иначе, мы используем слово «осциллятор» как короткую замену словам «автоколебательная система». См. также терминологические замечания в разделе 1.3.1.

вспышки (короткие звуки). Можно изолировать растение, животное или человека-добровольца и установить, что они по-прежнему демонстрируют ритмы суточной активности. Подобные эксперименты, проведенные многими исследователями после де Мэрана², четко показали, что циркадные ритмы существуют и в отсутствие внешних возмущений суточной периодичности. Следовательно, эти ритмы генерируются активной автоколебательной системой – биологическими часами – и этим отличаются от другого процесса с той же периодичностью – приливных волн. Приливы вызваны суточными изменениями гравитационных сил из-за Луны. Хотя мы и не можем изолировать океан от этого воздействия, механизм возникновения приливных волн хорошо известен, и мы знаем, что океан – это не автоколебательная система; эти колебания исчезли бы в отсутствие периодической силы, т.е. если бы не было Луны.

Ниже мы без дальнейшего обсуждения будем рассматривать многие естественные ритмы, например, физиологические, как автоколебания. Основанием для этого является то, что системы, генерирующие эти ритмы, – непременно диссипативные, и, следовательно, продолжительные ритмические процессы в них могут поддерживаться только за счет некоторого источника энергии. Тогда, если ясно, что эти системы автономные, то мы делаем вывод, что они автоколебательные.

2.1.2 Геометрический образ периодических автоколебаний: предельный цикл

Универсальное явление автоколебаний допускает единое описание, которое мы вкратце излагаем ниже. Предположим, что мы наблюдаем осциллятор, генерирующий на выходе периодический процесс; обозначим значение этого процесса $x(t)$. В частности, $x(t)$ может иметь смысл углового отклонения маятника часов, или электрического тока через сопротивление генератора на электронной лампе, или интенсивности света в лазерах, или любой другой колебательной величины. Предположим, что мы хотим описать состояние осциллятора в некоторый момент времени. Знания x для этого недостаточно: действительно, для того же x процесс может как возрастать, так и убывать. Следовательно, чтобы однозначно определить состояние

² См. историческое введение в разделе 1.1.

системы, нам необходимо большее число переменных.³ Довольно часто двух переменных, x и y , бывает достаточно, и мы ограничимся сейчас этим простейшим случаем. Для маятниковых часов этими переменными могут быть, например, угол отклонения маятника от вертикали и угловая скорость. Таким образом, поведение системы может быть полностью описано эволюцией во времени двух величин (x, y) (рис. 2.1). Эти переменные называются координатами в **фазовом пространстве** (пространстве состояний) и зависимость $y(t)$ от $x(t)$ называется *фазовым портретом* системы; точка с координатами (x, y) часто называется *фазовой точкой*. Если колебания периодические, т.е. они повторяются через период T , $x(t)$ соответствует *замкнутой кривой* на фазовой плоскости, называемой **предельным циклом** (рис. 2.2).

³ Число необходимых переменных зависит от конкретной системы и называется ее размерностью.

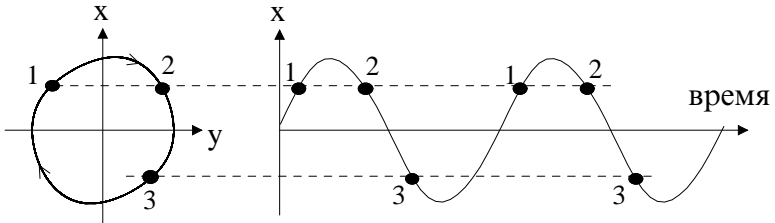


Рис. 2.1. Периодические колебания представлены замкнутой кривой в фазовом пространстве системы: эквивалентные состояния $x(t)$ и $x(t+T)$ (обозначенные цифрами на зависимости от времени) соответствуют одной и той же точке на этой кривой (обозначенной одной и той же цифрой). Наоборот, состояния с одинаковым $x(t)$ различаются, если принять в рассмотрение вторую координату.

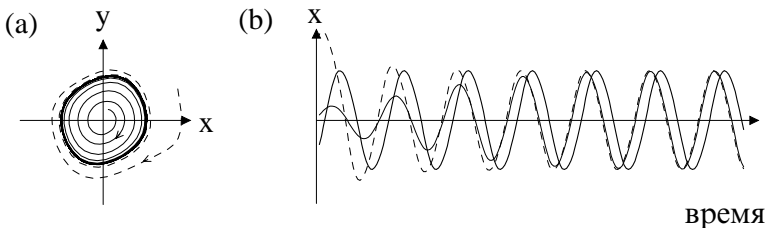


Рис. 2.2. (а) Замкнутая кривая (жирная линия) на фазовой плоскости притягивает все траектории из своей окрестности и поэтому называется **предельным циклом**. Те же траектории показаны в (b) как зависимости от времени.

Чтобы понять происхождение термина «предельный цикл», попробуем выявить, чем он отличается от всех других траекторий на фазовой плоскости. Для этой цели рассмотрим поведение траекторий в окрестности цикла. Другими словами, посмотрим, что произойдет, если точку столкнуть с предельного цикла. Для исходной физической (или механической, биологической и т.д.) системы это будет означать, что мы каким-либо образом возмущили ее периодическое движение. Мы пришли к важному свойству автоколебательных систем: после возмущения их колебаний они восстанавливают оригинальный ритм, т.е. фазовая точка возвращается на предельный цикл. Это свойство также означает, что автоколебания не зависят от начальных условий (по крайней мере, в некоторой области) или от того, как именно возникло движение в системе. В представлении на фазовой плоскости это соответствует тому, что мы изначально помещаем фазовую точку куда-нибудь на плоскость. Мы видим из рис. 2.2, что все траектории стремятся к циклу. Следовательно, после некоторого переходного процесса в системе устанавливаются стационарные колебания, соответствующие движению фазовой точки вдоль предельного цикла.⁴

Итак, причина, по которой мы выделяем эту кривую из всех других, в том, что она притягивает фазовые траектории;⁵ из-за этого свойства она называется **аттрактором** динамической системы. Предельный цикл – это простой аттрактор, в противоположность **странным (хаотическим) аттракторам**, которые встретятся нам далее.⁶

Подводя итоги, можно сказать, что автоколебания могут быть описаны с помощью их образа в фазовом пространстве – предельного цикла. Форма цикла, а, следовательно, и форма колебаний полно-

⁴ Строго говоря, предельный цикл может быть не плоским, так что для описания периодических колебаний в общем случае необходимо фазовое пространство большей размерности. Тем не менее, весьма часто это пространство может быть сведено к фазовой плоскости, т.е. двух переменных достаточно. Анализ *переходного* поведения, например, возмущения движения по предельному циклу, может требовать многих или даже бесконечного числа переменных. Так как основные свойства автоколебаний могут быть адекватно проиллюстрированы в двумерном пространстве, то мы ограничимся здесь этим случаем.

⁵ По крайней мере из некоторой окрестности.

⁶ Система может иметь более одного аттрактора, каждый из которых имеет свою область притяжения, например, несколько предельных циклов или предельный цикл и устойчивое положение равновесия. Разные области притяжения разделены отталкивающими множествами (кривыми или поверхностями) – *репеллерами*.

стью определяется внутренними параметрами системы. Если колебания близки по форме к синусоиде, то такой осциллятор называют *квазилинейным* (квазигармоническим). В этом случае предельный цикл может быть представлен окружностью. Сильнонелинейные системы демонстрируют колебания сложной формы; в дальнейшем мы рассмотрим соответствующие примеры.

2.2 Фаза: определение и свойства

Понятие фазы играет ключевую роль в теории синхронизации, поэтому мы хотим детально его обсудить. Мы начинаем с простого случая квазилинейных осцилляторов, для которых понятие фазы (и амплитуды) может быть легко проиллюстрировано. Этот пример объясняет основные свойства фазы, независимые от формы предельного цикла. Мы завершаем этот раздел демонстрацией того, как фаза может быть определена для произвольного цикла.

2.2.1 Фаза и амплитуда квазилинейного осциллятора

Предельный цикл квазилинейного осциллятора близок к окружности, а сами колебания могут считаться синусоидальными, $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$. Здесь ω_0 означает *угловую частоту*, которая соотносится с периодом колебаний как $\omega_0 = 2\pi/T$; ее следует отличать от частоты колебаний $f_0 = 1/T$. Интенсивность колебаний определяется их **амплитудой** A , а величина $\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$ называется **фазой** (см. рис. 1.12).

Прежде всего мы хотим подчеркнуть, что термин «фаза» имеет в физике и нелинейной динамике несколько значений. Так, например, мы уже встречались с понятием «фазового пространства». Координаты в этом пространстве часто обозначают «фазовой точкой», и эволюция системы во времени описывается движением этой точки. Здесь, также как и в выражении «фазовый переход», значение слова «фаза» абсолютно отличается от того, что мы понимаем под словами «фаза колебаний». Мы надеемся, что в этой книге точный смысл будет всегда понятен из контекста.

Фаза колебаний $\phi(t)$ нарастает без ограничения, но, так как синус – периодическая функция, $\sin \phi = \sin(\phi + 2\pi)$, то две фазы, отличающиеся на 2π , соответствуют одному и тому же физическому состоянию. Иногда для удобства мы рассматриваем циклическую

фазу, определенную на окружности, т.е. изменяющуюся от 0 до 2π ; мы используем те же обозначения для обоих случаев и надеемся, что это не затруднит понимания.

Мы еще не обсудили член ϕ_0 , который можно считать *начальной фазой*. Мы уже знаем, что, когда автоколебательная система «включается», после некоторого переходного процесса она выходит на предельный цикл независимо от своего начального состояния. Это означает, что амплитуда колебаний не зависит от начальных условий. Начальная же фаза ϕ_0 , наоборот, зависит от перехода к окончательному состоянию, и может быть произвольной, т.е. все значения ϕ_0 эквивалентны. Действительно, если мы будем рассматривать только установившиеся, стационарные, колебания, то мы всегда можем изменить начальную фазу, выбрав какую-либо другую точку отсчета времени $t = 0$ для наблюдений.

Понятия фазы и амплитуды могут быть легко интерпретированы, если мы воспользуемся изображением предельного цикла на рис. 2.3а; они есть не что иное как полярные координаты точки на фазовой плоскости.⁷ Эта точка вращается, например, против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0 , так что за один период T колебаний она совершает один оборот и фаза $\phi(t)$ возрастает на 2π .

⁷ Напомним, что предельный цикл квазилинейного осциллятора близок к окружности.

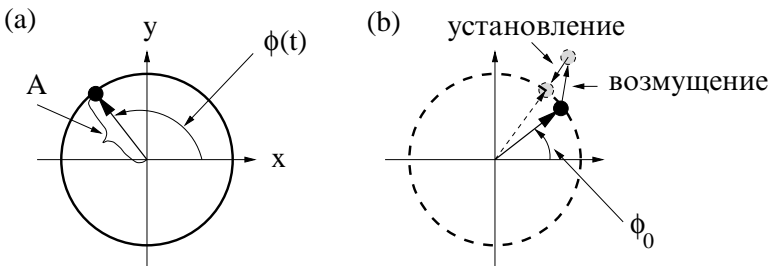


Рис. 2.3. (а) Стационарные автоколебания описываются вращением фазовой точки по предельному циклу. Полярные координаты этой точки соответствуют фазе $\phi(t)$ и амплитуде A колебаний. (б) Во вращающейся системе координат стационарным колебаниям соответствует покоящаяся точка, показанная черным кружком. Если отклонить точку от предельного цикла, то возмущения амплитуды затухают, в то время как возмущения фазы остаются; возмущенное состояние и состояние после затухания возмущения показаны серыми кружками.

2.2.2 Амплитуда устойчива, фаза свободна

Приступим к обсуждению важнейшего вопроса об устойчивости фазовой точки на предельном цикле. Другими словами, нас интересует, что будет с колебаниями, если мы слегка возмутим движение.

Для удобства будем теперь анализировать поведение осциллятора в системе координат, вращающейся против часовой стрелки с такой же угловой скоростью ω_0 , что и фазовая точка в исходных координатах. С точки зрения наблюдателя в новой системе отсчета фазовая точка остается неподвижной, т.е. стационарные колебания соответствуют покоящейся точке, имеющей координаты $\phi(t) - \omega_0 t = \phi_0$ и A (рис. 2.3b).

Предположим теперь, что колебания возмущены. Мы можем описать это смещением точки с предельного цикла (рис. 2.3b). Как будет эволюционировать такое возмущение? Как мы уже знаем, возмуще-

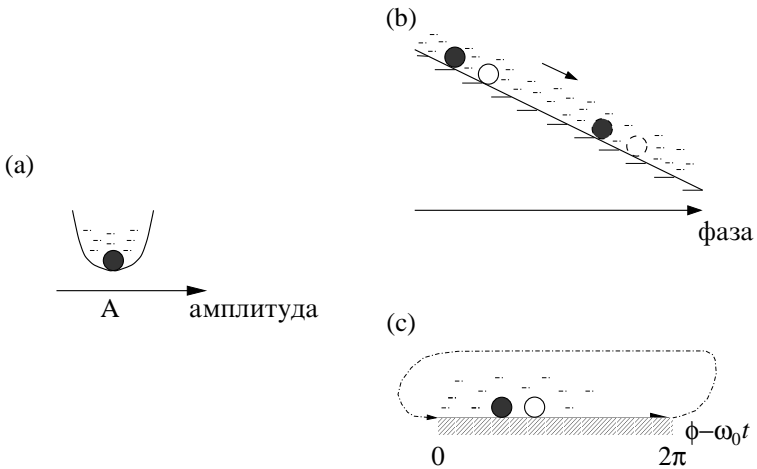


Рис. 2.4. Устойчивость точки на предельном цикле, проиллюстрированная динамикой легкой частицы в вязкой жидкости. (a) В направлении, перпендикулярном к циклу, точка находится в состоянии устойчивого равновесия: возмущения амплитуды быстро затухают, стремясь к устойчивому значению A . (b) Возмущения вдоль цикла, т.е. по фазе, не возрастают и не убывают. Постоянный рост фазы может быть представлен скольжением частицы вниз по наклонной плоскости. Две такие частицы, соответствующие невозмущенной и возмущенной фазам (символы \bullet и \circ), скользят с постоянной задержкой друг относительно друга. (c) Во вращающейся (со скоростью ω_0) системе отсчета фаза постоянна (см. также обсуждение в разделе 3.1). Это соответствует частице на горизонтальной плоскости, т.е. находящейся в состоянии безразличного равновесия. Пунктирная линия напоминает, что фаза — это 2π -периодичная переменная.

ние амплитуды затухает (см. рис. 2.2b). Что касается фазы, то ее возмущение *не возрастает и не убывает*: действительно, т.к. все значения ϕ_0 эквивалентны, то, если начальная фаза была изменена с ϕ_0 на ϕ_1 , то она сохраняет это значение до тех пор, пока система не будет вновь подвергнута возмущению.

Проиллюстрируем устойчивость автоколебаний с помощью аналогии между движением фазовой точки и движением легкой частицы в вязкой среде. При действии силы на такую частицу она движется с постоянной скоростью. Если действие прекращается, то частица останавливается и сохраняет свое положение.⁸ Динамика амплитуды может быть представлена частицей в U-образном потенциале (рис. 2.4a). Минимум потенциала соответствует амплитуде A невозмущенных колебаний, так что по отношению к радиальным возмущениям точка на предельном цикле находится в состоянии устойчивого равновесия.

Рассмотрим теперь изменение фазы, т.е. смещение только вдоль цикла. Какого-либо предпочтительного значения для фазы не существует, поэтому ее динамика может быть проиллюстрирована частицей на плоскости (рис. 2.4b,c). Такая частица находится в состоянии *безразличного равновесия*. Она остается в покое, пока возмущающая сила не передвинет ее в новое положение. Очень важно, что частица может быть сдвинута бесконечно малой силой, но, конечно, в этом случае и скорость будет бесконечно мала. Основное следствие этого факта состоит в том, что *фаза может быть очень легко подстроена внешним воздействием, и, в результате, осциллятор может быть синхронизован!*

2.2.3 Общий случай: предельный цикл произвольной формы

Обсудим теперь, как фаза может быть введена для предельного цикла произвольной, в общем случае некруглой формы (рис. 2.5). Предположим, что периодическое движение имеет период T . Начиная при $t = t_0$ с произвольной точки на цикле, определим фазу как величину, пропорциональную доле периода

$$\phi(t) = \phi_0 + 2\pi \frac{t - t_0}{T}. \quad (2.1)$$

⁸ Если масса частицы пренебрежимо мала, то постоянная сила вызывает постоянную скорость, а не постоянное ускорение. Такая динамика часто называется передемпфированной.

Тогда фаза монотонно возрастает при движении фазовой точки по траектории, и каждый оборот точки вокруг цикла соответствует

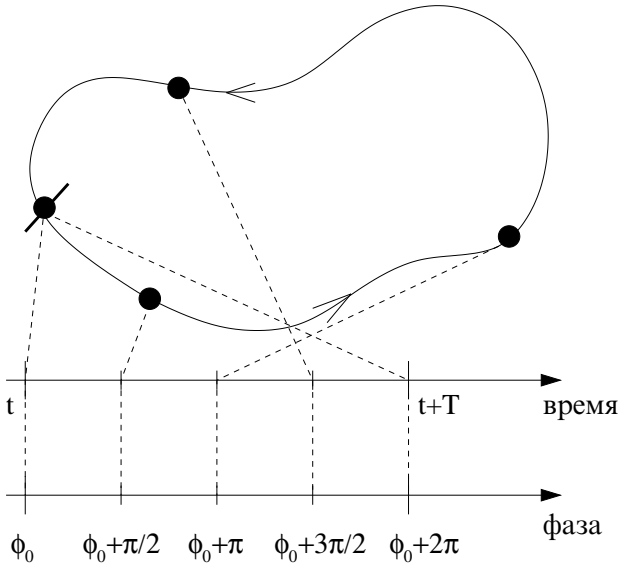


Рис. 2.5. Определение фазы автоколебательной системы с предельным циклом произвольной формы. Фаза параметризует движение точки вдоль цикла и может пониматься как доля периода колебаний T . Фаза – циклическая переменная: значения ϕ и $\phi + 2\pi k$ – эквивалентны. Начальная фаза ϕ_0 (показана отрезком жирной линии, перпендикулярным к циклу) может быть выбрана произвольно. Отметим, что движение точки вдоль цикла в общем случае неравномерно.

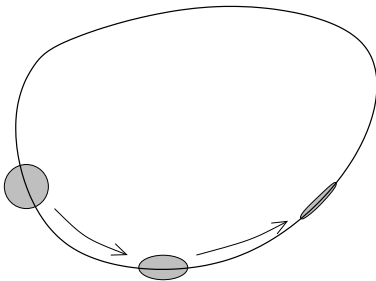


Рис. 2.6. Схождение и разбегание траекторий характеризуются ляпуновскими показателями. Предположим, что мы рассматриваем облако начальных условий вокруг некоторой точки на предельном цикле (серый круг). Этот фазовый объем уменьшается с эволюцией, приобретая эллиптическую форму. Это соответствует отрицательному ляпуновскому показателю в поперечном к циклу направлении и нулевому ляпуновскому показателю в касательном направлении.

приросту фазы 2π . Под амплитудой можно понимать переменную, которая характеризует отклонения траектории в направлении, перпендикулярном к циклу. Подчеркнем, что движение точки вдоль цикла может быть неравномерным. Более того, может случиться, что интервалы относительно медленного движения перемежаются с быстрыми прыжками точки вдоль цикла. Системы с такими циклами называются *релаксационными осцилляторами*; они рассматриваются в разделе 2.4.2. Важно подчеркнуть, что, хотя движение точки по фазовой плоскости может быть неравномерным, рост фазы во времени всегда равномерен.

Особо отметим, что свойства, описанные нами для квазилинейного осциллятора, остаются справедливыми для любых периодических автоколебаний. Независимо от его формы, предельный цикл устойчив в поперечном направлении, в то время как в касательном направлении фазовая точка ни устойчива, ни неустойчива.

Если мы рассмотрим две траектории фазового пространства, одну невозмущенную и одну возмущенную, то мы увидим, что в радиальном направлении они сходятся, в то время как в направлении вдоль цикла они ни сходятся, ни расходятся. В терминах нелинейной динамики свойства сближения/разбегания близких траекторий характеризуются **показателем Ляпунова**. Сближение траекторий вдоль некоторого направления фазового пространства соответствует отрицательному ляпуновскому показателю (рис. 2.6). Абсолютное значение этого показателя характеризует скорость схождения. Аналогично, разбегание траекторий (мы столкнемся с этим свойством позже, при изучении хаотических осцилляторов в разделе 5.1) характеризуется положительным показателем. Наконец, нейтральное направление (нет сближения и нет разбегания) соответствует нулевому ляпуновскому показателю. Наиболее важный вывод, который используется при теоретическом рассмотрении в части II, состоит в том, что **фаза осциллятора может рассматриваться как переменная, соответствующая нулевому ляпуновскому показателю**.

2.3 Автоколебательная система: основные свойства

Автоколебания – это незатухающие устойчивые колебания в автономной диссипативной системе. В этом разделе мы сравниваем такие системы с консервативными, а также автоколебания с вынужден-

ными, и подчеркиваем различие между ними. Цель этого сравнения – продемонстрировать важность концепции автоколебаний для адекватного описания многих природных явлений, и синхронизации в частности. Мы также аргументируем, почему автоколебания возможны только в нелинейных системах.

2.3.1 Диссипация, устойчивость и нелинейность

Диссипация

Макроскопические естественные системы отдают свою энергию. Это происходит, например, из-за механического трения в подвесе маятника, из-за электрического сопротивления, или же из-за других механизмов необратимого преобразования энергии системы в тепло. Таким образом, исключая из рассмотрения примеры типа планетных систем (где диссипацией, по-видимому, можно пренебречь) или колебаний молекул (которые описываются законами квантовой механики), мы всегда должны учитывать, что без постоянного притока энергии в систему колебания затухнут. Следовательно, автоколебательные системы должны обладать *внутренним источником энергии*. В маятниковых часах колебания поддерживаются за счет потенциальной энергии поднятого груза или сжатой пружины. Современные часы, а также генератор на электронной лампе или другой электронный генератор черпают необходимую энергию из некоторого электрического источника питания. Ритмичное сокращение сердечной мышцы или излучение световых импульсов светлячками происходит за счет химических реакций в этих системах.

Устойчивость

Свойство устойчивости колебаний по отношению к возмущениям также отличает автоколебания от колебаний в консервативных системах. Периодические движения в консервативных системах могут быть описаны семейством замкнутых кривых на фазовой плоскости (рис. 2.7а). Действительно, в этих системах нет ни потери, ни восполнения энергии, поэтому если бы движение системы было бы изменено неким возмущением, то она осталась бы в возмущенном состоянии. Соответственно, измененное значение амплитуды будет сохранено. Другими словами, консервативная периодическая система не «забывает» начальные условия. Следовательно, периодические колебания в таких системах зависят от того, как именно было инициировано

движение.⁹

В качестве иллюстрации упомянем хорошо известную в динамике популяций модель Лотки–Вольтерра. Она была предложена для объяснения колебаний численности видов в системе хищник–жертва (пример колебаний числа зайцев и рысей показан на рис. 1.14). Эта нелинейная модель консервативна, и, следовательно, не может описать устойчивые колебания и синхронизацию нескольких взаимодействующих популяций. Это может быть сделано с помощью модифицированных моделей Лотки–Вольтерра, являющихся автоколебательными.

Нелинейность

Нелинейность также существенна для поддержания устойчивых колебаний, описываемых предельным циклом. Устойчивость означает, что существуют только периодические движения с определенной амплитудой. Такое невозможно в моделях, описываемых линейными уравнениями: если решение $x(t)$ линейной системы – периодическое, то для любого числа a , $a \cdot x(t)$ – тоже периодическое решение. Следовательно, линейная система, демонстрирующая периодические колебания, необходимо является консервативной (см. рис. 2.7а). Ли-

⁹ На математическом языке, свойства диссипации и устойчивости описываются уменьшением начального фазового объема. Действительно, возьмем набор начальных условий, соответствующий облаку точек в фазовом пространстве. В диссипативной системе это облако сжимается с течением времени, и в конце концов становится точкой или линией (см. рис. 2.6). Консервативные системы сохраняют фазовый объем и поэтому они не могут иметь аттракторов.

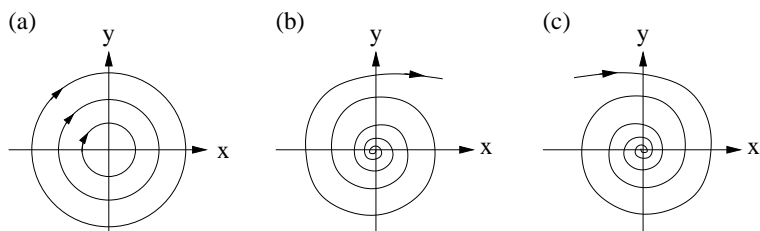


Рис. 2.7. (а) Периодическое движение в консервативной системе может быть представлено семейством замкнутых кривых (они описывают колебания с различными амплитудами и, вообще говоря, не обязательно имеют форму окружности). Фазовый портрет консервативной линейной системы выглядит как на (а); в диссипативной линейной системе возможны, наоборот, только неустойчивые (b) и устойчивые (c) движения.

нейные системы с диссипацией (или с источником энергии) допускают только бесконечно возрастающие или затухающие решения (рис. 2.7b,c), но не движения по предельному циклу.

Установление стационарных автоколебаний математически описывается как притяжение траектории к предельному циклу. Физически это притяжение может быть понято следующим образом. Каков бы ни был конкретный механизм диссипации и подачи энергии, энергия из некоторого источника, обычно неколебательного, преобразуется в колебательное движение. Обычно, чем больше амплитуда колебаний, тем больше потребление энергии от источника. С другой стороны, количество рассеянной энергии также зависит от амплитуды.¹⁰ Эти зависимости определяют амплитуду стационарных колебаний, как показано на рис. 2.8. Если колебаний нет (амплитуда равна нулю), то нет ни потерь энергии, ни потребления энергии от источника; следовательно, обе функции должны проходить через начало координат. Пересечение этих двух кривых определяет амплитуду A стационарных колебаний. В этой точке поступление энергии в точности компенсирует ее потери. Отметим, что две кривые могут пересекаться таким образом и одновременно проходить через начало координат,

¹⁰ Такое рассмотрение справедливо для систем с фазовым портретом типа показанного на рис. 2.2, где траектория по спирали приближается к предельному циклу, так что можно говорить о колебаниях с медленно меняющейся амплитудой.

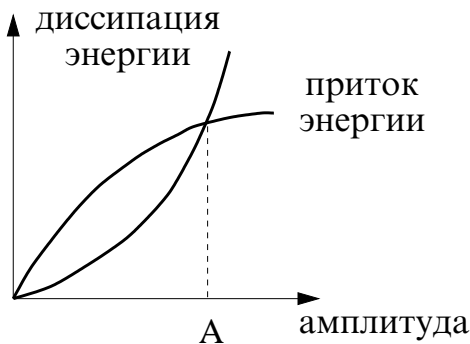


Рис. 2.8. Два противодействующих фактора – диссипация и потребление энергии от источника – определяют амплитуду A стационарных колебаний. В показанном здесь примере амплитуда устойчива: если она возрастет в результате некоторого возмущения, то диссипация начинает доминировать над притоком энергии, и это приводит к уменьшению амплитуды. Аналогично, случайное уменьшение амплитуды приводит к превышению притока энергии над ее потерей, и, следовательно, исходное значение амплитуды A восстанавливается.

только в том случае, если система *нелинейна*, т.е. описывается нелинейными дифференциальными уравнениями.

2.3.2 Автономные системы и системы под действием силы: фаза вынужденных колебаний не свободна!

В этом разделе мы хотим еще раз подчеркнуть различие между автоколебаниями и вынужденными колебаниями. Как автоколебания маятниковых часов (рис. 1.7), так и вынужденные колебания маятника (рис. 1.13) описываются замкнутой кривой в фазовом пространстве, которая притягивает траектории из своей окрестности. Тем не менее, эти кривые имеют важное различие: **фаза на предельном цикле свободна, в то время как фаза на устойчивой замкнутой кривой, соответствующей вынужденным колебаниям, однозначно определяется фазой внешней силы.** Как мы покажем в следующих главах, это решающее различие объясняет тот факт, что автоколебания могут быть синхронизованы, а вынужденные колебания – нет. Это различие можно продемонстрировать, возмущив систему (см. рис. 2.9). Поэтому в дальнейшем, когда мы говорим «осциллятор с предельным циклом», то мы неявно имеем в виду автономную, автоколебательную систему.

В качестве наглядного примера, рассмотрим всем знакомую систему – качели (рис. 2.10а). Алгоритм – как заставить их двигаться – известен каждому: после того, как качели каким-либо образом отклонены от положения равновесия, человек должен приседать, когда они приближаются к одной из точек максимального отклонения, и привставать, когда они проходят через вертикаль. Перемещая свой центр тяжести, человек накачивает энергию в систему; эта энергия компенсирует потери из-за сил трения и, в результате, поддерживает стационарные колебания. Ясно, что источником энергии в данном случае является мышечная энергия, колебательным элементом – маятник переменной длины, а обратная связь осуществляется человеком, который перемещает центр тяжести (и, следовательно, изменяет длину маятника) в подходящий момент времени. Наиболее важно здесь то, что эти движения осуществляются не в соответствии с каким-либо заданным периодическим ритмом, а в соответствии с положением качелей. (Действительно, период свободных колебаний маятника изменяется с амплитудой, и, следовательно, период движений человека также должен изменяться с амплитудой.) Это свойство и

определяет автоколебательный характер системы и ее существенное отличие от «механических качелей» (рис. 2.10b), которые могут рассматриваться как система, совершающая *вынужденные* колебания [Landa and Rosenblum 1993]. Предположим, что механические качели имеют устройство, которое периодически изменяет длину каната. Тогда, если качели хотя бы слегка отклонились от вертикали, то

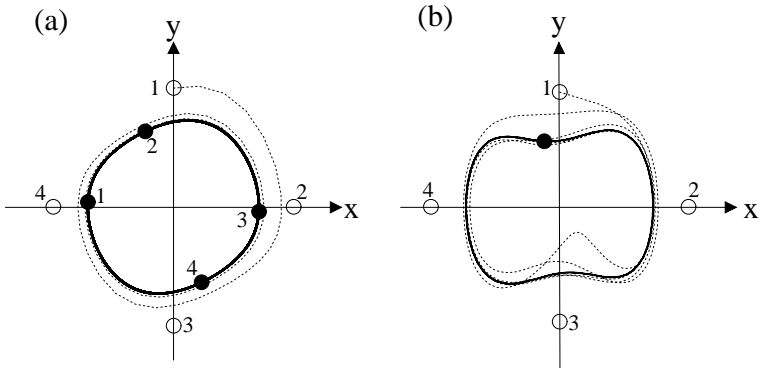


Рис. 2.9. Фаза автоколебаний свободна (а), а фаза системы, совершающей вынужденные колебания, – нет (b). Точка смещена с притягивающей траектории (жирная линия); четыре различных возмущенных состояния показаны символами \circ . Через некоторое время точки возвращаются на аттрактор (символы \bullet). В (а) начальные и соответствующие конечные состояния показаны одними и теми же цифрами; в (b) конечные состояния совпадают; одна из траекторий показана пунктиром. В автоколебательной системе фаза «помнит» начальные условия, и поэтому может быть произвольной. При вынужденных колебаниях, наоборот, фаза стремится к некоторому значению, определяемому внешней силой, и не зависит от начальных условий.

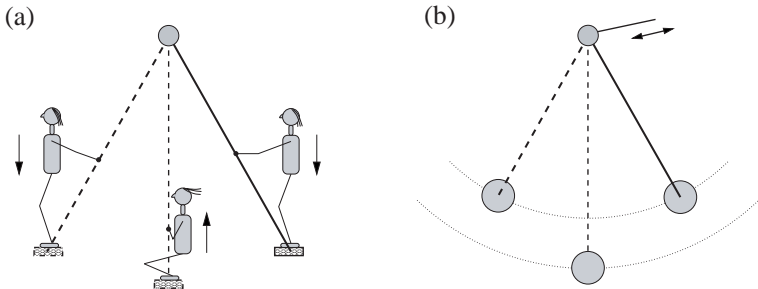


Рис. 2.10. (а) Человек на качелях – это автоколебательная система. (b) Механические качели, длина которых может меняться в соответствии с заданной функцией времени, – это пример системы, совершающей вынужденные колебания.

возникают колебания большой амплитуды (это хорошо известный эффект параметрического возбуждения). При этом маятник находится в вертикальном положении, когда канат имеет минимальную длину, и максимально отклонен, когда канат имеет максимальную длину. На первый взгляд обе системы – автоколебательные и вынуждаемые качели – кажутся весьма схожими. Обе системы демонстрируют возбуждение колебаний, однако между ними есть существенное различие. Это различие можно увидеть, если возмутить движение системы, например, подтолкнуть или притормозить маятники, и пронаблюдать за их положениями через достаточно большое время. Мы увидим, что маятник механических качелей находится в том же положении, в котором он был бы в отсутствие возмущения, в то время как автоколебательные качели могут быть найдены в произвольном положении, зависящем от возмущения (ср. с рис. 2.9). Другими словами, фаза обычных качелей свободна, а фаза механических качелей определяется фазой внешней силы. Поэтому, хотя колебания обеих систем описываются замкнутой кривой на фазовой плоскости,¹¹ мы используем термин «предельный цикл» только в контексте описания автоколебательных систем, таких, как обычные качели со стоящим человеком.

Ниже мы покажем, что именно это свойство фазы – быть свободной – и определяет способность автоколебательных систем к синхронизации. Сравнение двух качелей иллюстрирует важность понятия автоколебаний. Правильно определив механизм возникновения колебаний, мы можем предсказать, возможна синхронизация или нет. Так, двое автоколебательных качелей, подвешенных к общей балке, т.е. слабо связанных, могут синхронизоваться, если их параметры близки. Напротив, качели, раскачиваемые периодическими силами, не синхронизируются.

2.4 Автоколебательные системы: дополнительные примеры и обсуждение

Этот раздел содержит расширенное обсуждение автоколебательных систем. Он может быть пропущен читателем, знакомым с этой темой. С другой стороны, в последующих главах мы будем использовать

¹¹ Точнее говоря, замкнутая кривая вынуждаемой системы есть подходящая проекция трехмерного фазового пространства этой системы, где время является третьей координатой.

модели, описанные в разделе 2.4.2, так что может оказаться необходимым вернуться к этому разделу позже.

2.4.1 Типичная автоколебательная система с контуром обратной связи

Электронные генераторы являются традиционным объектом исследования явления синхронизации. Более того, именно возникновение радиосвязи и электроники стимулировало бурное развитие в изучении синхронизации. Здесь мы рассмотрим систему, состоящую из усилителя, динамика и микрофона (рис. 2.11). Широко известно, что если поднести микрофон близко к динамику, то в системе могут возбудиться автоколебания, которые проявляются громким звуком определенной частоты. Эта система содержит все компоненты, присущие электронным генераторам: усилитель, колебательный контур, цепь обратной связи и источник энергии. Произвольный малый шум, зарегистрированный микрофоном, усиливается и передается динамиком, возвращается на вход усилителя через микрофон и усиливается снова. Этот процесс продолжается, пока из-за нелинейности усилителя не наступит насыщение.

Внутренний контур обратной связи и другие типичные компоненты автоколебательной системы не всегда могут быть легко идентифицированы в конкретной системе. Некоторые неделимые физические подсистемы совмещают, например функции, усилителя и осциллятора. Тем не менее, механизмы автоколебаний универсальны и одинаковы для столь различных систем как электронные генера-

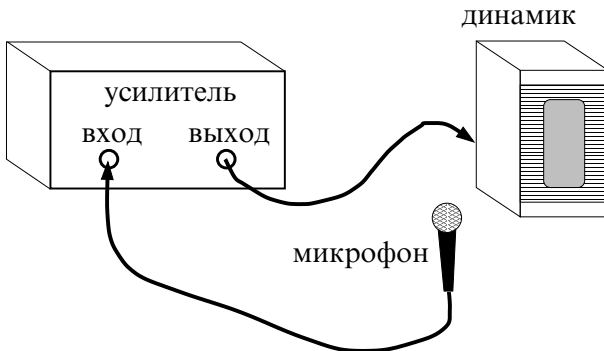


Рис. 2.11. Усилитель, динамик и микрофон составляют автоколебательную систему. Если микрофон находится близко к динамику, т.е. обратная связь достаточно сильна, то малейшее возмущение может привести к нежелательному возбуждению автоколебаний.

торы и клеточные биологические часы, генерирующие циркадные ритмы. Недавно было установлено, что эти часы также имеют цепь обратной связи в которой ритмическая экспрессия генов *Clock* приводит к колебаниям концентрации рибонуклеиновой кислоты и белков [Andretic *et al.* 1999; Glossop *et al.* 1999; Moore 1999]. Контур обратной связи является необходимым элементом систем управления. Наличие в этом контуре временного запаздывания часто приводит к возбуждению автоколебаний. Многочисленные интересные примеры таких колебаний в физиологических и биологических примерах могут быть найдены в книгах [Winfree 1980; Гласс и Мэки 1988].

2.4.2 Релаксационные автоколебательные системы

В этом разделе мы знакомим читателя с особым классом автоколебательных систем, которые, начиная с ранних работ Ван-дер-Поля [van der Pol 1926], известны как **релаксационные автоколебательные системы**. Существенной особенностью таких систем является наличие двух масштабов времени: в каждом цикле колебаний есть интервалы медленного и быстрого движений. Форма таких колебаний поэтому очень далека от синусоидальной; она скорее напоминает последовательность импульсов.¹²

¹² Отметим, что иногда форма колебаний может меняться с изменением параметров осциллятора, так что один и тот же генератор может быть релаксационным или квазилинейным, в зависимости, например, от сопротивления в контуре.

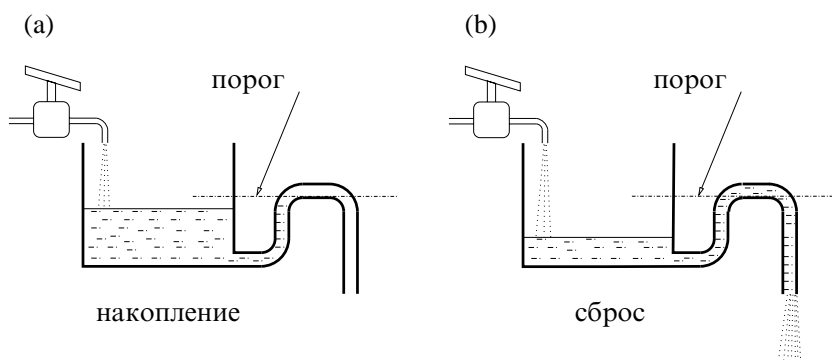


Рис. 2.12. Механическая модель релаксационного осциллятора накопление – сброс. (а) Вода медленно наполняет сосуд, пока ее уровень не достигнет порогового; эта часть колебательного цикла может быть обозначена как «накопление». (б) Вода вытекает через сифон и ее уровень в сосуде быстро понижается: осциллятор «стреляет».

Мы начнем наше рассмотрение релаксационных автоколебаний с простейшей механической модели [Пановко и Губанова 1964], схема которой показана на рис. 2.12. Основной элемент этой системы – сосуд, медленно заполняемый водой. Когда уровень воды достигает порогового значения, сосуд быстро опорожняется, и начинается новый цикл колебаний; энергия насоса, обеспечивающего постоянную подачу воды, преобразуется в колебания уровня воды в сосуде. Так как в течение каждого периода колебаний вода медленно накапливается, а затем почти мгновенно удаляется из сосуда, такие системы часто называют осцилляторами типа *накопление – сброс*. Если мы построим график зависимости уровня воды в сосуде и потока через сифон от времени (рис. 2.13), то интервалы медленных и быстрых движений будут хорошо видны.¹³

Описанный осциллятор – это, конечно же, модель-игрушка, но она обладает основными чертами реальных систем. Электронные генераторы, изученные Ван-дер-Полем в 1920-х годах [van der Pol 1926], функционируют очень похожим образом. Такой генератор со-

¹³ Мы предполагаем, что кран лишь слегка открыт, так что отношение интервалов накопления и сброса, t_1/t_2 , велико. Как будет проиллюстрировано далее, именно такой режим часто интересен в практических ситуациях.

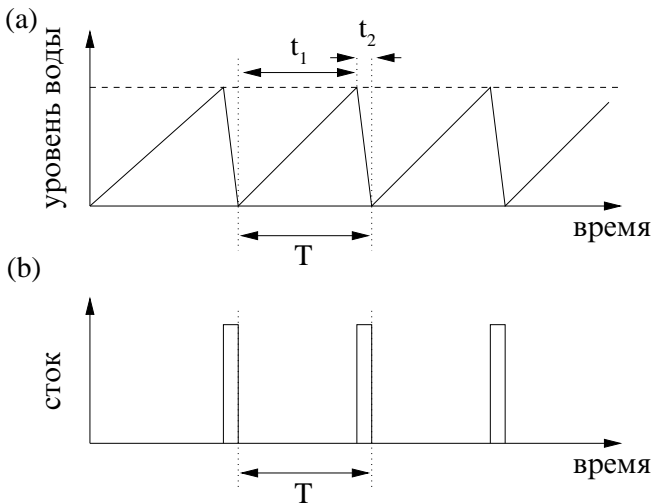


Рис. 2.13. Временная эволюция механического осциллятора типа «накопление – сброс», показанного на рис. 2.12. Вода накапливается до тех пор, пока не достигнет порогового уровня, показанного пунктирной линией (а), после чего уровень воды быстро падает до нуля. Это соответствует импульсу на графике зависимости потока воды через сифон от времени (б).

стоит из батареи, конденсатора, сопротивления и неоновой лампы (рис. 2.14). Вначале конденсатор медленно заряжается; характерное время этого процесса определяется емкостью и сопротивлением. Рост напряжения на конденсаторе аналогичен повышению уровня воды в нашей модели-игрушке. Когда напряжение достигает некоторого критического уровня, в лампе возникает газовый разряд и она начинает проводить электрический ток, что сопровождается свечением. В результате, конденсатор быстро разряжается через лампу, его напряжение падает, и газовый разряд прекращается. Лампа вновь становится непроводящей, и этот процесс повторяется снова и снова. Как и поток воды из сосуда, электрический ток через неоновую лампу возникает в виде последовательности коротких импульсов (и, соответственно, коротких вспышек света), в то время как напряжение имеет пилообразную форму. Генераторы такого типа используются в электрических цепях осциллографов, телевизоров и компьютерных дисплеев. Действительно, электронный луч, формирующий изображение на экране, должен двигаться горизонтально с постоянной скоростью и затем практически мгновенно возвращаться; это реализуется использованием пилообразного напряжения для управления движением луча.

Общее свойство релаксационных осцилляторов – медленное возрастание (линейное или нет) некоторой величины и ее сброс при достижении порога – наблюдается во многих биологических системах. Так, например, механизм, весьма похожий на генерацию импульсов релаксационным генератором Ван-дер-Поля, может быть выявлен

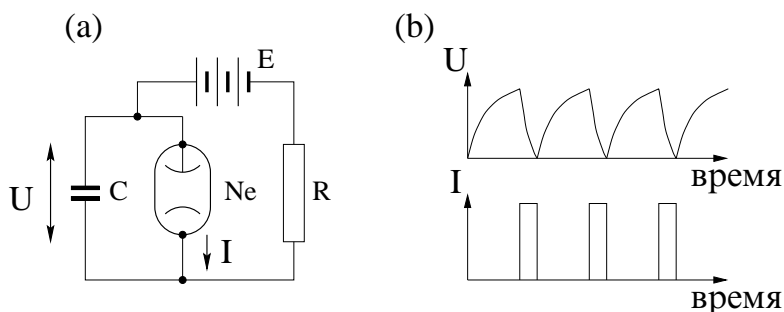


Рис. 2.14. Схема релаксационного генератора Ван-дер-Поля (а). Напряжение на конденсаторе возрастает, пока не достигнет порогового значения, при котором лампа становится проводящей. После этого конденсатор быстро разряжается, лампа вспыхивает, и наблюдается короткий импульс тока через лампу. Каждый цикл колебаний состоит, таким образом, из эпох накопления и сброса (б).

в нейронах, спонтанно генерирующих потенциалы действия: если к клетке подвести электрический ток, то потенциал (напряжение между точками внутри и вне клетки) обычно изменяется медленно, но время от времени он изменяется очень быстро, в результате чего генерируется короткий, длительностью порядка 2 мс потенциал действия – спайк (spike, рис. 2.15). Спайки генерируются в момент времени, когда клеточный потенциал достигает порогового значения ≈ -50 мВ; клетка при этом разряжается. После разряда клеточный потенциал сбрасывается до примерно -70 мВ. Генерация спайков происходит за счет емкости клеточной мембраны и нелинейной зависимости ее проводимости от напряжения. Если к клетке подведен постоянный ток, то потенциалы действия генерируются регулярно. Медленное изменение тока изменяет частоту генерации нейрона, точно так же как частота колебаний уровня воды в модели на рис. 2.12 может быть подстроена с помощью крана. Так работают сенсорные нейроны: интенсивность стимула кодируется частотой генерации потенциалов действия. Понимание механизмов взаимодействия в нейронных ансамблях, которые часто моделируются ансамблем осцилляторов типа накопление–сброс, очень важно для решения различных проблем нейробиологии, например, для проблемы связывания (binding).¹⁴

Другой важный пример – это сокращения сердца. Известно, что изолированное сердце сохраняет способность к ритмическим сокра-

¹⁴ Binding – это процесс комбинирования мозгом связанной, но пространственно распределенной информации, например, для распознавания образов.

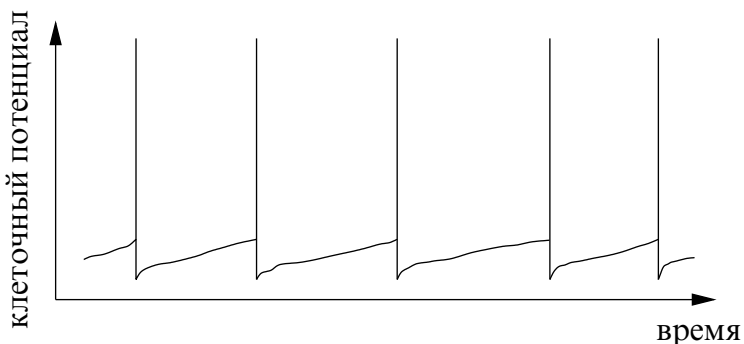


Рис. 2.15. Внутриклеточный потенциал нейрона медленно возрастает до порогового значения (≈ -53 мВ в показанном здесь примере), а затем, после короткого импульса, сбрасывается. Схематически по [Hopfield 1994].

щениям *in vitro*: если деиннервированное сердце снабжается физиологическим раствором, обогащенным кислородом, через артерию, то активность пейсмекера первого порядка – синоатриального узла – продолжает вызывать сокращения. Конечно, такая система существенно отличается от сердца *in vivo*,¹⁵ тем не менее, мы можем рассматривать обе системы как автоколебательные. Говоря о нормальном сердечном ритме мы рассматриваем всю сердечно-сосудистую систему как единый осциллятор, который включает в себя все контуры управления со стороны автономной нервной системы и все мозговые центры, участвующие в регуляции сердечного ритма. Мы понимаем, что эта система подвержена воздействию других физиологических ритмов, в первую очередь дыхания, и что ее невозможно изолировать полностью. Тем не менее, ясно, что эти другие ритмы не являются причиной сердцебиений, а скорее играют роль их возмущения. Сердце способно генерировать свой ритм самостоятельно, несмотря на эти возмущения, и, следовательно, мы можем считать эту систему автоколебательной.

Отметим, что, если мы рассмотрим функционирование сердца более детально, то обнаружим, что эта система состоит из нескольких автоколебательных систем (пейсмекеров первого и второго порядка), которые в норме синхронизованы между собой. Рассмотрение на еще более низком уровне показывает, что каждый пейсмекер, в свою очередь, представляет собой ансамбль генерирующих ритм клеток, которые синхронизируют свои потенциалы действия, чтобы инициировать сокращение сердца. Таким образом, явление синхронизации играет важную роль в функционировании сердца, и поэтому мы еще несколько раз вернемся к этому важному примеру (см. разделы 3.3.2 и 4.1.6).

¹⁵ Так, например, частота сокращений сердца *in vitro* выше и вариабельность интервалов между сокращениями ниже, чем соответствующие значения для сердца *in vivo*.

Глава 3

Синхронизация периодических автоколебаний внешней силой

Эта глава посвящена простейшему случаю синхронизации: захвату частоты периодических автоколебаний внешней силой. Эту ситуацию можно рассматривать как особый случай взаимодействия маятниковых часов, описанного в главе 1. Предположим, что связь между часами – однонаправленная, т.е. одни часы воздействуют на другие, но не наоборот. Это и будет случаем внешнего воздействия, который мы подробно рассмотрим ниже. Однонаправленная связь – это не только упрощение, позволяющее дать более ясное описание синхронизации, но и модель, соответствующая множеству реальных ситуаций. Возможно, наилучшим примером служат не маятниковые, а современные часы, управляемые по радио. Время от времени их ход корректируется сигналом от сверхточных часов, и поэтому они показывают время с большой точностью. Мы уже упоминали примеры из живой природы: биологические часы, задающие циркадный ритм клеток и организмов, управляются периодической силой, возникающей вследствие вращения Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца. Ясно, что это воздействие – однонаправленное. Ниже мы обсудим и ряд других примеров.

Начнем мы с рассмотрения квазилинейных автоколебаний, на которые действует синусоидальная сила. На этом примере мы объясним, в чем заключается захват частоты внешней силой, и подробно рассмотрим, что происходит с фазой и частотой системы при пере-

ходе к синхронизации. Затем мы опишем метод стробоскопического наблюдения; в дальнейшем он будет использоваться при изучении синхронизации сильно нелинейных систем, захвата частоты периодической последовательностью импульсов, а также синхронизации порядка $n : m$. Далее мы рассмотрим особенности синхронизации релаксационных автоколебаний и рассмотрим, что происходит с захватом частоты в присутствии шума. По ходу изложения будут приведены различные экспериментальные примеры. Наконец, мы обсудим некоторые явления, имеющие отношение к синхронизации, такие как хаотизация и подавление автоколебаний сильным внешним воздействием, а также эффект действия периодической силы на возбудимые системы и явление стохастического резонанса.

3.1 Слабое воздействие на квазилинейные автоколебания

Мы подробно обсудили автономные автоколебательные системы. Теперь мы рассмотрим, что происходит с ними при *слабом внешнем воздействии*. В качестве примера возьмем часы с маятником из магнитного материала и поместим их вблизи электромагнита, питаемого переменным током. В этой ситуации автоколебания часов возмущаются слабым переменным магнитным полем. Можно также периодически двигать вверх-вниз сами часы или же периодически ударять по маятнику.

Для простоты представления начнем со случая, когда автоколебания квазилинейны, $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$, с частотой ω_0 и амплитудой A , а внешняя сила – гармоническая с частотой ω , т.е. она имеет вид $\varepsilon \cos(\omega t + \bar{\phi}_e)$, где $\phi_e(t) = \omega t + \bar{\phi}_e$ – фаза силы, а ε – ее амплитуда. Важно, что частота силы ω в общем случае отличается от частоты автоколебаний ω_0 , последнюю мы будем называть *автономной частотой*. Разность между частотами $\omega - \omega_0$ называется *расстройкой*.

Что происходит в результате такого слабого воздействия? В общем случае можно ожидать, что внешняя сила меняет как амплитуду, так и фазу автоколебаний. Однако, как уже обсуждалось в разделе 2.2, амплитуда устойчива, а фаза нейтральна (ни устойчива, ни неустойчива). Поэтому слабая сила может изменить только фазу, но не амплитуду (см. рис. 2.3b). Следовательно, мы можем сконцентрироваться на динамике фазы.

Подчеркнем, что мы продолжаем использовать определение фазы, которое было введено для автономных колебаний. Мы не переопре-

деляем фазу при наличии силы. Соотношение между фазой и положением на предельном цикле остается старым (см. рис. 2.5). Поэтому под внешним воздействием фаза в общем случае будет вращаться не равномерно, а более сложным образом.

3.1.1 Автономные автоколебания и сила во вращающейся системе координат

В этом разделе мы рассматриваем квазилинейные автоколебания. Как было описано выше, предельный цикл представляет собой окружность, и фазовая точка вращается по нему равномерно с угловой скоростью ω_0 . Удобно изучать фазовую динамику вынужденных колебаний в новой системе отсчета, вращающейся в том же направлении (пусть это будет против часовой стрелки) с угловой скоростью, равной частоте внешней силы ω .

В качестве первого шага обсудим, как автономные автоколебания выглядят в этой новой системе отсчета. Другими словами, временно будем считать, что амплитуда силы равна нулю ($\varepsilon = 0$). Ясно, что в зависимости от соотношения между ω и ω_0 , точка в новой системе отсчета либо продолжает вращаться против часовой стрелки (при $\omega_0 > \omega$), либо стоит на месте (при $\omega_0 = \omega$), либо вращается в противоположном направлении (при $\omega_0 < \omega$), как показано на рис. 3.1. Положение точки можно характеризовать разностью фаз $\phi - \phi_e$, которая растет с постоянной скоростью $\omega_0 - \omega$, постоянна, или убывает со скоростью $\omega_0 - \omega$. Поскольку амплитуда силы равна нулю, введение величины $\phi - \phi_e$ кажется на первый взгляд излишним. Но мы знаем, что когда-нибудь сила будет «включена», и тогда разность фаз $\phi - \phi_e$ станет очень важной характеристикой движения.

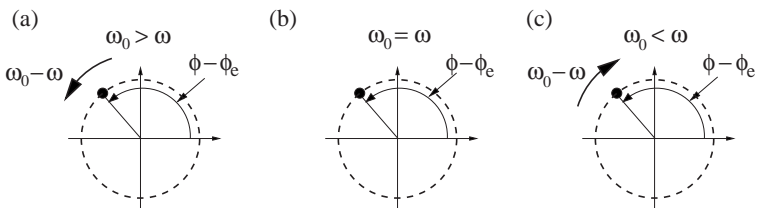


Рис. 3.1. В системе отсчета, вращающейся с частотой ω , автоколебаниям соответствует вращающаяся (а и с) или неподвижная (b) точка, в зависимости от расстройки $\omega_0 - \omega$. Положение точки характеризуется угловой переменной $\phi - \phi_e$, которая растет (а), постоянна (b) или убывает (с).

Напомним читателю интерпретацию динамики фазы как движения легкой частицы в вязкой жидкости; эту аналогию мы уже обсуждали в разделе 2.2.2, мы будем активно использовать ее и в дальнейшем. В отсутствие расстройки, $\omega_0 = \omega$, фазовая точка во вращающейся системе покоится; это можно представить находящейся в покое на горизонтальной плоскости частицей (см. рис. 2.4с). Равномерный рост или убывание разности фаз $\phi - \phi_e$ в случае ненулевой расстройки, т.е. при $\omega_0 \neq \omega$, можно представить скольжением частицы вниз по наклонной плоскости;¹ в этом случае часто говорят о движении частицы в наклонном потенциале. Такая частица показана на рис. 3.2а для случая $\omega_0 > \omega$, при обратном знаке расстройки плоскость наклонена в другую сторону, так что разность фаз $\phi - \phi_e$ со временем убывает.

Теперь пришло время включить силу, т.е. положить $\varepsilon \neq 0$. В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью ω , сила $\varepsilon \cos(\omega t + \bar{\phi}_e)$, осциллирующая с частотой ω , представляется постоянным вектором² длины ε , действующим под некоторым углом ϕ^0 .³ Результат действия силы на фазовую точку на цикле зависит от разности фаз $\phi - \phi_e$ (рис. 3.3а). В самом деле, в точках 1 и 2 сила направлена перпендикулярно к траектории, и поэтому она не может сдвинуть

- ¹ При постоянной силе такая частица движется с постоянной скоростью.
² Точнее говоря, сила во вращающейся системе представляется постоянным вектором и вектором, вращающимся по часовой стрелке с частотой 2ω . Поскольку эти вращения гораздо быстрее движения точки ($2\omega \gg |\omega_0 - \omega|$), влиянием этого второго вектора можно пренебречь, так как он действует попеременно в разных направлениях, и эти воздействия практически гасят друг друга.
³ Этот угол зависит от начальной фазы силы $\bar{\phi}_e$ и от того, как она действует на осциллятор; обычно при квазилинейных автоколебаниях $\phi^0 = \bar{\phi}_e + \pi/2$, см. раздел 7.2.

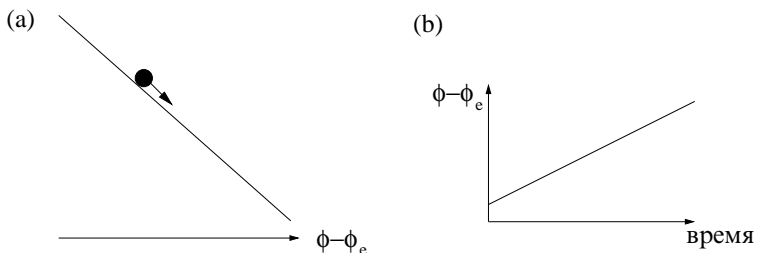


Рис. 3.2. (а) Частица, скользящая с постоянной скоростью по наклонной плоскости, изображает динамику фазы на предельном цикле во вращающейся системе отсчета; здесь изображен случай положительной расстройки ($\omega_0 > \omega$). Фаза колебаний растет линейно по времени (б).

фазу автоколебаний. В точках 3 и 4 ее влияние максимально, а в точках 5–8 наблюдается промежуточный эффект. Отметим, что в некоторых точках сила действует по часовой стрелке, а в других – против. Легко видеть, что точки 1 и 2 отвечают *устойчивому и неустойчивому состояниям равновесия* (рис. 3.3а). Используя снова аналогию с движением легкой частицы на плоскости, можно сказать, что сила приводит к искривлению поверхности (потенциала), причем минимум и максимум соответствуют устойчивому и неустойчивому состояниям равновесия (рис. 3.3б). На математическом языке можно сказать, что положение равновесия ϕ^0 асимптотически устойчиво, в то время как фаза автономных автоколебаний устойчива нейтрально, но не асимптотически (см. рис. 2.4с).

Промежуточное подведение итогов

Мы описали, как влияние расстройки и силы проявляется во вращающейся системе отсчета. Оно вкратце сводится к следующему.

- Расстройка без силы отвечает вращению фазовой точки с угловой скоростью $\omega_0 - \omega$. Это можно также представить как соскальзывание частицы по наклонной плоскости, наклон которой пропорционален расстройке.

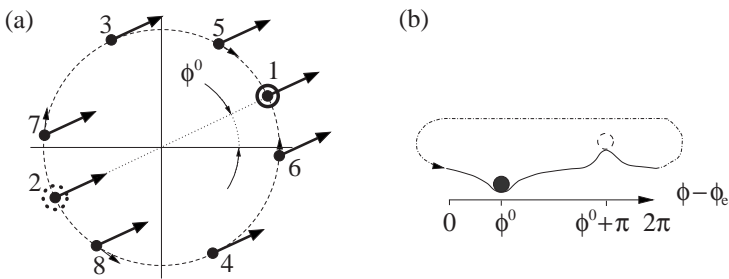


Рис. 3.3. (а) Слабая внешняя сила не может изменить амплитуду предельного цикла, но может сдвинуть фазу автоколебаний ϕ . Влияние силы зависит от разности фаз $\phi - \phi_e$: в точках 3 и 4 это влияние максимально, а в точках 1 и 2 сила действует по радиусу и поэтому не сдвигает фазовую точку вдоль цикла. Отметим, что в окрестности точки 2 сила действует так, что фаза удаляется от положения 2. В противоположность этому, в окрестности точки 1 сила придвигает фазу к этому состоянию равновесия. Следовательно, внешняя сила создает устойчивое (окружность в точке 1) и неустойчивое (пунктирная окружность в точке 2) состояния равновесия на цикле. Эти состояния равновесия показаны также на рисунке (б) (ср. с рис. 2.4с).

- Сила без расстройки создает на цикле устойчивое и неустойчивое состояния равновесия. В другом представлении (рис. 3.3b) – сила создает неоднородный, периодический потенциал с минимумом и максимумом.

Теперь рассмотрим совместное действие обоих факторов – силы и расстройки – и определим условия, при которых сила может синхронизовать осциллятор.

3.1.2 Захват фазы и частоты

Начнем с простейшего случая нулевой расстройки, т.е. со случая, когда частота силы совпадает с частотой собственных автоколебаний. Из рис. 3.3 сразу видно, что при этом происходит: какая бы ни была начальная разность фаз $\phi - \phi_e$,⁴ фазовая точка движется в сторону устойчивого состояния равновесия (рис. 3.3a), так что в конце концов $\phi = \phi_e + \phi^0$, т.е. *фаза автоколебаний захватывается силой*. Подчеркнем, что захват происходит при сколь угодно малой силе. При этом, конечно, синхронный режим устанавливается за очень большое время. Этот случай довольно тривиален, поскольку частоты автоколебаний и силы с самого начала совпадают, так что синхронизация проявляется только в установлении определенного соотношения между фазами.

Пусть теперь частота силы отличается от частоты автономных автоколебаний, для определенности будем считать $\omega_0 > \omega$. Сила и расстройка действуют в противоположных направлениях: сила стремится сделать фазы ϕ и $\phi_e + \phi^0$ одинаковыми (фазовая точка стремится к минимуму потенциала), в то время как расстройка разводит их друг от друга. В зависимости от соотношения между расстройкой $\omega_0 - \omega$ и амплитудой силы ε побеждает та или иная тенденция. В результате устанавливается один из двух возможных режимов; мы опишем их ниже, полагая ε постоянным и меняя расстройку.

Малая расстройка: синхронизация

Здесь мы рассмотрим влияние внешней силы на медленно вращающуюся фазовую точку (рис. 3.4). Как мы уже знаем, воздействие зависит от разности $\phi - \phi_e$. В некоторых точках сила ускоряет вращение, а в других замедляет его. При определенном значении разности фаз $\Delta\phi = \phi - \phi_e - \phi^0$ (см. точку 1 на рис. 3.4) сила уравнивает

⁴ Напомним, что начальная фаза колебаний произвольна.

вращение и останавливает его. В результате частота *вынуждаемых автоколебаний* (мы обозначаем ее через Ω и называем *наблюдаемой частотой*) становится равной частоте силы, $\Omega = \omega$, а между фазами устанавливается устойчивое соотношение. Мы называем такое движение **синхронизованным**.

Подчеркнем, что при синхронизации фазы не совпадают, но их разность постоянна, $\phi - \phi_e = \phi^0 + \Delta\phi$; угол $\Delta\phi$ называют *сдвигом фазы*. Захват частоты можно представить и по-другому: сила создает минимумы в наклонном потенциале (рис. 3.5) и частица захватывается в одном из них.⁵ Существует и вторая точка, где сила компенсирует вращение разности фаз (точка 2 на рис. 3.4), но это состояние неустойчиво; оно соответствует нахождению частицы в локальном максимуме потенциала.

Большая расстройка: квазипериодическое движение

Если расстройка превышает некоторый порог, то сила уже не может остановить вращение. Действительно, рассмотрение рис. 3.4 показывает, что с ростом расстройки (т.е. с ростом скорости вращения), состояния равновесия сдвигаются в сторону точки 3, где замедляющее

⁵ Отметим, что потенциал теперь не 2π -периодический, поскольку направления по и против часовой стрелки не эквивалентны вследствие вращения.

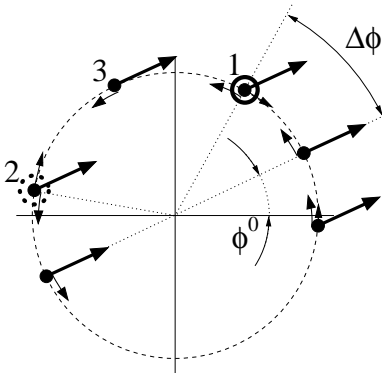


Рис. 3.4. Малая расстройка. Вращение фазовой точки возмущается внешней силой, которая ускоряет или замедляет его в зависимости от разности фаз $\phi - \phi_e$. Вращение обозначено стрелкой внутри круга; здесь оно происходит против часовой стрелки, что соответствует $\omega_0 > \omega$. В точке 1 вращение компенсируется силой. Эта точка становится устойчивым положением равновесия. Неустойчивое состояние равновесия – в точке 2 (ср. с рис. 3.3а). Фазовая точка останавливается силой, в результате чего устанавливается устойчивый сдвиг фаз $\Delta\phi$. Возможные значения $\Delta\phi$ лежат в интервале $-\pi/2 < \Delta\phi < \pi/2$.

действие силы максимально. В конце концов устойчивое и неустойчивое состояния равновесия сталкиваются и исчезают, и фазовая точка начинает вращаться с так называемой **частотой биений** Ω_b . В терминах движения частицы, сила приводит к изменению потенциала, но не создает минимумы (рис. 3.6a). Поэтому частица соскальзывает вниз, но ее скорость (и, соответственно, рост фазы) не постоянна (рис. 3.6b).

Хотя при данной расстройке внешняя сила недостаточна для синхронизации, она существенно влияет на динамику: сила делает вращение неравномерным и в среднем замедляет его, так что

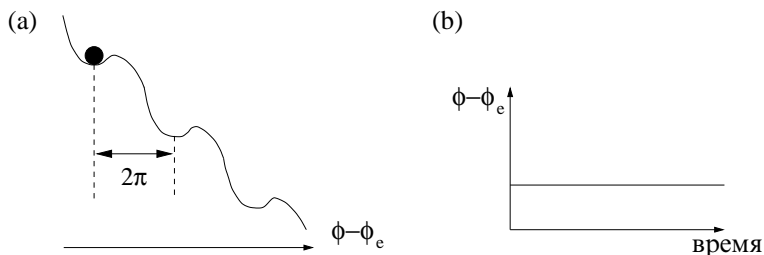


Рис. 3.5. Малая расстройка. Внешняя сила создает минимумы в наклонном потенциале (a) и частица располагается в одном из них. Это соответствует устойчивой постоянной разности фаз, $\phi - \phi_e = \phi^0 + \Delta\phi$ (b).

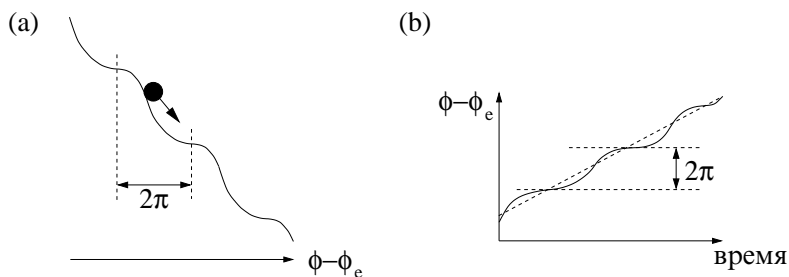


Рис. 3.6. Большая расстройка. Сила не может захватить частицу: локальных минимумов потенциала нет и частица соскальзывает вниз (a). Допороговая сила модулирует скорость частицы, поэтому разность фаз растет неравномерно (b). Средняя скорость роста, показанная штриховой линией, дает *частоту биений*. Из (a) видно, что период вращения (показанного двумя штриховыми линиями) совпадает с периодом модуляции.

$\Omega_b < \omega_0 - \omega$.⁶ Это замедление связано с тем, что частица почти останавливается в точках, где наклон потенциала минимален.

Возвращаясь к исходной системе отсчета, видим, что автоколебания имеют частоту $\omega + \Omega_b < \omega_0$ и рост фазы модулирован с частотой биений Ω_b . Такое движение, характеризующееся двумя частотами ($\omega + \Omega_b$ и Ω_b), называется **квазипериодическим**. Более точно, движение – квазипериодическое, если отношение $(\omega + \Omega_b)/\Omega_b$ иррационально, что является типичной ситуацией.

Подведем итоги: если расстройка мала, то даже малая сила может привести к появлению локальных минимумов потенциала и к захвату частоты автоколебаний. Чем больше расстройка, тем бóльшая сила требуется для синхронизации.

Захват частоты. Область синхронизации

Мы видели, что при постоянной амплитуде силы ε частота автоколебаний зависит от расстройки $\omega_0 - \omega$. При достаточно малой

⁶ Напомним читателю, что автономные автоколебания представляются во вращающейся системе отсчета точкой, вращающейся с частотой $\omega_0 - \omega$ (см. рис. 3.1) и что для определенности мы рассматриваем только случай положительных расстроек, $\omega_0 > \omega$.

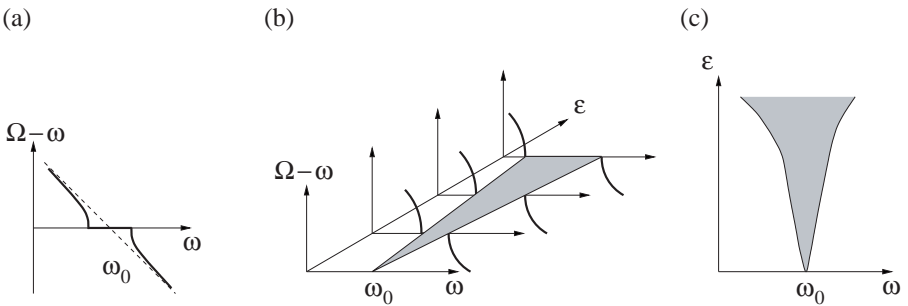


Рис. 3.7. (а) Разность частоты вынуждаемых автоколебаний Ω и частоты внешней силы ω как функция ω при постоянном значении амплитуды силы ε . Вблизи частоты автономных автоколебаний ω_0 разность $\Omega - \omega$ в точности равна нулю; это называют **захватом частоты**. При выходе из синхронизации частота вынуждаемых автоколебаний все равно отличается от ω_0 (штриховая линия показывает зависимость $\omega_0 - \omega$ от ω): сила слишком слаба чтобы захватить автоколебания, но она подтягивает частоту автоколебаний к своей. (б) Семейство графиков $\Omega - \omega$ от ω при различных значениях амплитуды силы ε дает область, в которой частота вынуждаемых автоколебаний Ω равна внешней частоте ω . Эта область, показанная серым на (с), называется **областью синхронизации** или **языком Арнольда**.

расстройке частота Ω захватывается – она становится равной ω . Если расстройка превышает некоторый порог, то это равенство нарушается, как показано на рис. 3.7а.

Совпадение частот в конечном диапазоне расстройек есть основное свойство синхронизации, часто его называют **захватом частоты**.⁷

Удобно представить на одном графике все семейство кривых $\Omega - \omega$ от ω (рис. 3.7а) при различных значениях амплитуды силы ε . Эти кривые позволяют определить область на плоскости (ω, ε) , соответствующую синхронизованному состоянию осциллятора (рис. 3.7b,c); отметим, что параметры ω и ε отвечают внешней силе, именно они обычно меняются в эксперименте. Внутри этой области частота осциллятора равна частоте внешнего воздействия. Начиная с работ Эпплтона и Ван-дер-Поля, эту область принято называть **областью синхронизации**, в последнее время чаще говорят о **языке Арнольда**.⁸

Отметим следующее важное обстоятельство: область синхронизации касается оси ω . Это означает, что при нулевой расстройке автоколебания могут быть синхронизованы сколь угодно малой силой (хотя в этом случае переходный процесс к синхронному состоянию может длиться сколь угодно долго). Это свойство широко используется, например, в радиотехнике, в частности, в системах связи, где частота мощного генератора может быть стабилизирована слабым, но высококачественным сигналом от вспомогательного генератора.

Захват фазы: постоянный фазовый сдвиг

Синхронизацию часто описывают и в терминах **захвата фазы**. Как мы уже видели, при асинхронном движении происходит неограниченный рост разности фаз, в то время как в синхронном режиме *разность фаз ограничена* и существует постоянный сдвиг между фазами автоколебаний и силы:

$$\phi(t) - \phi_\varepsilon(t) = \text{constant}, \quad (3.1)$$

где постоянная равна $\phi^0 + \Delta\phi$. Сдвиг фазы $\Delta\phi$ зависит от начальной расстройки. Если «пересекать» область синхронизации по линии

⁷ В контексте синхронизации лазеров часто употребляется термин *захват мод*.

⁸ При малых ε границы языка – прямые линии; это общий случай для слабо возмущаемых автоколебаний. При больших ε форма языка зависит от конкретных свойств автоколебаний и силы.

постоянной амплитуды силы ε , меняя ее частоту, то сдвиг фаз меняется на π ; он равен нулю при нулевой расстройке, т.е. в середине области синхронизации. Напомним, что постоянный угол ϕ^0 зависит от начальной фазы силы и от того, как она действует на осциллятор. Подчеркнем, что для захвата фазы требуется, чтобы разность фаз оставалась ограниченной в конечной области расстройек, т.е. внутри области синхронизации.

3.1.3 Переход к синхронизации

Опишем теперь, как происходит переход к синхронизации, т.е. как меняется динамика разности фаз на границе области синхронизации. Вся нужная информация у нас практически имеется, нужно только свести ее вместе.

Проскоки фазы и перемежающаяся фазовая динамика в области перехода

Пусть амплитуда силы постоянна, а частота меняется. Рассмотрим язык Арнольда, изображенный на рис. 3.8а; нас интересует, что происходит, если двигаться по горизонтальной линии на этой диаграмме. Начнем с нулевой расстройки (точка 1 на рис. 3.8а), $\omega_0 = \omega$, и будем постепенно уменьшать частоту внешней силы ω . Другими словами, выберем ω в середине области синхронизации и рассмотрим, как синхронизация пропадает при пересечении границы языка вследствие изменения частоты воздействия (рис. 3.8). Мы уже видели, что если расстройка равна нулю, то разность фаз равняется ϕ^0 ; для определенности будем считать $\phi^0 = 0$ (см. случай 1 на рис. 3.8а и б). При увеличении расстройки сдвиг фазы становится ненулевым; этот случай показан точкой и линией с индексом 2. Когда точка пересекает границу языка, происходит потеря синхронизации и разность фаз растет неограниченно (точка 3 на (а) и кривая 3 на (б)). Однако этот рост не равномерен! В самом деле, есть периоды времени, когда разность фаз почти постоянна, и более короткие периоды, когда разность фаз довольно быстро увеличивается на 2π . Такое быстрое изменение, выглядящее как скачок, часто называют *проскоком фазы* (*phase slip*).⁹

⁹ Скорость фазового скачка зависит от амплитуды силы. При слабом воздействии проскок длится несколько, возможно даже много периодов силы.

Чередование периодов почти постоянной разности фаз с проскоками фазы означает, что в течение долгих интервалов времени система колеблется почти синхронно с внешней силой, а затем совершает одно дополнительное колебание (или пропускает один период, если выход из языка осуществляется через правую границу). В представлении, принятом на рис. 3.4, картина выглядит следующим образом: точка, изображающая фазу автоколебаний, вращается почти с той же угловой скоростью, что и фаза внешней силы, а затем ускоряется (замедляется) и совершает на один оборот больше (меньше), чем сила.

Чтобы пояснить это поведение, напомним аналогию с движением частицы в наклонном потенциале (рис. 3.6). Потере синхронизации соответствует исчезновение локальных минимумов потенциала, но потенциал все же остается искривленным. Частица скользит очень медленно, практически останавливаясь, на почти горизонтальных участках потенциала и относительно быстро по его крутым участкам. Это соответствует почти синхронным интервалам и проскокам

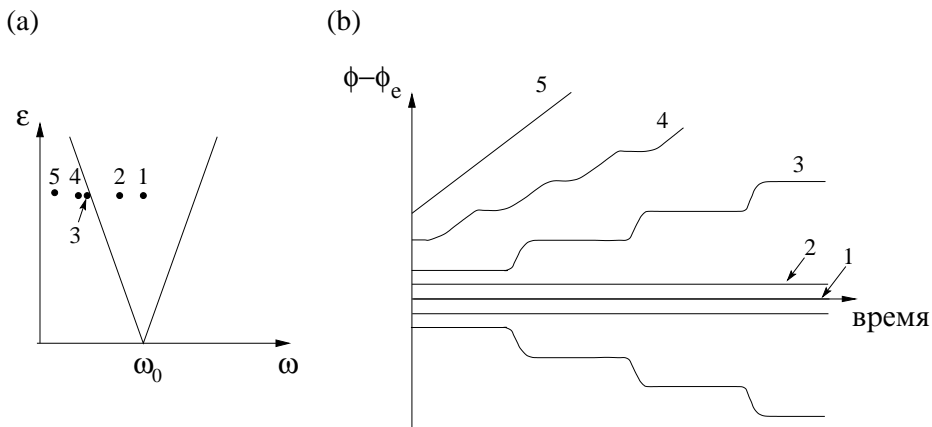


Рис. 3.8. Динамика фазы при переходе к синхронизации. Разность фаз показана на рисунке (b) для различных значений частоты силы; эти значения показаны на рисунке (a) точками 1–5, внутри и вне области синхронизации. В синхронном режиме (точки 1 и 2) разность фаз постоянна (линии 1 и 2 на рисунке (b)); она равна нулю в середине языка и отличается от нуля ближе к его краю. Сразу за границей языка динамика фазы – перемежающаяся: разность фаз выглядит как последовательность быстрых скачков (проскоков), перемежающихся с периодами почти синхронного поведения (точка и кривая 3). При дальнейшем продвижении от границы языка рост фазы становится все более равномерным (точки и кривые 4 и 5). Переход на правой границе языка происходит аналогично, но только разность фаз теперь убывает.

фазы. Синхронные интервалы и проскоки чередуются, так что можно сказать, что *динамика разности фаз – перемежающаяся*. Это проиллюстрировано на рис. 3.8b, кривая 3.

При дальнейшем росте расстройки продолжительность почти синхронных интервалов становится все меньше, и в конце концов рост разности фаз становится почти равномерным (рис. 3.8b, кривые 4 и 5). Естественно, что эта картина симметрична по отношению к знаку расстройки; увеличение частоты внешней силы соответствует отрицательному наклону потенциала.

Как различить синхронное и квазипериодическое движение: фигуры Лиссажу

На языке частот выход из синхронизации представляет собой переход от движения с одной частотой ω к квазипериодическому движению с двумя частотами. Этот переход легко виден на графике, где некоторая наблюдаемая осциллятора представлена как функция внешней силы (рис. 3.9). Если частоты обоих процессов идентичны (синхронное движение), то график представляет собой замкнутую

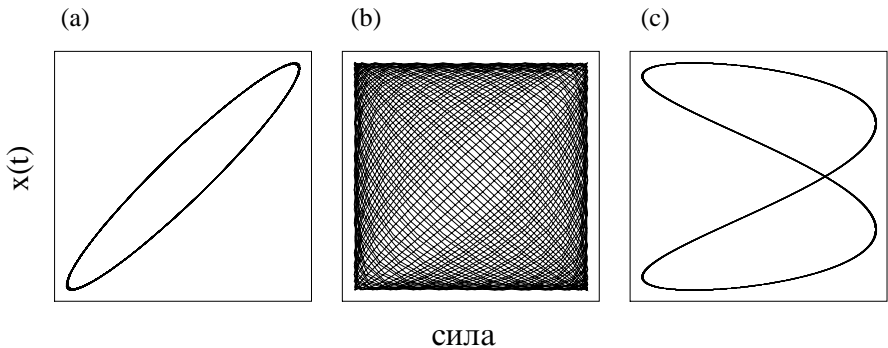


Рис. 3.9. Фигуры Лиссажу служат индикатором синхронизации. Наблюдаемая вынужденных автоколебаний $x(t)$ представлена в зависимости от силы. (а) Синхронное состояние. Периоды колебаний по обеим осям идентичны, поэтому график – это замкнутая кривая. (б) Квазипериодический режим. Точка никогда не возвращается в исходное положение и кривая заполняет всю область. (с) Фигура Лиссажу типа восьмерки соответствует случаю, когда сила совершает два колебания в то время как осциллятор – одно. Это пример синхронизации более высокого порядка (1 : 2), она будет обсуждаться в разделе 3.2. (Отметим, что для наглядности масштаб по осям выбран различным; на самом же деле амплитуда силы гораздо меньше амплитуды сигнала (слабое воздействие).)

кривую, известную как *фигура Лиссажу*. В противном случае, если частоты различны, то график заполняет целую область. Этот метод особенно удобен для экспериментальной реализации: достаточно просто подать два сигнала на горизонтальный и вертикальный входы осциллографа (хотя в наши дни для построения графиков чаще используется компьютер).

Фигуры Лиссажу не только позволяют оценить соотношение между частотами, но и помогают оценить сдвиг фаз в синхронном режиме. Например, в случае, показанном на рис. 3.9а, фазовый сдвиг близок к нулю; кривая «схлопывается» в прямую при $\phi(t) = \phi_e(t)$; фигура Лиссажу в виде окружности соответствует сдвигу фаз $\pm\pi/2$.

3.1.4 Пример: захват частоты дыхания механической вентиляцией

Перейдем от абстрактных задач к реальной ситуации. Для иллюстрации синхронизации внешней силой мы опишем результаты экспериментов по захвату частоты спонтанного дыхания пациентов, находящихся под наркозом, установкой искусственного дыхания; эти эксперименты описаны в статье [Graves *et al.* 1986], см. также [Гласс и Мэки 1988]. Были использованы данные, полученные на восьми пациентах, подвергавшихся несложным, но требовавшим общего наркоза операциям. Пациенты были молодыми людьми обоего пола без каких-либо сердечных, дыхательных и неврологических расстройств.

Ритм дыхания генерируется в дыхательном центре мозга. Из экспериментов над животными уже с конца 19-го века было известно, что на этот ритм могут влиять механическое расширение и сжатие легких, это называют рефлексом Геринга–Брейера.

Искусственное дыхание – обычная клиническая процедура, и исследование Graves *et al.* [1986], кроме того, что оно интересно с точки зрения нелинейной динамики, имеет и практическое значение. Действительно, чтобы искусственное дыхание было эффективным, пациент не должен «бороться» с машиной. Поэтому для успешного проведения процедуры должно быть достигнуто определенное соотношение между фазами, так чтобы механическое расширение легких совпадало бы с вдохом.

В описываемых экспериментах менялась частота и амплитуда механической вентиляции; в наших обозначениях эти величины отвечают частоте и амплитуде внешней силы. В зависимости от этих параметров наблюдались как синхронные, так и асинхронные режимы (рис. 3.10). Видно, что в синхронном режиме каждому циклу меха-

нической вентиляции соответствует один цикл дыхания. Посмотрим подробнее на фазовые соотношения. Graves *et al.* [1986] вычисляли мгновенную частоту и разность фаз для 24 последовательных циклов.¹⁰ Графики этих величин представлены на рис. 3.11. С каждым

¹⁰ Частота определялась как обратная длительность цикла. Разность фаз вычислялась путем определения задержки от начала механического вдувания до начала спонтанного вдоха. В главе 6 мы подробно обсудим методы получения фазы и частоты из экспериментальных данных.

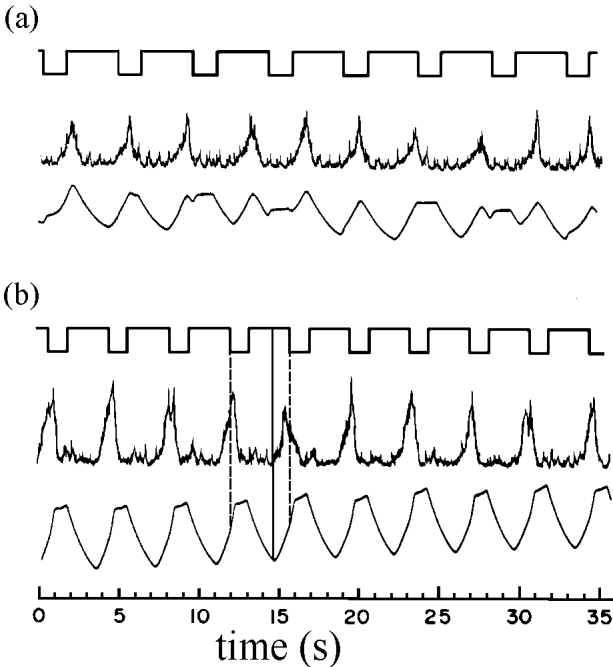


Рис. 3.10. Асинхронные (а) и синхронные (б) режимы дыхания. Верхние кривые изображают механическую вентиляцию (направление вниз соответствует вдуванию воздуха). Средние кривые – частично обработанные записи электромиограмм диафрагмы; эти кривые соответствуют сигналу от дыхательного центра. Нижние кривые показывают объем наполнения легких. Штриховая и сплошная линии на (б) отмечают начало вдувания и вдоха. Отметим, что захват частоты спонтанного дыхания внешней силой (механическим вдуванием) приводит к периодическому изменению объема наполнения (б). Потеря синхронизации приводит к противоположному действию спонтанного дыхания и вдувания; в результате амплитуда колебаний объема наполнения время от времени уменьшается (а). Такое поведение, типичное для квазипериодического движения, в англоязычной медицинской и биологической литературе часто называется структурой «waxing and waning» (подъем и спад). Из [Graves *et al.* 1986].

пациентом проводились три различных эксперимента, в которых частота вентиляции была ниже, равна и выше средней «свободной» частоты, т.е. частоты спонтанного дыхания. «Свободная» частота показана штриховой линией, а частота искусственного дыхания – сплошной. Мы видим, что частота дыхания действительно захвачена: если есть расстройка, то частота дыхания сдвигается к частоте внешнего воздействия. Что касается соотношения между фазами, то, в зависимости от расстройки, фаза дыхания опережает фазу силы, примерно совпадает с ней, или отстает. Это соответствует предсказаниям теории.

На рис. 3.12 показаны данные, полученные при относительно большой расстройке между частотами искусственного и «свободного» дыхания; в этом случае захвата не происходит. Разность фаз убывает или возрастает – в соответствии с теоретическими кривыми показанными на рис. 3.8.

Завершая рассмотрение этого примера, можно сказать, что динамика вынуждаемых автоколебаний в живой системе согласуются с основными предсказаниями теории, как для захваченного, так и

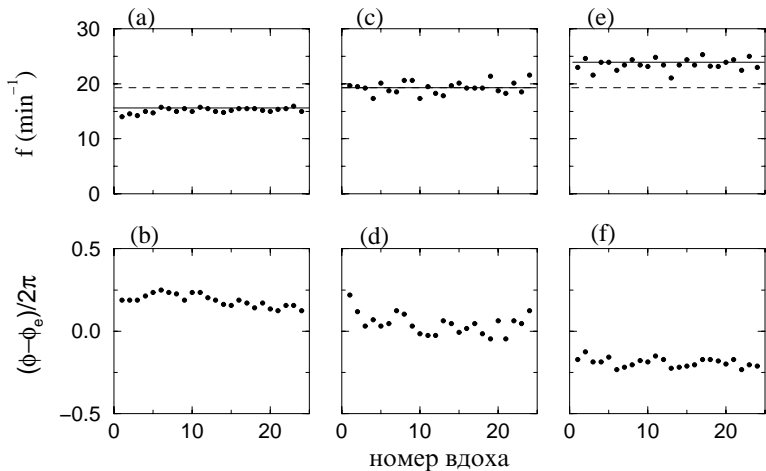


Рис. 3.11. Частота дыхания при механической вентиляции (а, с, и е) и разность фаз искусственного и спонтанного дыхания (b, d и f), вычисленные по 24 последовательным циклам. Графики соответствуют трем синхронным режимам, при которых частота воздействия (сплошная линия) меньше (а, b), равна (с, d) или больше (е, f) «свободной» частоты (штриховая линия). Частота дыхания захвачена, она флуктуирует вокруг частоты внешней силы. Средний сдвиг фаз соответственно положителен (b), близок к нулю (d) или отрицателен (f). Из [Graves *et al.* 1986].

для асинхронного состояния. Этот пример показывает также, что основные результаты не меняются, если форма силы отличается от синусоидальной. Единственное отличие от теории состоит в том, что частота захваченных колебаний не постоянна и разность фаз флуктуирует. Можно указать на две причины этого отличия. Во-первых, живая система – это не идеальный автогенератор, ее параметры меняются во времени, а также она подвержена влиянию шумов. Мы подробно обсудим эти факторы в разделе 3.4. Во-вторых, дыхание отличается от синусоидального процесса: вдох происходит быстрее, чем выдох. Этот фактор мы обсудим в следующем разделе.

3.2 Синхронизация внешней силой: более общий подход

Мы описали простейший случай захвата фазы, используя для примера вынуждаемые квазигармонические автоколебания. Для описания более общей ситуации, в которой могут также наблюдаться сложные синхронные режимы, мы введем весьма общий стробоскопический

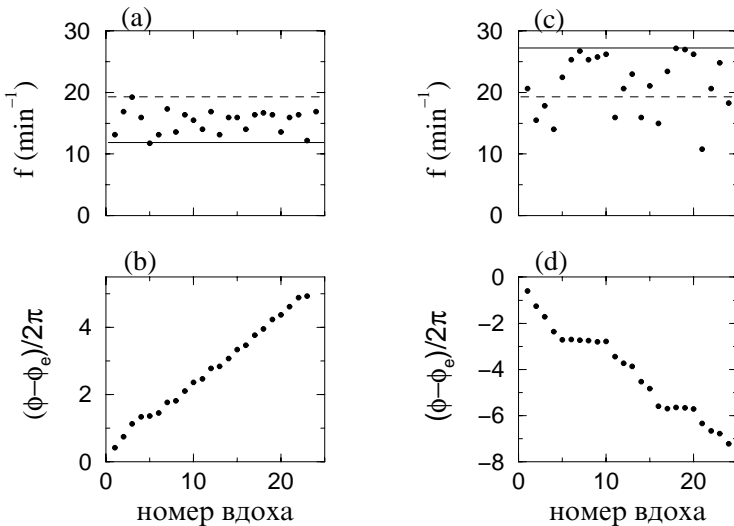


Рис. 3.12. Те же величины, что и на рис. 3.11, но для двух асинхронных режимов. Частота силы меньше (а, б) или больше (с, д) «свободной» частоты. Разность фаз растет почти равномерно (б) или перемежающимся образом (д), эти кривые следует сравнить с кривыми 3 и 4 на рис. 3.8b. (а), (с) из [Graves *et al.* 1986]. (б), (д) построены с использованием данных из [Graves *et al.* 1986].

метод. С использованием этого подхода мы опишем захват автоколебаний импульсной силой и рассмотрим общий случай синхронизации порядка $n : m$. В заключение этого раздела мы обобщим понятия захвата фазы и частоты.

3.2.1 Стробоскопический метод

Здесь мы опишем подход, который будет широко использоваться ниже как в теории, так и в эксперименте – это **стробоскопический метод**. Название происходит от хорошо известного оптического прибора, позволяющего измерять частоту вращения или колебаний механического объекта путем освещения его периодическими вспышками, так, что если частота вспышек совпадает с измеряемой частотой, то объект кажется неподвижным. Если эти частоты слегка различны, то маятник (колесо) выглядит в пульсирующем свете медленно колеблющимся (вращающимся). Например, киносъемка позволяет нам наблюдать объекты стробоскопически с частотой 24 кадра в секунду.

Метод, который мы опишем в этом разделе, схож с принципом оптического стробоскопа. Единственное различие состоит в том, что мы наблюдаем не реальный объект в физическом пространстве, а положение точки в фазовом пространстве, т.е. ее положение на аттракторе.¹¹ Для периодических автоколебаний положение точки на аттракторе однозначно соответствует фазе автоколебаний. Идея метода очень проста: будем наблюдать фазу автоколебаний под периодическим воздействием не все время, а только в моменты времени $t_k = k \cdot T$, где T – период внешней силы и $k = 1, 2, \dots$. Другими словами, мы наблюдаем вынужденные движения в моменты времени, когда фаза внешней силы принимает некоторое фиксированное значение.

Перед тем, как перейти к примерам, опишем, что мы ожидаем увидеть при синхронизации не квазигармонического осциллятора. Предельный цикл сильно нелинейного осциллятора далек от окружности, и движение по нему в общем случае неравномерно. Это затрудняет использование вращающейся системы отсчета для анализа синхронизации, как было описано в предыдущем разделе; стробоскопический же метод работает и в этом случае. Если автоколебания синхронизованы внешней силой, т.е. $\Omega = \omega$, то ясно, что, если предельный цикл «подсвечивать» с частотой ω , то точка всегда будет

¹¹ В этом разделе мы имеем дело с предельными циклами, но в дальнейшем мы применим этот метод и к системам со странными (хаотическими) аттракторами.

находиться в одном и том же положении. Если автоколебания не захвачены, то определенного соотношения между фазами нет, и мы ожидаем, что в моменты наблюдения ϕ может принимать любые значения. Если наблюдать осциллятор достаточно долго, то можно вычислить распределение фаз $\phi_k = \phi(t_k)$. При синхронизации это распределение сосредоточено в одной точке, а в асинхронном состоянии оно широкое,¹² см. рис. 3.13.

Стробоскопический метод – это специальный случай **отображения Пуанкаре**, хорошо известного в теории колебаний и в нелиней-

¹² Если фазовая точка вращается неравномерно, то она более часто находится в определенной фазе, поэтому распределение широкое, но не обязательно равномерное. Отметим, что даже в случае квазигармонических автоколебаний вблизи перехода к синхронизации распределение не равномерное, поскольку под влиянием силы фазовая точка вращается неравномерно и разность фаз растет нелинейно (см. рис. 3.8).

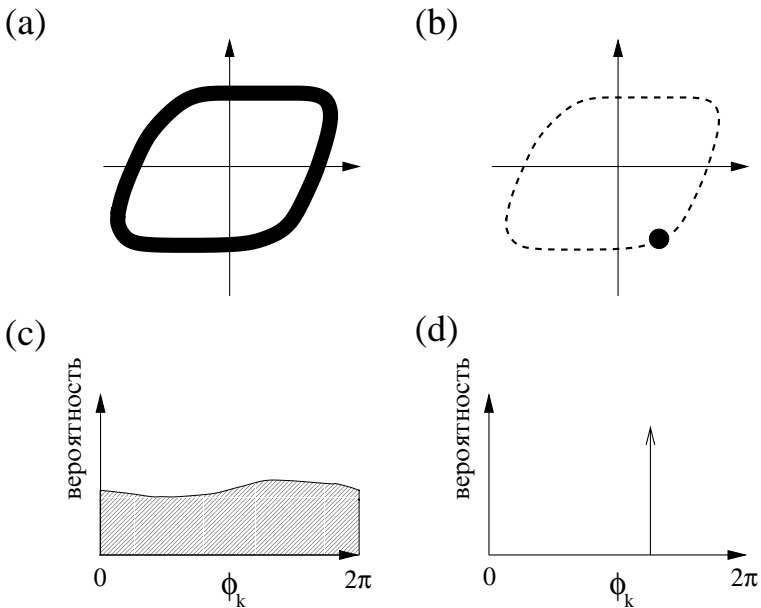


Рис. 3.13. Стробоскопическое наблюдение точки на предельном цикле. (а) Если частота автоколебаний отличается от частоты наблюдения (силы), $\Omega \neq \omega$, то точка может быть обнаружена в любом месте цикла. (б) Если осциллятор захвачен, $\Omega = \omega$, то фаза ϕ_k автоколебаний определенным образом соотносится с фазой силы и всегда одна и та же. (с, d) Распределение фазы ϕ_k вынуждаемых автоколебаний в моменты времени t_k , когда фаза внешней силы принимает определенное значение $\phi_e = \text{constant}$. В асинхронном режиме это распределение широкое (с), а в синхронном состоянии – это δ -функция (d).

ной динамике. Его важное преимущество состоит в том, что этот метод применим к произвольным автоколебаниям, не обязательно квазигармоническим, но также к релаксационным и даже к хаотическим (см. главу 5). Стробоскопический метод работает и для гармонической силы, и для силы, представляющей собой последовательность импульсов; он полезен при рассмотрении шумовых процессов и при экспериментальном исследовании синхронизации.

3.2.2 Пример: периодическая стимуляция светлячка

Известно, что самцы светлячков периодически испускают свет, чтобы привлечь самок. Они могут синхронизовывать эти вспышки с соседями (см. раздел 1.1, а также подробное описание в работе [Buck and Buck 1968]). Для исследования этого явления Buck *et al.* [1981] (см. также [Ermentrout and Rinzel 1984]) исследовали, как изменяются вспышки одного светлячка *Pteroptyx malaccae* под действием периодической последовательности световых импульсов. Результаты представлены на рис. 3.14. Период воздействия был изменен с 0.77 с до 0.75 с в момент времени $t \approx 22$ с. В результате этого переключения произошел переход от синхронизации к асинхронному режиму. Поскольку этот переход плохо виден на рис. 3.14, мы применим стробоскопический метод к двум временным интервалам, $0 < t < 22$ с и $22 < t < 130$ с (рис. 3.15).

Отметим, что как силу, так и сигнал (вынуждаемые автоколебания) можно рассматривать как последовательность событий (коротких импульсов), т.е. как *точечный процесс*. Естественно считать,

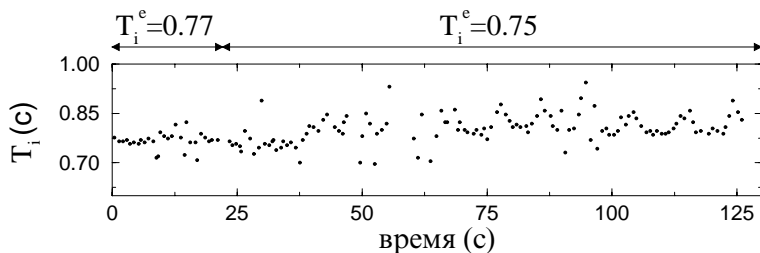


Рис. 3.14. Вспышки светлячка в ответ на периодическое воздействие. Интервалы времени T_i между последовательными вспышками представлены как функция времени. Период воздействия T_i^e при $t \approx 22$ с был изменен с 0.77 до 0.75 с. График построен с использованием данных из [Ermentrout and Rinzel 1984].

что интервал между импульсами составляет один цикл, в течение которого фаза увеличивается на 2π . Удобно наблюдать фазу колебаний светлячка ϕ в моменты внешних вспышек; эту фазу ϕ_k можно определить как долю соответствующего интервала между вспышками светлячка. Из рис. 3.15 находим, что в случае воздействия с периодом 0.77 с стробоскопически наблюдаемая фаза ϕ_k практически постоянна, в то время как при воздействии с периодом 0.75 с фаза распределена по окружности. Это свидетельствует соответственно о синхронизации и ее отсутствии. (Фаза ϕ_k не строго постоянна в синхронном режиме, поскольку светлячок — это, конечно, автогенератор с шумом.)

При построении стробоскопической картинки мы расположили фазы вспышек светлячка по окружности. Это не означает, что мы считаем осциллятор квазигармоническим: просто мы выбрали для амплитуды произвольное постоянное значение. Здесь важно подчеркнуть, что на самом деле амплитуда, т.е. форма цикла, никакого значения не имеет. Синхронизация проявляется как соотношение между фазами, и ее установление можно проследить с помощью стробоскопического графика и распределения стробоскопически на-

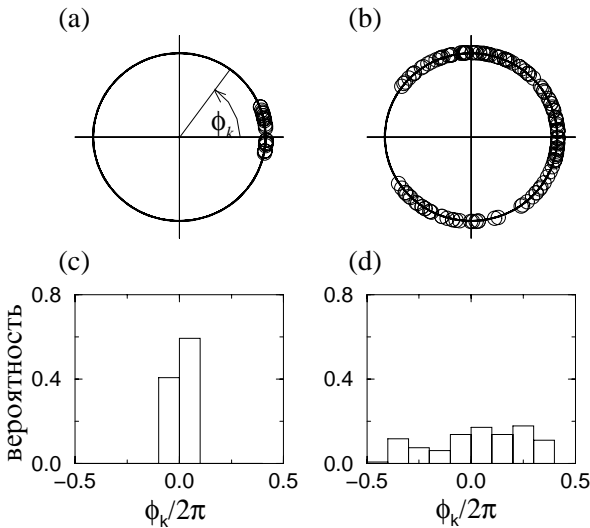


Рис. 3.15. Стробоскопическое наблюдение вспышек светлячка при периодическом воздействии. Распределение фаз на временном интервале $0 \text{ s} < t < 22 \text{ s}$ узкое (а и с), а в случае $22 \text{ s} < t < 130 \text{ s}$ — широкое (b и d), что соответствует потере синхронизации при $t \approx 22 \text{ s}$ (ср. с рис. 3.13). График построен с использованием данных из [Ermentrout and Rinzal 1984].

блюдаемой фазы.

3.2.3 Захват последовательностью импульсов

Довольно часто внешнюю силу можно рассматривать как последовательность импульсов. В этом случае автоколебания являются автономными в течение почти всего периода и только на коротком промежутке времени подвергаются действию силы. Чтобы пояснить этот момент, проведем снова «мысленный» эксперимент с маятниковыми часами. Пусть маятник подвергается периодическим толчкам, направление и сила которых постоянны. Иногда толчки ускоряют маятник (если они действуют в направлении его движения), а иногда они замедляют его. Если маятник изначально колебался медленнее, то толчки чаще ускоряют его, и наоборот. В результате происходит синхронизация. Это свойство используется для управления современными часами по радио: они периодически подстраиваются импульсным сигналом, исходящим от стандартных, очень точных часов. Импульсная сила и импульсное взаимодействие играют важную роль и в биологических системах, например, в ансамблях нейронов, водителях сердечного ритма (пейсмекерах) и т.д. Подобная сила часто используется при экспериментальном исследовании биологических осцилляторов. Мы уже рассматривали пример с периодически стимулируемым светлячком, ниже мы опишем периодическое воздействие на клетки сердца, задающие ритм его сокращений. Однако, перед тем как перейти к этому примеру, мы объясним эффект синхронизации последовательностью импульсов, используя стробоскопический метод (см. также [Харкевич 1962; Гласс и Мэки 1988]).

Переустановка фазы одиночным импульсом

В качестве предварительного шага рассмотрим влияние одиночного импульса на автоколебания. При этом мы используем следующее свойство возмущений: отклонение точки в радиальном направлении (т.е. по амплитуде) быстро затухает,¹³ в то время как возмущения фазы остаются (рис. 3.16). Таким образом, импульс сдвигает фазу $\phi \rightarrow \phi + \Delta$. Очевидно, что знак и абсолютное значение изменения фазы Δ зависят и от того, в какой фазе действовал импульс, и от его величины.

¹³ Отметим, что в данном случае мы не предполагаем, как раньше, что амплитуда не меняется под действием силы. Тем не менее, мы по-прежнему считаем, что амплитуда относительно устойчива, и поэтому ее значение очень быстро возвращается к невозмущенному состоянию.

Периодическая последовательность импульсов

Рассмотрим теперь воздействие периодической (с периодом T) последовательности импульсов на автоколебания с частотой ω_0 . Для определенности положим $\omega_0 > \omega = 2\pi/T$. Будем наблюдать автоколебания стробоскопически, в те моменты времени, когда действует импульс (рис. 3.17). Если бы не было силы, то, скажем, в течение трех последовательных наблюдений осциллятор был бы обнаружен в положениях, обозначенных на рис. 3.17а цифрами 1, 2 и 3. Поскольку $\omega_0 > \omega$, за один период между наблюдениями точка на цикле совершает один полный оборот плюс небольшой сдвиг, который мы обозначим ν .

Предположим теперь, что импульсная сила «включается», когда точка находится в положении 2. Если импульс сдвигает фазу в точности на величину ν , то этот сдвиг компенсирует смещение фазы из-за расстройки. Действительно, после действия импульса точка попадает в положение 1 и, пока не придет следующий импульс, она движется автономно. Это означает, что за время T точка переходит в положение 2; следующий импульс снова сдвигает ее в 1 (рис. 3.17б). Таким образом, наблюдая точку стробоскопически с периодом силы, мы всегда находим ее в одном и том же месте цикла, что означает синхронизацию.

Очевидно, что синхронизация будет наблюдаться, если импульсы имеют определенную амплитуду и прилагаются в определенной фазе. Как мы уже знаем, большая расстройка требует большей амплитуды силы: если между двумя импульсами точка сдвигается от положения 1 до положения 3, то для переустановки фазы на величину 2ν требуется импульс большей амплитуды, и сдвиг фаз между

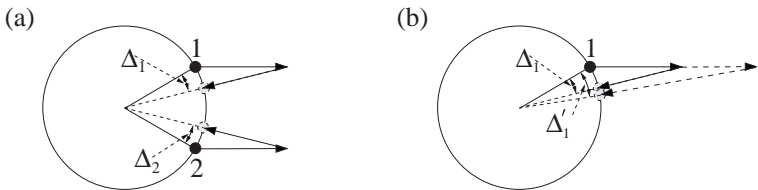


Рис. 3.16. Переустановка фазы автоколебаний одиночным импульсом $\phi \rightarrow \phi + \Delta$ (phase resetting). (a) Влияние импульса зависит от фазы осциллятора в момент воздействия. Если импульс действует на точку 1, то фаза отстает ($\Delta_1 < 0$); возмущение, приложенное в точке 2, приводит к положительному изменению фазы ($\Delta_2 > 0$). (b) Влияние силы импульса: чем больше амплитуда (вектор, показанный штриховой линией), тем больше изменение фазы ($|\Delta'_1| > |\Delta_1|$).

силой и синхронизованными автоколебаниями также увеличивается.

Если сила сначала прилагается в произвольной фазе, то она в общем случае не может немедленно «остановить» вращение точки, но сделает это после некоторого переходного процесса. Из простых геометрических соображений следует, что если сила начинает действовать, когда точка находится в положении 3, то первый импульс переведет ее в положение между 2 и 1, следующий приведет ее еще ближе к 1 и т.д.; в конце концов установится синхронный режим.

Более формально синхронизацию периодически возмущаемых автоколебаний можно описать, введя соотношение между фазами после n -го и $(n + 1)$ -го импульсов, $\phi_{n+1} = \phi_n + \nu + \Delta(\phi_n + \nu)$. Здесь постоянная ν есть набег фазы вследствие расстройки,¹⁴ а $\Delta(\phi_n + \nu)$ описывает переустановку фазы $(n + 1)$ -м импульсом. Условием син-

¹⁴ Для произвольного предельного цикла фаза растет со временем линейно (см. раздел 2.2), и поэтому ν постоянно. Следовательно, наш подход справедлив в общем случае: в нем не требуется, чтобы точка вращалась по циклу равномерно. Отметим также, что фазы $\phi + 2\pi$ и ϕ считаются здесь эквивалентными.

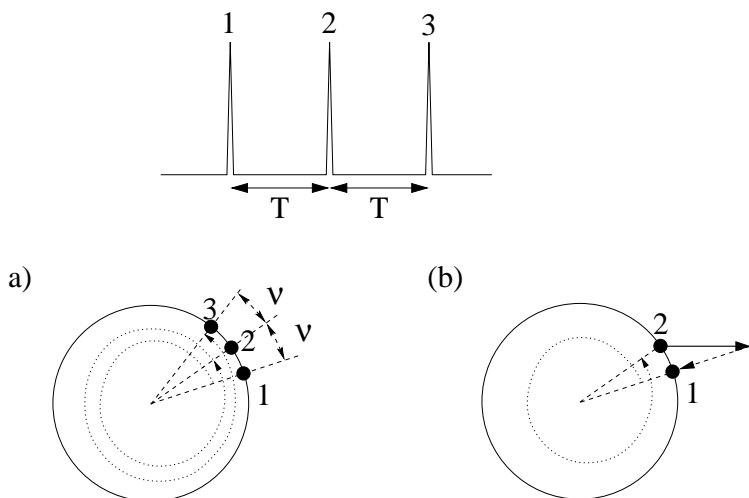


Рис. 3.17. (а) Стробоскопическое наблюдение автономных автоколебаний в моменты появления импульсов; когда появляется импульс 1, точка находится в положении 1, и т.д. Частота автоколебаний выбрана большей, чем частота импульсов, $\omega_0 > \omega = 2\pi/T$; поэтому стробоскопически наблюдаемая точка движется вдоль цикла. (б) Синхронизация путем переустановки фазы. Периодические импульсы, прикладываемые в положении 2, сдвигают фазу в положение 1, что компенсирует разность фаз, возникающую из-за расстройки. Между импульсами фаза эволюционирует как в автономной системе.

хронизации является равенство ϕ_{n+1} и ϕ_n . Отображение $\phi_n \rightarrow \phi_{n+1}$ известно в нелинейной динамике как **отображение окружности**. Этот способ описания динамики подробно обсуждается в разделе 7.3, здесь же мы ограничимся качественным описанием явления.

3.2.4 Синхронизация высшего порядка. Языки Арнольда

До сих пор мы всегда предполагали, что частота автономных автоколебаний только слегка отличается от частоты внешней силы, и синхронизация понималась как подстройка этих частот за счет воздействия, в результате чего они совпадали. Здесь мы покажем, что синхронизация может возникнуть и в более сложной форме. Рассмотрим снова автоколебания под действием периодических толчков и предположим, что каждый второй толчок отсутствует. Следовательно, осциллятор остается автономным в течение времени $2T$, и за это время точка на цикле смещается от положения 1 к положению 3. Из рис. 3.18 ясно, что достаточно большой импульс может компенсировать набег фазы 2ν , образовавшийся с момента предыдущего воздействия.

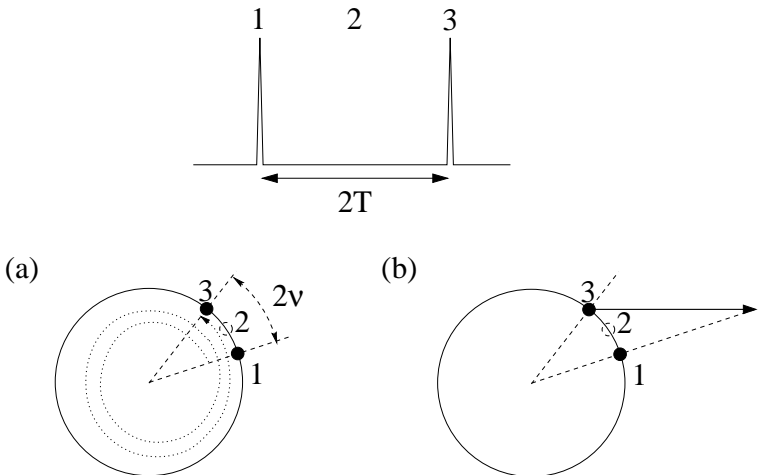


Рис. 3.18. Синхронизация автоколебаний последовательностью импульсов с периодом $2T$. (а) Между двумя импульсами точка переходит из положения 1 в положение 3. (б) Синхронизация может быть достигнута, если каждый второй импульс отсутствует, но амплитуда достаточно велика (ср. с рис. 3.17b).

Таким образом, автоколебания с частотой ω_0 могут быть захвачены силой с частотой, близкой (но не обязательно равной!) к $\omega_0/2$, и синхронизация тогда проявляется как возникновение следующего соотношения между частотами: $2\omega = \Omega$. Этот режим называют *синхронизацией порядка 2 : 1*. Очевидно, что можно добиться захвата и каждым третьим импульсом, хотя для этого понадобится еще более увеличить амплитуду воздействия при той же расстройке. В общем случае можно наблюдать синхронные режимы произвольного порядка $n : m$ (n импульсов на m периодах колебаний), что позволяет нарисовать целое семейство областей синхронизации (рис. 3.19). Эти области принято называть **языками Арнольда**.

Важно отметить, что языки высокого порядка обычно очень узки, так что их довольно трудно, если вообще возможно, наблюдать экспериментально. Это можно объяснить, анализируя рис. 3.17 и

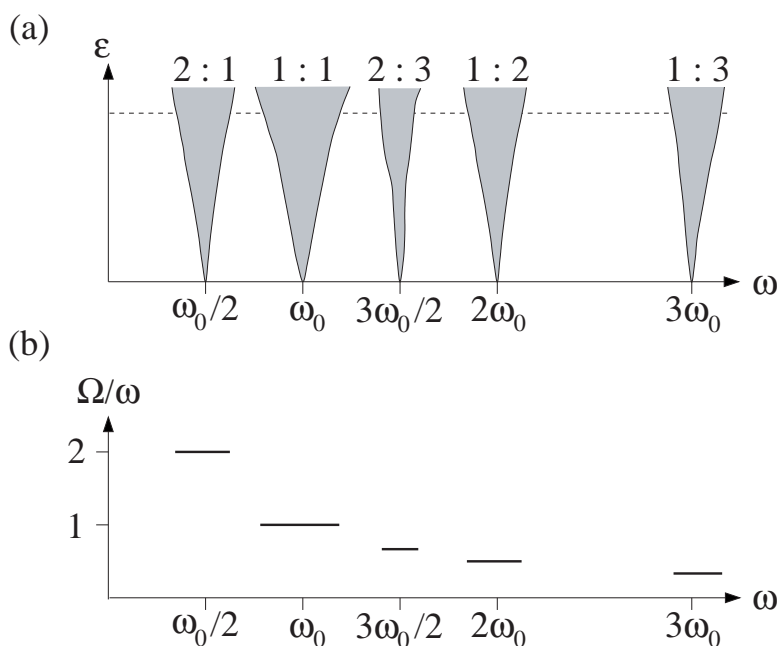


Рис. 3.19. (а) Схематическое представление языков Арнольда, или областей синхронизации порядка $n : m$. Числа над каждым языком обозначают порядок синхронизации, например, 2 : 3 означает выполнение соотношения $2\omega = 3\Omega$. (б) График зависимости Ω/ω от ω для фиксированной амплитуды силы (показанной штриховой линией на (а)) имеет характерный вид *чертовой лестницы*, см. полный график на рис. 7.16 (здесь мы не показываем детали между главными ступеньками).

3.18. Мы видим, что при той же расстройке для синхронизации порядка 2 : 1 требуется гораздо большая амплитуда импульсов. С другой стороны, если амплитуда фиксирована, то переустановка фазы, скажем, каждым вторым импульсом позволяет компенсировать меньшую расстройку, чем переустановка каждым импульсом. Это как раз и означает, что область синхронизации 2 : 1 уже, чем область синхронизации 1 : 1.

3.2.5 Пример: периодическая стимуляция пейсмекерных клеток

Для иллюстрации представленного выше теоретического рассмотрения проблемы мы выбрали эксперименты монреальской группы [Guevara *et al.* 1981, 1989; Гласс и Мэки 1988; Zeng *et al.* 1990; Glass and Shrier 1991] по периодической стимуляции спонтанно сокращающихся клеток, выделенных из предсердий куриного эмбриона. Рис. 3.20 показывает экспериментальную запись зависимости мембранного потенциала от времени, полученную с помощью введенного в клетку микроэлектрода. Импульс тока длительностью 20 мс подавался через тот же электрод, на графике он выглядит как большой пик; эти импульсы приводили к задержке фазы, увеличивая период колебаний ($T' > T$). Периодическое воздействие с различными частото-

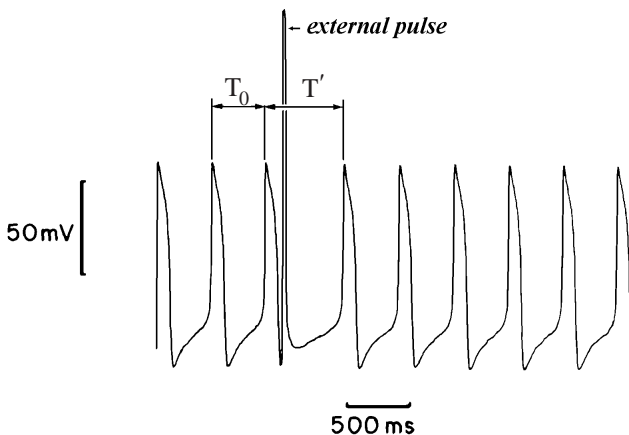


Рис. 3.20. Экспериментальная запись мембранного потенциала спонтанно осциллирующей клетки (из сердца куриного эмбриона) и влияния на него внешнего импульса тока (external pulse). Импульс подается через используемый для измерений электрод, он виден как большой пик на графике, приводящий к переустановке фазы колебаний. T_0 – базовый период, а T' – возмущенный период. Из [Zeng *et al.* 1990].

тами приводило к устойчивым режимам захвата фазы, показанным на рис. 3.21.

3.2.6 Захват фазы и частоты: общий подход

Описанные выше свойства синхронизации типичны для автоколебаний при слабой внешней силе и не зависят от свойств конкретной системы, в частности от того, являются ли колебания квазигармоническими или релаксационными. Они не зависят также и от формы внешней силы, т.е. является ли она гармонической (как предполагалось в разделе 3.1), прямоугольной (как в экспериментальном примере на рис. 3.10) или импульсной (как в примере, представленном на рис. 3.21). В общем случае может наблюдаться синхронизация порядка $n : m$ с языками Арнольда, подходящими к оси ω ; это означает, что синхронизация может наблюдаться при сколь угодно малой силе (рис. 3.19). При больших n и m области синхронизации очень узки, так что их не всегда удается наблюдать в эксперименте.

Чтобы рассмотреть синхронизацию высших порядков в рамках общего подхода, переформулируем условие захвата частоты в виде

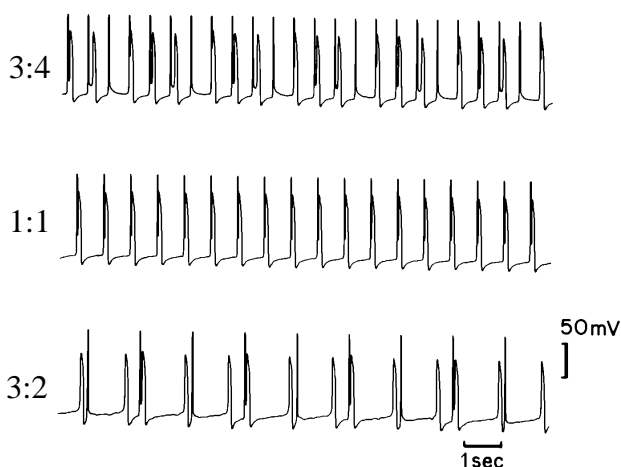


Рис. 3.21. Синхронизация группы клеток предсердий куриного эмбриона периодической последовательностью импульсов. Показаны режимы синхронизации порядка $3 : 4$, $1 : 1$ и $3 : 2$ при периодах стимуляции $T = 0.6$ с, $T = 0.78$ с и $T = 1.52$ с, соответственно. Все ритмы анализировались по прошествии достаточно длительного времени с начала стимуляции, чтобы переходные процессы прошли и установились стационарные устойчивые колебания. Из работы [Zeng *et al.* 1990], где представлены также режимы с другими значениями $n : m$.

$$n\omega = m\Omega. \quad (3.2)$$

Условие захвата фазы (уравнение (3.1)) также должно быть переформулировано для случая синхронизации порядка $n : m$. В качестве первого шага отметим, что разность фаз в синхронном режиме не обязательно постоянна, но может колебаться вокруг некоторого значения. Например, рассмотрим снова случай синхронизации $1 : 1$ последовательностью импульсов (рис. 3.17b) и построим графики фазы автоколебаний, фазы внешней силы и их разности (рис. 3.22). Мы видим, что разность фаз ограничена, но не постоянна. Это наблюдается не только при импульсном воздействии; так, например, разность фаз в общем случае будет колебаться, если движение по циклу неравномерно (или неравномерен рост фазы силы). Теперь, имея в виду возможность синхронизации порядка $n : m$, переформулируем условие захвата фаз (3.1) в более общем виде

$$|n\phi_e - m\phi| < \text{constant}. \quad (3.3)$$

Таким образом, существенно, что разность фаз $n\phi_e - m\phi$ остается *ограниченной*, что эквивалентно условию захвата частоты (3.2).

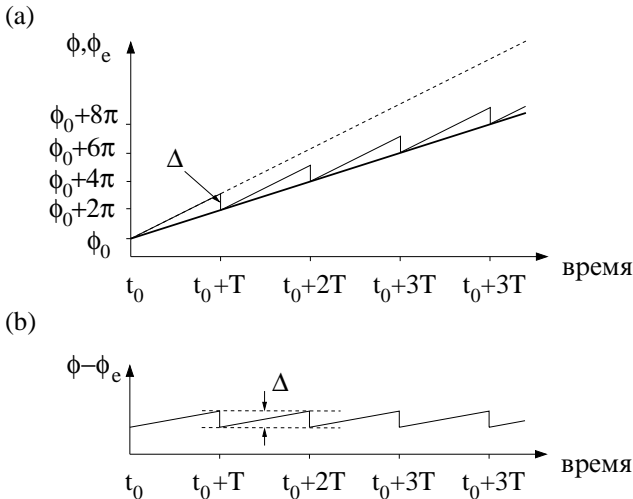


Рис. 3.22. Разность фаз в синхронном режиме не обязательно постоянна. (а) Фаза внешней силы ϕ_e растет линейно (жирная линия), а фаза автоколебаний под действием периодических толчков ϕ растет линейно между толчками (сплошная линия) и мгновенно переуставляется $\phi \rightarrow \phi - \Delta$ при каждом импульсе. Фаза автономных автоколебаний росла бы как показано штриховой линией. (б) Разность фаз $\phi - \phi_e$ ограничена и колеблется.

3.2.7 Пример: синхронизация лазера

Simonet *et al.* [1994] экспериментально и теоретически исследовали явления захвата частоты в рубиновом лазере на ядерном магнитном резонансе с задержанной обратной связью. Этот объект идеально подходит для изучения синхронизации, ввиду высокой стабильности колебаний и большого отношения сигнал/шум. В результате оказалось возможным наблюдать синхронные режимы высоких порядков. Автономный лазер демонстрирует периодические автоколебания интенсивности излучаемого света с частотой $f_0 \approx 40$ Гц. Внешний периодический сигнал добавлялся в цепь обратной связи. Он был либо синусоидальным, либо имел форму меандра. В обоих случаях наблюдались синхронные состояния разных порядков.

Захваченные режимы идентифицировались по графикам интенсивности излучения как функции внешнего сигнала V . Автоколебания считались захваченными, если существовала устойчивая фигура Лиссажу (рис. 3.23, ср. с рис. 3.9). Языки Арнольда для вынужденных автоколебаний лазера показаны на рис. 3.24. Отметим, что языки высших порядков очень узки – в пределах экспериментального разрешения они выглядят как линии.

Представленный пример еще раз показывает, что свойства синхронизации слабо возмущенных автоколебаний универсальны и не зависят ни от свойств автоколебаний, ни от формы силы. Последняя может быть либо последовательностью импульсов, как при теоретическом рассмотрении выше, либо синусоидальной, либо иметь

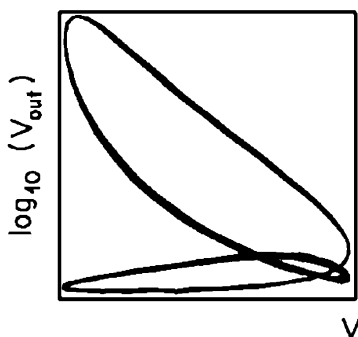


Рис. 3.23. Интенсивность излучения лазера $\log V_{\text{out}}$ как функция от внешнего сигнала V . Замкнутая кривая (фигура Лиссажу) указывает, что период автоколебаний равен в точности двум периодам сигнала (внешней силы), т.е. имеет место синхронизация 1 : 2 (ср. с рис. 3.9). Из Simonet *et al.*, *Physical Review E*, Vol. 50, 1994, pp. 3383–3391. Copyright 1994 by the American Physical Society.

форму меандра, как в эксперименте с лазером. В любом случае наблюдается семейство языков Арнольда, касающихся оси частот. С другой стороны, свойства синхронизации при средней и большой силе не универсальны. Например, в эксперименте с лазером язык $1:2$ расщепляется на два (рис. 3.24).

3.3 Особенности синхронизации релаксационных автоколебаний

В этом разделе мы опишем свойства синхронизации релаксационных осцилляторов типа накопление–сброс, введенных в разделе 2.4.2. Мы остановимся на трех способах воздействия на эти автоколебания: (i) сброс внешним импульсом, (ii) вариация порога и (iii) вариация собственной частоты, а также приведем экспериментальные примеры.

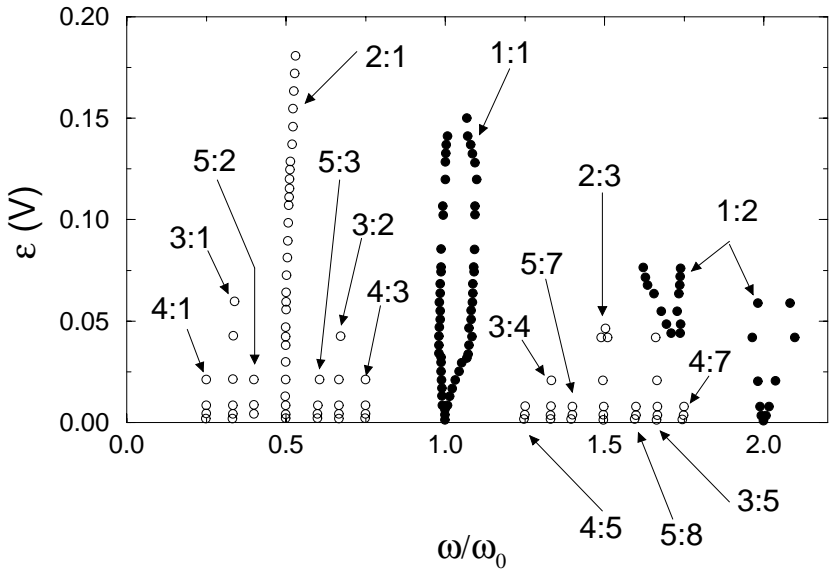


Рис. 3.24. Языки синхронизации для лазера под действием внешней силы с амплитудой ε и частотой ω . Границы языков порядков $1:1$ и $1:2$ показаны символом \bullet . Языки высших порядков очень узки; в пределах точности эксперимента они выглядят как линии, показанные символом \circ . Из Simonet *et al.*, *Physical Review E*, Vol. 50, 1994, pp. 3383–3391. Copyright 1994 by the American Physical Society.

3.3.1 Сброс внешним импульсом. Пример: кардиостимулятор

Используем снова простую модель из раздела 2.4.2 (см. рис. 2.12), но теперь введем в нее внешнюю силу. Представим, что наполненные жидкостью сосуды движутся по конвейеру и опрокидываются в резервуар осциллятора (рис. 3.25а). Таким образом, определенное количество жидкости добавляется в систему с частотой ω , зависящей от скорости конвейера. Предполагая, что вода добавляется практически мгновенно, мы можем рассматривать силу как периодическую последовательность импульсов; их амплитуда соответствует количеству добавляемой воды. Для простоты мы предположим, что и сброс происходит мгновенно, что типично для осцилляторов «накопление–сброс».

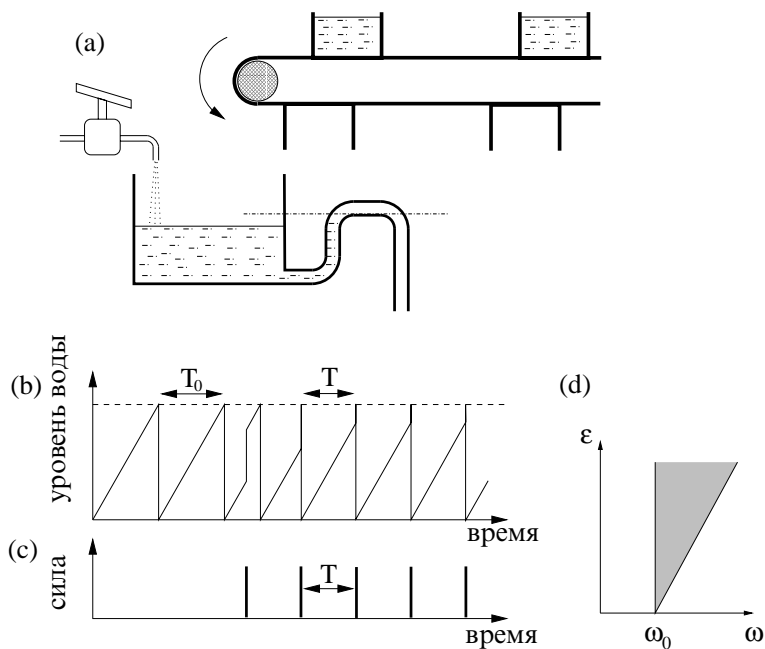


Рис. 3.25. (а) Действие импульсной силы на осциллятор «накопление–сброс». По конвейеру доставляется вода, которая периодически добавляется в сосуд. (б) Автономный осциллятор с периодом T_0 синхронизуется T -периодической последовательностью импульсов, показанной на рис. (с). Каждый импульс означает мгновенный подъем воды в главном сосуде; поэтому порог достигается раньше, чем в отсутствие силы. Отметим, что синхронизация устанавливается очень быстро, в течение двух циклов. (д) Поскольку сила может только увеличить частоту осциллятора, область синхронизации порядка 1 : 1 асимметрична.

Влияние импульсов на динамику можно легко понять: они уменьшают период колебаний, т.е. непосредственно переустанавливают фазу автоколебаний. Из простого рассмотрения (рис. 3.25) следуют основные свойства синхронизации:

- Дополнительно добавленная вода приводит к более раннему сбросу, т.е. уменьшает период, но не может его увеличить.
- Синхронизация устанавливается очень быстро, в течение нескольких циклов. Отметим, что, если импульс достаточно большой, чтобы вызвать сброс, т.е. его амплитуда выше порога, то синхронизация наступает сразу.

Механизм синхронизации последовательностью импульсов с 1960-х годов используется в устройстве, спасшем множество человеческих жизней – в кардиостимуляторе. В первых моделях как раз использовался периодический сигнал для коррекции аномально редкого сердечного ритма (брадикардии). В таких устройствах электрические импульсы с имплантированного генератора стимулировали водителя сердечного ритма (пейсмекаер) первого порядка – синоатриальный узел – и вызывали сокращение сердца.¹⁵ Подобные устройства используются также непосредственно после хирургического вмешательства на сердце; они заставляют сердце биться на большей частоте, чем обычно. Такой кардиостимулятор представляет собой внешний генератор, соединенный с сердцем посредством электродов. После улучшения состояния сердца электроды удаляют.

3.3.2 Электрическая модель сердца по Ван-дер-Полю и Ван-дер-Марку

Интересный пример представляет собой эксперимент, проведенный Ван-дер-Полем и Ван-дер-Марком [van der Pol and van der Mark 1928]. Вдохновленные высказанной в 1926 г. идеей Ван-дер-Поля о том, что сердце представляет собой релаксационный автогенератор, они сконструировали электрическую модель сердца. Их устройство состояло из трех релаксационных автогенераторов типа рис. 2.14,

¹⁵ Современные кардиостимуляторы – это программируемые адаптивные устройства, использующие сложные алгоритмы для слежения за сердечной деятельностью; они меняют ритм в зависимости от времени суток, физической активности и т.д.

связанных однонаправленно (рис. 3.26). Таким образом, один генератор действовал на другие как внешняя сила.¹⁶

Устройство содержало дополнительно три переключателя, так что на каждый генератор мог подаваться короткий импульс, моделирующий экстрасистолу. Суммируя импульсы от предсердий и желудочков (рассматривая их в качестве Р- и R-зубцов), Ван-дер-Поль и Ван-дер-Марк моделировали на экране осциллографа электрокардиограмму. По-видимому, этот эксперимент был первым случаем применения нелинейной динамики к биологической проблеме.

Ван-дер-Поль и Ван-дер-Марк изменяли связь между вторым и третьим генераторами (имитируя при этом проводимость между предсердиями и желудочками), начиная с достаточно большой. Действительно, при нормальных сокращениях сердца все три генератора должны быть синхронны; каждый Р-зубец сопровождается R-зубцом. Уменьшая связь, можно моделировать определенную сердечную патологию – блокаду, т.е. нарушение нормальной проводимости сигнала от предсердий к желудочкам. При такой патологии, называемой в наши дни блокадой второго порядка, m сокращений

¹⁶ Известно, что в норме сокращения сердца вызываются пейсмекером первого порядка (синоатриальным узлом) с собственной частотой около 70 биений в минуту. Если он отказывает, то сокращения вызываются пейсмекером второго порядка (атриовентрикулярным узлом); его частота ≈ 40 –60 биений в минуту. Если же проведение возбуждения от предсердий к желудочкам через атриовентрикулярный узел нарушено (полная блокада), то желудочки сокращаются в ритме пейсмекера третьего порядка (≈ 30 –40 биений в минуту) [Шмидт и Тевс 1983]. Таким образом, в нормально функционирующем сердце водители ритма синхронизованы синоатриальным узлом. Самый быстрый генератор доминирует – это типично для импульсно взаимодействующих релаксационных автогенераторов.

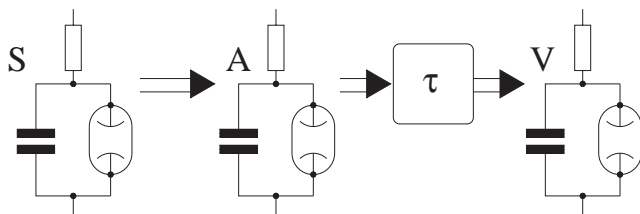


Рис. 3.26. Электрическая модель сердца по Ван-дер-Полю и Ван-дер-Марку. Три однонаправленно связанных релаксационных автогенератора представляют синоатриальный узел (S), предсердия (atria, A) и желудочки (ventricles, V). Задержка сигнала между вторым и третьим генераторами имитирует временную задержку τ , с которой сигнал передается от предсердий к желудочкам. Схематически по оригинальной схеме из [van der Pol and van der Mark 1928].

предсердия сопровождаются n сокращениями желудочка ($m > n$). В электрической модели эта блокада соответствовала синхронизации порядка $n : m$ второго и третьего генераторов.

Ван-дер-Поль и Ван-дер-Марк отметили, что уменьшение связи можно интерпретировать как уменьшение амплитуды сигнала, стимулирующего желудочки. Если эта амплитуда недостаточна, чтобы запустить третий генератор, то синхронизация порядка $1 : 1$ нарушается. Тем не менее, импульсы уменьшают период третьего генератора, что делает возможной синхронизацию с $m > n$.¹⁷

3.3.3 Вариация порога. Пример: электронный релаксационный автогенератор

Другая возможность воздействовать на генератор «накопление–сброс» заключается в изменении его порога. Основной эффект состоит в том, что увеличение (уменьшение) порога приводит к более длительному (короткому) периоду накопления. Периодически меняя (модулируя) порог, можно синхронизовать релаксационные автоколебания.

Здесь мы опишем механизм, впервые изучавшийся в классических экспериментах Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка [van der Pol and van der Mark 1927]. В их схеме, показанной на рис. 3.27, неоновая лампа не проводит ток, пока приложенное напряжение не достигнет порога u_{thresh} . В результате напряжение u на конденсаторе медленно возрастает, пока по достижении порога конденсатор не разрядится быстро через загоревшуюся лампу, после чего начинается новый цикл. Если в схему вводится переменное напряжение, то разряд происходит при $u = u_{\text{thresh}} - \varepsilon \sin \omega t$; т.е. порог меняется периодически. Рис. 3.28 объясняет, почему при изменении порога происходит синхронизация: если период изменений немного короче (длиннее) собственного периода автономной системы, то порог достигается раньше (позже), и частота автоколебаний подравняется к частоте силы. Очевидно, что возможна и синхронизация силой с частотой $\omega \approx m\omega_0$.

Свойство релаксационных автоколебаний легко и устойчиво синхронизоваться использовалось Ван-дер-Полем и Ван-дер-Марком [1927] для деления частоты. В их эксперименте частота внешней гармонической силы ω поддерживалась постоянной, в то время как

¹⁷ Читателей, интересующихся современными подходами к моделированию патологий сердечных ритмов, мы отсылаем к работам [Гласс и Мэки 1988; Guevara 1991; Yehia *et al.* 1999].

емкость конденсатора в автогенераторе увеличивалась. Поначалу частота автоколебаний оставалась постоянной и равной ω , затем она

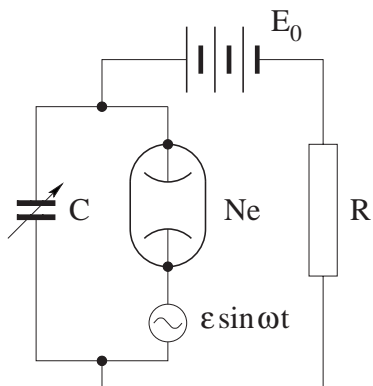


Рис. 3.27. Схема эксперимента с релаксационным автогенератором Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка [1927]. Подаваемое переменное напряжение меняет порог, при котором вспыхивает неоновая лампа и происходит разряд конденсатора.

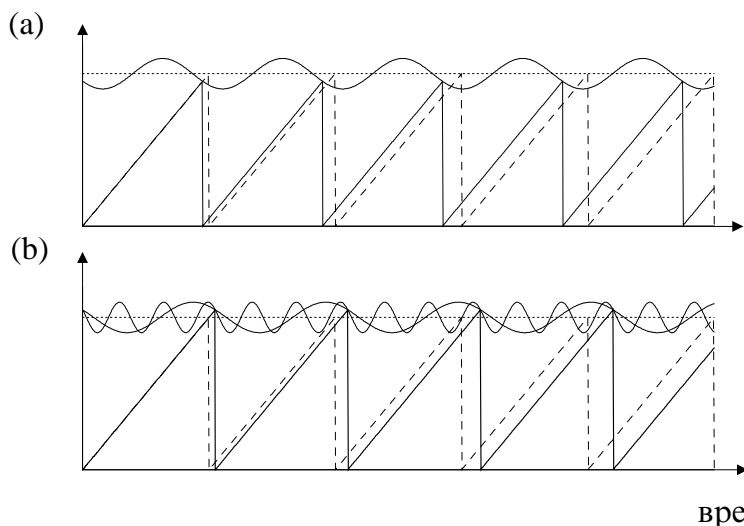


Рис. 3.28. Синхронизация релаксационных автоколебаний путем изменения порога. Порог автономной системы показан пунктиром; автоколебания в автономной системе – штриховой линией. Периодические изменения порога заставляют систему колебаться с частотой этих изменений; при этом частота может сдвигаться как вниз (а), так и вверх (б). Как видно из рис. (б), возможна и синхронизация высшего порядка (в данном случае 1 : 3).

внезапно уменьшалась до $\omega/2$. При дальнейшем увеличении емкости частота скачком уменьшалась до $\omega/3$ и так далее, вплоть до $\omega/40$ (рис. 3.29). Эти скачки соответствуют переходам между синхронными режимами порядка $1 : n$ и $1 : (n + 1)$. В более поздних экспериментах эти же авторы осуществили деление частоты на 200.

Обратим внимание на интересный факт: Ван-дер-Поль и Ван-дер-Марк отметили, что «прежде, чем частота перескакивала к следующему нижнему значению, в наушниках часто был слышен шум». Этот факт, по-видимому, свидетельствует о первом экспериментальном наблюдении хаотической динамики (см. главу 5).

Другим интересным экспериментальным наблюдением Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка был гистерезис при переходах между соседними синхронными режимами. Это означает, что скачки частоты при переходах $\omega/9 \leftrightarrow \omega/10$ и $\omega/10 \leftrightarrow \omega/11$ происходили при различных значениях емкости, в зависимости от того, уменьшалась она или увеличивалась в ходе эксперимента. Это объясняется перекрытием областей синхронизации (см. раздел 7.3.4).

3.3.4 Изменение собственной частоты

Другой базовый механизм синхронизации заключается в непосредственном воздействии силы на собственную частоту автоколебаний

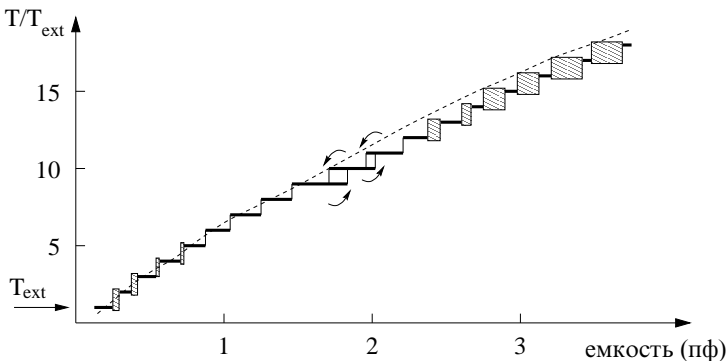


Рис. 3.29. Деление частоты с использованием синхронизации релаксационного автогенератора на неоновой лампе (рис. 3.27). Горизонтальные ступеньки соответствуют захвату частоты порядка $1 : m$; заштрихованные области отвечают значениям емкости, при которых был слышен нерегулярный шум. Штриховая линия показывает частоту колебаний в отсутствие внешней силы. Стрелки обозначают гистерезис при переходах между соседними синхронными состояниями. Из [van der Pol and van der Mark 1927].

ω_0 . В рамках модели «накопление–сброс» это можно представить как периодическое изменение скорости накопления. Действительно, между двумя сбросами в моменты времени t_i и $t_{i+1} = t_i + T_0$ уровень воды в сосуде или напряжение на конденсаторе растут линейно по времени

$$x = x_{\text{thresh}} \cdot \frac{t - t_i}{T_0} = x_{\text{thresh}} \cdot \frac{\omega_0 \cdot (t - t_i)}{2\pi},$$

так что скорость роста прямо пропорциональна частоте колебаний.¹⁸ Легко видеть, что сила, меняющая частоту, захватывает колебания. Пусть для простоты скорость роста между двумя сбросами постоянна и определяется значением силы при t_i , т.е. в точке начала накопления:

$$x = x_{\text{thresh}} \cdot \frac{(\omega_0 + \varepsilon \sin(\omega t_i + \bar{\phi}_e)) \cdot (t - t_i)}{2\pi}.$$

В зависимости от фазы силы $\omega t_i + \bar{\phi}_e$ в момент времени t_i частота сброса увеличивается или уменьшается, и поэтому наступает синхронизация.¹⁹

Интересный режим наблюдается при захвате $n : 1$ (рис. 3.30). В этом случае период вынужденных колебаний меняется от цикла к циклу (это называется также модуляцией частоты), и «выстрелы» (сбросы) не эквидистантны.

Этот механизм синхронизации может быть важен для понимания функционирования сенсорных нейронов. Такие нейроны реагируют на медленно меняющееся воздействие (т.е. на внешнюю силу) изменением интервала между импульсами; это означает, что интенсивность воздействия кодируется путем модуляции частоты.

Другой пример из физиологии, относящийся к этому типу воздействия, имеет отношение к сердечной деятельности. Действительно, автономная нервная система меняет скорость генераторов «накопление–сброс», образующих водителя ритма первого порядка (синоатриальный узел), что меняет частоту сокращений сердца. Мы вернемся к этим примерам в главе 6.

¹⁸ Отметим, что модель «накопление–сброс» можно интерпретировать и следующим образом: вместо того, чтобы говорить о накоплении некоторой переменной x до достижения ею порога x_{thresh} , можно рассматривать «накопление» фазы до достижения ею значения 2π . Или же можно говорить о том, что интегрируется мгновенная частота $d\phi/dt$. Таким образом можно свести систему к фазовому осциллятору.

¹⁹ Простое рассмотрение величины $\omega = \omega_0 + \varepsilon \sin(\omega t_i + \bar{\phi}_e)$ дает условие 1 : 1-синхронизации в виде $|\omega_0 - \omega| \leq \varepsilon$ и величину постоянного сдвига фазы в синхронном режиме $\sin^{-1}((\omega - \omega_0)/\varepsilon)$.

3.3.5 Модуляция и синхронизация

Здесь мы хотим подчеркнуть важное различие между синхронизацией и модуляцией. Отметим, что в случае захвата порядка $n : 1$ сила действует на колебания двояко:

- (i) она приводит к *модуляции* периода колебаний с периодом силы;
- (ii) она приводит к сдвигу среднего периода колебаний, так что $m \cdot \langle T_i \rangle = T$, т.е. к *синхронизации*.

Эти явления различны, хотя могут и сосуществовать. Действительно, возможна синхронизация без модуляции (например, захват частоты порядка $1 : 1$), или же комбинация обоих эффектов, как показано на рис. 3.30.

Вообще говоря, модуляция без синхронизации наблюдается, если сила влияет на колебания, но не может подстроить их частоту. Такая ситуация возникает, например, если сила воздействует не на сам осциллятор, а лишь на распространение колебательного сигнала по некоторому каналу. В качестве примера (несколько искусственного), рассмотрим сокращения сердца. Их можно характеризовать пульсом, измеряемым, скажем, на запястье. Если скорость распространения по сосудам меняется (например, в результате изменений давления), то некоторые импульсы распространяются быстрее, а некоторые отстают, и в результате наблюдается модуляция цепочки импульсов. Но число импульсов, т.е. средняя частота сердцебиений, при этом не меняется, так что синхронизация таким воздействием

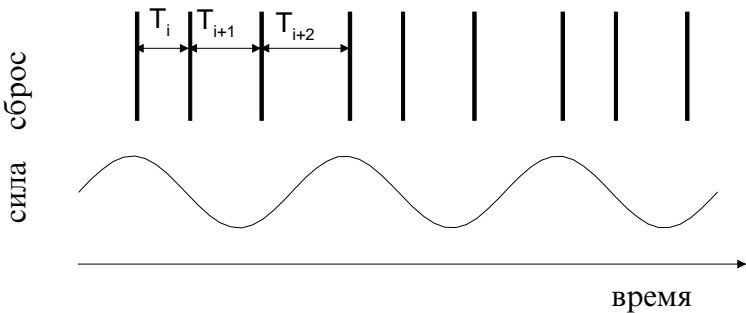


Рис. 3.30. Синхронизация автогенератора «накопление–сброс» путем вариации его собственной частоты. Показан режим захвата $3 : 1$; на одном периоде силы происходит три сброса. Отметим, что период захваченного автогенератора модулируется силой, $T_i < T_{i+1} < T_{i+2}$, и интервалы между сбросами не одинаковы.

невозможна. Различие между синхронизацией и фазовой модуляцией иллюстрируется на рис. 3.31.

3.3.6 Пример: синхронизация песен сверчков

В конкретном эксперименте не всегда возможно выявить точный механизм действия силы. В общем случае воздействие может иметь комбинированный вид. Поэтому в последующем примере, как и в примерах следующего раздела, мы не обсуждаем механизм действия силы, а делаем основной акцент на общих свойствах синхронизации.

Сверчок (*Oecanthus fultoni* или snowy tree cricket) – это широко распространенный в Соединенных Штатах вид насекомых. Эти насекомые способны синхронизовать издаваемые ими звуки, реагируя на стрекотание своих соседей. Песня сверчка – это продолжительная последовательность коротких звуков (стрекотаний), которые возникают, когда самец поднимает специальные подкрылья и трет их друг о друга. Каждый стрекот состоит из 2–11 импульсов, соответствующих складыванию крыльев. Ритм стрекотания очень регулярен в хоре; обычно это наблюдается и для одиночных певцов [Walker 1969].

Чтобы исследовать механизм акустической синхронности сверчков, Walker [1969] провел следующие эксперименты. Он записал один стрекот и затем непрерывно воспроизводил его самцам, поющим на насестах в изолированных стеклянных цилиндрах. Тестовые звуки транслировались с интенсивностью, близкой к естественной, и с различной частотой. Акустический ответ подопытного сверчка записыв-

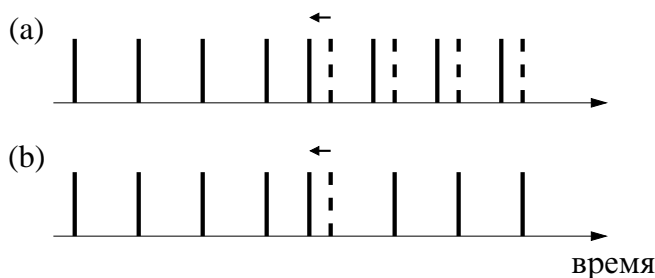


Рис. 3.31. Отличие синхронизация от модуляции. (а) Если импульс появляется через фиксированный промежуток времени после предыдущего, то, сдвинув один импульс, мы сдвигаем и все последующие. В этом случае сила влияет на частоту последовательности и синхронизирует ее. (б) Если же сдвиг одного импульса не влияет на последующие, то частота последовательности измениться не может. В этом случае сила может только модулировать последовательность, но не синхронизовать ее.

вался на пленку для последующего анализа. Таким образом, сверчок подвергался периодическому внешнему воздействию.

Основной результат этих исследований показан схематически на рис. 3.32. Можно видеть, как синхронизация возникает вслед за появлением внешних стрекотаний. Для диаграммы, показанной на рис. 3.32а, их частота была 242 стрекота в минуту, а частота стрекотания сверчка до трансляции была 185. Как и ожидалось, фаза ритма, который был изначально медленнее, запаздывает по отношению к фазе более быстрого искусственного ритма. Соответственно, если начальная частота стрекотаний была 192, а частота трансляции – 166 в минуту, то сверчок опережал по фазе синхронизирующий сигнал (рис. 3.32b). Наконец, синхронизация порядка 1 : 2 (два искусственных стрекота на один естественный), также возможна, как можно видеть из рис. 3.32с.

Как это характерно для релаксационных осцилляторов, сверчок способен очень быстро подстроить свое пение к подобному. Удлиняя или укорачивая собственный период в ответ на предыдущий стрекот, насекомое способно достичь синхронности в течение двух циклов.

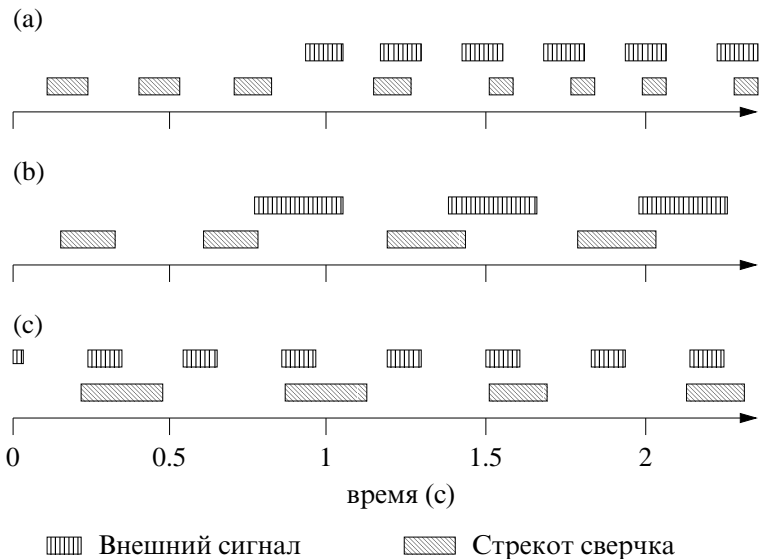


Рис. 3.32. Синхронизация стрекотания сверчка. Левая часть графиков (а) и (b) показывает свободное, без внешнего воздействия, пение. Звук, издаваемый подопытным сверчком, захватывается более быстрым (а) или более медленным (b) искусственным ритмом. Пример захвата порядка 1 : 2 показан в (с). Нарисовано схематически с использованием данных из [Walker 1969].

3.4 Синхронизация в присутствии шума

Автоколебательные системы представляют собой идеализацию встречающихся в природе осцилляторов. В этих моделях пренебрегается флуктуациями макроскопических параметров и считается, что осцилляторы изолированы от окружающей среды. В действительности же в реальных системах всегда присутствуют тепловые флуктуации; часто эти системы подвергаются слабым нерегулярным внешним воздействиям. Обычно все эти факторы нельзя учесть точно, поэтому естественные флуктуации и влияние внешних источников моделируется неким случайным процессом, или шумом.

В этом разделе мы рассмотрим захват частоты автоколебаний внешней силой при наличии шума. С этой целью мы сначала обсудим, как шум влияет на автономные автоколебания – основным эффектом здесь будет диффузия фазы.

3.4.1 Диффузия фазы в автоколебаниях с шумом

Как и в разделе 3.1, мы будем рассматривать осциллятор во вращающейся системе отсчета, используя для описания динамики фазы модель легкой частицы в вязкой жидкости. В отсутствие шума фазовая точка находится в состоянии равновесия в произвольной точке на цикле (пока мы рассматриваем ситуацию без внешней силы!), и мы знаем, что, по отношению к сдвигам фазы, это положение равновесия нейтрально устойчиво (см. рис. 2.3 и 2.4с). Поэтому даже очень слабый шум, действуя на фазу, сдвигает ее взад-вперед. В результате движение фазовой точки во вращающейся системе отсчета можно рассматривать как *случайное блуждание*.

Важно иметь в виду, что даже малые смещения фазы накапливаются, поскольку возмущения фазы не растут и не уменьшаются. В результате фаза может сильно отклоняться от линейной функции времени $\phi = \omega_0 t + \phi_0$, которая наблюдалась бы в отсутствие шума. Ввиду аналогии с диффузией броуновской частицы, подвергающейся случайным ударам со стороны молекул жидкости, часто говорят о **диффузии фазы**.²⁰ Для иллюстрации динамики фазы в присутствии шума мы приводим график фазы дыхания человека (рис. 3.33).

Из-за шума период колебаний не постоянен. Тем не менее, в среднем отклонения в положительном и отрицательном направлении компенсируют друг друга, и средний период $\langle T \rangle$, вычисленный по

²⁰ В отличие от блужданий броуновской частицы блуждания фазы одномерны (вдоль цикла).

числу циклов за большой интервал времени, совпадает с периодом колебаний в отсутствие шума T_0 .²¹ Соответственно, средняя частота равна ω_0 .

3.4.2 Автоколебания с шумом и внешней силой. Проскоки фазы

Рассмотрим сначала слабую внешнюю силу с частотой $\omega = \omega_0$ (т.е. будем считать расстройку равной нулю). В результате такого воздействия частица блуждает не по горизонтальной поверхности, а по 2π -периодическому потенциальному рельефу (рис. 3.34, ср. также с рис. 3.3b), и мы имеем дело с двумя противоположными тенденциями: сила стремится удержать частицу в минимуме потенциала, а шум выбивает частицу из него. Результат противодействия этих эффектов зависит от интенсивности и от распределения шума. Если шум слабый и *ограниченный*, то он не может перебросить частицу через потенциальный барьер, и она флуктуирует вокруг устойчивого

²¹ Мы предполагаем, что шум симметричный, т.е. он сдвигает фазу вперед и назад с равной вероятностью, так что случайные блуждания происходят без сноса. Если это не так, то шум сдвигает среднюю частоту $\langle \omega_0 \rangle$.

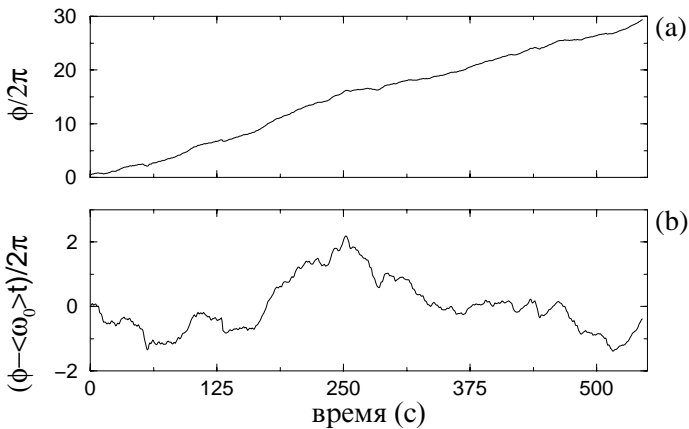


Рис. 3.33. Случайные блуждания фазы дыхания. Дыхание человека управляется генератором ритма, расположенном в стволе мозга. Конечно, эту систему нельзя рассматривать как идеальный автогенератор без шума. Фаза дыхания определялась по записи потока воздуха через нос, измерявшегося термистором. Из-за шума фаза не растет линейно (а), а совершает случайные блуждания. Более наглядно изображение отклонения фазы от линейного роста $\langle \omega_0 \rangle t$ (b). Отметим, что эти отклонения не малы по сравнению с 2π .

состояния равновесия – минимума потенциала. Если шум достаточно сильный, или если он *неограниченный* (например, гауссовский), то частица время от времени перепрыгивает через потенциальный барьер и довольно быстро приходит в соседнее состояние равновесия $\phi^0 \pm 2\pi$. Физически это означает, что фазовая точка совершает дополнительный, по сравнению с внешней силой, оборот вдоль предельного цикла (или совершает на один оборот меньше). Эти относительно быстрые изменения разности фаз на 2π называют *проскоками фазы*.²²

Ситуация качественно меняется, если частота силы отличается от частоты автоколебаний. В этом случае потенциал не горизонтальный, а наклонный (ср. с рис. 3.5а). Снова можно различить два случая. Если проскоки невозможны (т.е. шум ограниченный и слабый), то фаза флуктуирует вокруг постоянного значения (рис. 3.35). В другом случае, когда шум сильный или неограниченный, наблюдаются проскоки фазы. Однако вероятности проскоков направо и налево теперь различны: естественно, частица более часто скачет вниз, чем вверх (рис. 3.36). Поэтому, хотя большую часть времени частица флуктуирует вокруг состояния равновесия, в среднем она соскальзывает вниз по потенциалу. Поэтому динамика фазы существенно неоднородна (по крайней мере, при слабом шуме): долгие интервалы синхронизации перемежаются проскоками фазы.

Свойства синхронизации шумовых автоколебаний

Здесь мы обсудим, как можно охарактеризовать синхронизацию шумовых автоколебаний и в какой степени к этой ситуации примени-

²² В действительности, если шум достаточно сильный, то несколько скачков могут следовать непосредственно друг за другом, так что возможен проскок также и на $\pm 4\pi$ и т.д.

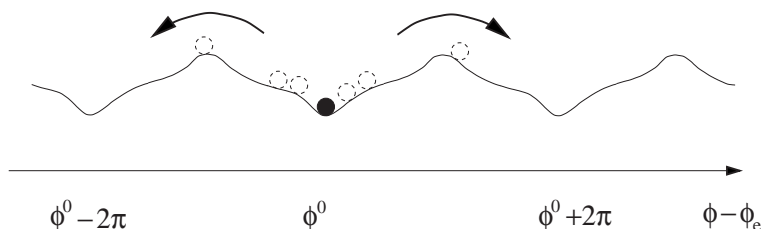


Рис. 3.34. Диффузия фазы для автоколебаний, на которые действует внешняя сила с нулевой расстройкой: фазовая точка колеблется вокруг устойчивого состояния равновесия $\phi - \phi_e = \phi^0$ и иногда перескакивает к эквивалентному состоянию $\phi^0 \pm 2\pi k$.

мы понятия захвата частоты и фазы. Действительно, в некоторых приведенных выше экспериментальных примерах мы видели, что идеального совпадения с теорией не наблюдается, ввиду присутствия шума. При рассмотрении этих неидеальностей будем различать два случая: (i) слабый ограниченный шум и (ii) неограниченный или сильный ограниченный шум.

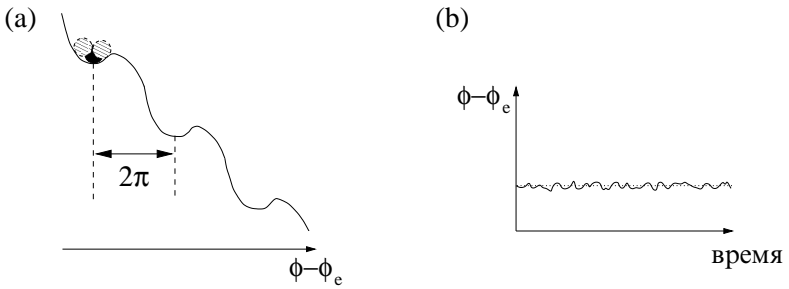


Рис. 3.35. Динамика фазы вынуждаемых автоколебаний в присутствии слабого ограниченного шума. (a) Частица колеблется вокруг устойчивого состояния равновесия, но не может выйти из окрестности минимума потенциала. Соответственно, разность фаз флуктуирует вокруг постоянного значения (пунктир), которое она бы принимала в отсутствие шума (b).

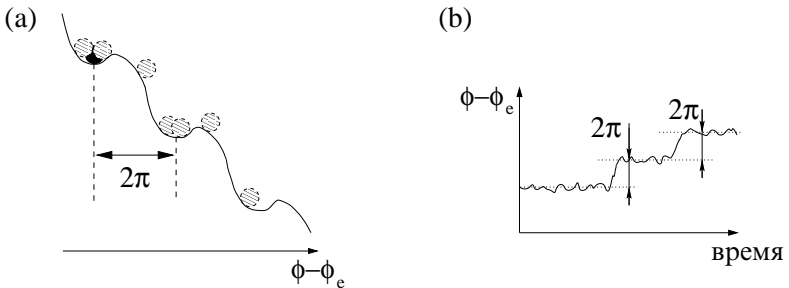


Рис. 3.36. Фазовая динамика вынуждаемых автоколебаний с неограниченным шумом. (a) Частица колеблется вокруг устойчивого состояния равновесия ϕ^0 , но иногда перескакивает к эквивалентному состоянию $\phi^0 \pm 2\pi k$. Хотя возможны скачки в обоих направлениях, частица чаще перескакивает через более низкий барьер, т.е. вниз. Эти скачки (проскоки фазы) четко видны на рис. (b). Зависимость разности фаз от времени напоминает динамику фазы при автоколебаниях без шума в случае перехода к синхронизации (см. кривую 3 на рис. 3.8b), но при наличии шума проскоки происходят нерегулярно.

Слабый ограниченный шум

Если расстройка мала, то такой шум не приводит к проскокам. Другими словами, шум не может перебросить частицу из одного минимума потенциала в другой (рис. 3.35). В этом случае разность фаз в присутствии шума флуктуирует случайным образом, но остается ограниченной, и условие захвата фазы (3.3) по-прежнему справедливо. Средняя частота Ω шумовых автоколебаний также захвачена силой. При большей расстройке интенсивность шума становится достаточной для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер, и частица начинает соскальзывать вниз. Отметим, что переход происходит при меньшей расстройке, чем в отсутствие шума (рис. 3.37а). Подчеркнем, что в рассматриваемом случае область синхронизации не доходит до оси ω : слабая сила не может удержать частицу в потенциальной яме.

Неограниченный или сильный шум

Если шум неограниченный (например, гауссовский), или ограниченный, но сильный, то происходят проскоки фазы. Если потенциал наклонен, то скачки вниз происходят более часто, и в среднем разность

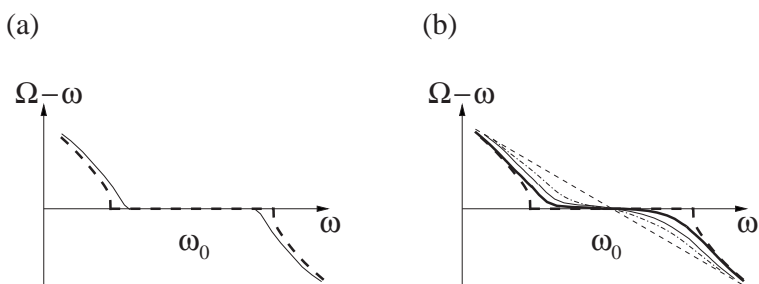


Рис. 3.37. График разность наблюдаемых частот – расстройка для автоколебаний с шумом. (а) При слабом ограниченном шуме существует диапазон расстроек, при которых частота автоколебаний Ω в точности равна частоте силы ω . Эта область (сплошная линия) меньше, чем в отсутствие шума (жирная штриховая линия). (б) При неограниченном шуме частоты Ω и ω совпадают только в одной точке, а не на конечном интервале. Если шум очень слабый (жирная линия), то можно говорить о примерном равенстве частот в некотором интервале расстроек $\omega - \omega_0$. При более сильном шуме (сплошная и штрих-пунктирная линии) этот интервал исчезает. Строго говоря, синхронизация проявляется только как тенденция: внешняя сила подтягивает частоту автоколебаний к своей частоте, но шум препятствует идеальному захвату. Очень сильный шум полностью разрушает синхронизацию (штриховая линия). Жирная штриховая линия соответствует синхронизации в отсутствие шума.

фаз растет при сколь угодно слабой расстройке. Это важный момент: строго говоря, неограниченный шум разрушает синхронизацию, так что ни условие захвата фазы, ни условие захвата частоты, сформулированные для детерминированного случая, не выполняются. Тем не менее, по крайней мере при слабом шуме, можно говорить о приближенном равенстве частот в некотором диапазоне расстроек (рис. 3.37b). С ростом интенсивности шума этот диапазон уменьшается, и синхронизация проявляется как слабое «подтягивание» наблюдаемой частоты Ω к частоте внешней силы ω . Другими словами, частоты стремятся подстроиться, но, за исключением одной точки, идеального совпадения не происходит.

Обсудим теперь соотношение между фазами автоколебаний и силы. Мы уже отмечали, что разность фаз $\phi - \phi_e$ может быть сколь угодно большой вследствие диффузии фазы (если только шум не является ограниченным и слабым). Таким образом, для шумовых систем, вообще говоря, нельзя говорить о захвате фазы, поскольку разность фаз не ограничена. С другой стороны, частица чаще находится

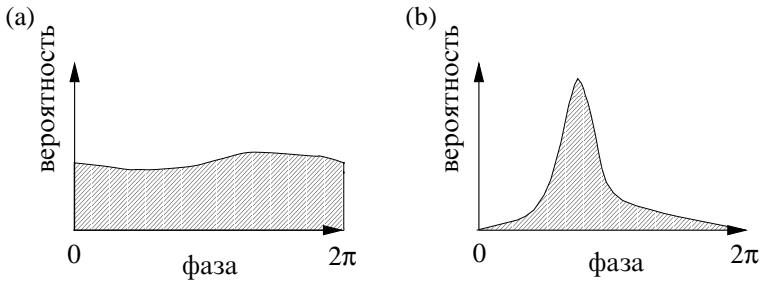


Рис. 3.38. Широкое (а) и сосредоточенное (б) распределения разности фаз для шумовых автоколебаний, в отсутствие и в присутствии внешней силы, соответственно. Если сила отсутствует, то разность фаз может принимать любое значение с равной вероятностью, вследствие диффузии фазы (а). Внешняя сила, приводя к появлению минимума потенциала, делает определенное значение разности фаз более вероятным (б). Схожие распределения получаются при стробоскопическом наблюдении фазы автоколебаний с периодом внешней силы. При таком наблюдении фаза захваченных автоколебаний без шума всегда обнаруживается в одном положении (см. рис. 3.13); шум уширяет распределение, но максимум, служащий индикатором синхронизации, сохраняется (см. также экспериментальный пример на рис. 3.15). Распределение, схожее с (б), наблюдается также в отсутствие синхронизации, если фаза процесса модулируется.

в минимуме потенциала,²³ и поэтому определенные значения $\phi - \phi_e$ наблюдаются с большей вероятностью. Если рассмотреть разность фаз на окружности $[0, 2\pi]$ ²⁴ и построить плотность распределения фазы, то мы увидим, что она не равномерна, а имеет выраженный максимум (рис. 3.38). Положение максимума отвечает разности фаз, которая наблюдалась бы в отсутствие шума. Шум уширяет пик, но максимум все же виден. Существование предпочтительного значения разности фаз $\phi - \phi_e$ можно интерпретировать как статистический аналог захвата фаз. Отметим, однако, что похожее распределение фаз наблюдается и в автоколебаниях без шума, вблизи перехода от синхронизации, когда динамика фазы – перемежающаяся (см. кривые 3 и 4 на рис. 3.8), а также в случае модуляции, когда синхронизация отсутствует (см. раздел 3.3.4).

3.4.3 Пример: захват дыхания при механической вентиляции

Для иллюстрации вернемся к эксперименту [Graves *et al.* 1986] (см. раздел 3.1.4), в котором определялась область синхронизации при механической вентиляции легких. (рис. 3.39). В этом случае нельзя однозначно определить границу области синхронизации. Более того, при очень малых амплитудах силы синхронизация невозможна: сила слишком слаба, чтобы преодолеть действие шума.

3.4.4 Пример: захват сердечного ритма слабым внешним стимулом

Другой пример синхронизации шумовых автоколебаний периодической внешней силой описан Анищенко и др. [Anishchenko *et al.* 2000]. В этой работе исследовался захват сердечного ритма человека слабым периодическим сигналом. В ходе эксперимента испытуемые находились в покое перед экраном монитора, в то время как компьютер периодически генерировал акустические и визуальные сигналы – одновременно со звуковыми импульсами на экране появлялись цветные квадраты.

²³ Сила старается удержать частоту в определенном положении и поэтому подавляет диффузию; в случае слабого ограниченного шума диффузия полностью исчезает.

²⁴ Другими словами, мы рассматриваем разные состояния равновесия как эквивалентные и вычисляем разность фаз по модулю 2π : $(\phi - \phi_e) \bmod 2\pi$.

Отклик на воздействие определялся по кардиограмме, снимаемой стандартным образом. Хорошо известно, что каждый нормальный сердечный цикл содержит очень острый, хорошо выделенный пик, называемый R-зубцом (см. для иллюстрации рис. 6.1); интервал между соседними R-пиками обычно берется в качестве интервала между сердцебиениями. Естественно, что сокращения сердца – далеко не периодические автоколебания,²⁵ и легко видеть, что интервалы между биениями существенно меняются со временем; эта вариативность хорошо известна в физиологии. Поэтому можно говорить только о средних периоде и частоте сокращений сердца. Чтобы оценить среднюю частоту F , достаточно подсчитать число n R-пиков за определенный интервал времени τ и найти $F = n/\tau$.

В описываемых экспериментах сначала определялась частота f_0 сердечного ритма испытуемого *без воздействия*. Затем испытуемый подвергался внешней стимуляции с различными частотами f . В течение 10 минут частота f поддерживалась постоянной, но она изменялась в пределах $0.75f_0$ – $1.25f_0$ от одного испытания до другого.

²⁵ Существуют различные точки зрения на природу нерегулярности сердечного ритма – шум это или хаос вместе с шумом; в последующем мы покажем, что этот аспект не влияет на свойства синхронизации.

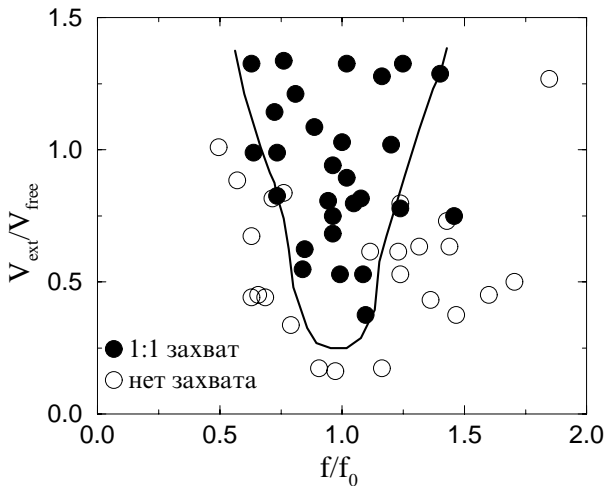


Рис. 3.39. Область 1 : 1 синхронизации спонтанного дыхания аппаратом искусственного дыхания, определенная по данным от семи испытуемых. Сила воздействия характеризуется дыхательным объемом V_{ex} . Оси частоты и объема нормированы на среднюю «свободную» частоту и на объем дыхания каждого испытуемого, соответственно. Граница области синхронизации проведена произвольно. Из [Graves *et al.* 1986].

В результате были получены кривые разность наблюдаемых частот – расстройка; для одного из испытуемых она показана на рис. 3.40. Полка вблизи $f \approx f_0$, хотя и не идеально горизонтальная, указывает на захват частоты. Отметим, что воздействие в этих экспериментах было действительно слабым: специально проверялось, что воздействие без расстройки (т.е. с $f = f_0$) не меняло сердечный ритм и другие важные характеристики, такие как давление крови и ударный объем.

3.5 Различные примеры

В этом разделе мы приведем несколько примеров синхронизации в живых системах.

3.5.1 Циркадные ритмы

Поведение людей и животных подчиняется точному 24-часовому ритму покоя и активности, сна и бодрствования. Этот ритм, называемый циркадным, является результатом адаптации организмов ко внешнему воздействию – циклу смены дня и ночи (см. [Aschoff *et al.* 1982; Moore 1999; Sassone-Corsi 1999] и приведенные там ссылки). Поведенческий цикл сопровождается суточными колебаниями выде-

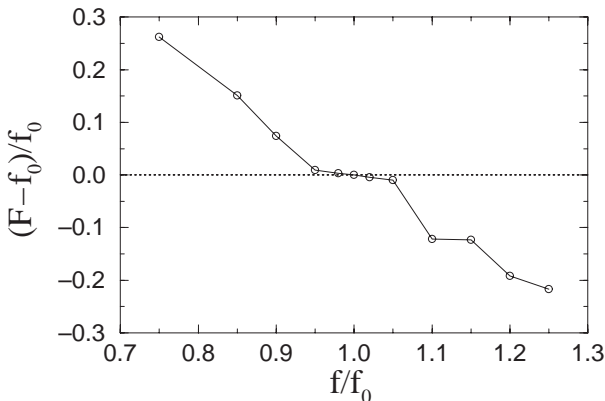


Рис. 3.40. Наблюдаемая средняя частота F сердечного ритма как функция частоты f слабого внешнего стимула. Эта экспериментальная кривая соответствует кривой зависимости разности частот от расстройки для шумовых автоколебаний с внешней силой (ср. с рис. 3.37). Из [Anishchenko *et al.* 2000].

ляемых гормонов, внутренней температуры тела, числа лимфоцитов и других важных физиологических параметров.

Хорошо известно, что в отсутствие смены дня и ночи период циркадного ритма отличается от 24 часов; он может быть как длиннее, так и короче. При нормальных условиях, этот цикл захватывается суточными колебаниями освещенности. Этот захват изучался в многочисленных экспериментах, в которых испытуемые находились при постоянной освещенности и были лишены возможности следить за временем. Результаты этих экспериментов схематически представлены на рис. 3.41. Они доказывают, что циркадный ритм имеет внутреннюю природу, т.е. существуют внутренние часы, управляющие этим ритмом. Имеющиеся данные указывают на существование одного главного источника циркадного ритма у млекопитающих – это супрахиазматическое ядро гипоталамуса. Это ядро получает внешний сигнал от клеток ганглия сетчатки [Moore 1999].

При количественном описании циркадного ритма у людей были получены противоречивые результаты [Czeisler *et al.* 1999; Sassone-Corsi 1999; Moore 1999]: для среднего значения периода получались данные от 23 до 25 часов, с индивидуальными вариациями от 13 до 65 часов для нормальных испытуемых. Такие большие вариации, возможно,

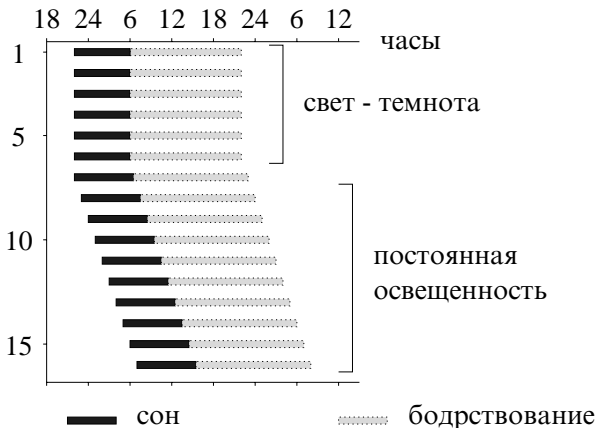


Рис. 3.41. Схематическое представление суточного поведенческого ритма. Циркадный ритм захвачен внешней сменой освещенности в течение первых пяти дней, в дальнейшем запись продолжалась в условиях постоянной освещенности. В данном случае циркадный осциллятор имеет период более 24 часов. Соответственно, разность фаз между циклами сон–бодрствование и день–ночь растет: внутренний «день» начинается все позже и позже. Подобные графики были получены в экспериментах как с животными, так и с людьми [Aschoff *et al.* 1982; Czeisler *et al.* 1986; Moore 1999].

ответственны за существование двух типов людей – «жаворонков» и «сов». Действительно, исходя из общих свойств синхронизации, можно ожидать, что испытуемые с внутренним периодом $T_0 < 24$ ч будут опережать по фазе внешнюю силу, а те, у кого $T_0 > 24$ ч, будут отставать по фазе. Аналогично, связанное с возрастом укорочение внутреннего периода, возможно, ответственно за сдвиг циркадной фазы и раннее просыпание, часто наблюдаемое у пожилых людей (см. [Czeisler *et al.* 1999] и приводимые там ссылки). Отметим, что сдвиг фазы зависит не только от расстройки, но и от того, является ли осциллятор квазигармоническим или релаксационным. Вполне возможно, что возрастные изменения циркадного генератора связаны и с этим.

В недавних экспериментах [Czeisler *et al.* 1999] была сделана попытка точно определить внутренний период генератора циркадного ритма у людей. Для этого использовался так называемый «протокол вынужденного асинхронизма»: интервалы сна и бодрствования каждого испытуемого составляли 28-часовые «сутки». (Czeisler *et al.* [1999] предполагали, что этот метод лучше предыдущих, поскольку изоляция в условиях постоянной освещенности влияет на нормальную активность генератора.) Таким образом в эксперименте добивались квазипериодического режима: 4-часовая расстройка слишком велика и внутренний генератор не захватывается внешней силой. В этом режиме записи физиологических параметров (внутренней температуры тела, содержания мелатонина и кортизола в плазме) представляют собой смесь колебаний с периодом силы (28 часов) и неизвестным периодом T . Анализируя такой сигнал с помощью специального спектрального метода, можно точно определить неизвестный период; он и интерпретируется как внутренний период генератора. Однако эта интерпретация сомнительна. Действительно, вне области синхронизации при увеличении расстройки наблюдаемый период колебаний постепенно приближается к периоду автономных автоколебаний, но они не совпадают (см. рис. 3.7а). Ниоткуда не следует, что эта разность должна быть мала.

Отметим, что в отличие от других примеров, внешнее воздействие на циркадный генератор не строго периодически: некоторые дни солнечные, некоторые нет, так что суточный цикл меняется день ото дня. Поэтому силу следует рассматривать как шумовую, хотя и с сильно выраженной периодической компонентой. Как следует из опыта, это не препятствует синхронизации.

В заключение обсуждения циркадных ритмов упомянем о *хронотерапии*. Физиология и биохимия человека существенно меняются в

течение 24-часового цикла. Более того, циркадные ритмы в ключевых биологических процессах приводят к существенной зависимости многих болезней и их симптомов от времени дня и ночи. Действие лекарств часто сильно зависит от времени их приема [Smolensky 1997]. Этот факт (весьма важный для практической медицины) довольно естественен с точки зрения нелинейной теории: как мы знаем, влияние воздействия на осциллятор существенно зависит от того, в какой фазе оно приложено.

3.5.2 Менструальный цикл

Менструальный цикл также можно рассматривать как не строго регулярные, т.е. зашумленные, колебания определенных гормонов. Регуляция их выделения осуществляется через системы положительной и отрицательной обратной связи. (Напомним, что существование обратной связи – необходимое свойство автоколебаний.) Период колебаний близок к 28 дням, но может значительно флуктуировать (рис. 3.42). Естественно ожидать, что периодический прием гормонов может захватить колебания; это действительно происходит при приеме гормональных таблеток (рис. 3.42). Внешняя сила подавляет диффузию фазы и делает период цикла равным в точности 28 дням.

Разумной моделью вынужденных колебаний может быть осциллятор типа накопление–сброс с изменяющимся порогом: из-за приема таблеток гормональная регуляция изменяется таким образом, что порог сначала поддерживается высоким, а затем он резко снижается и происходит сброс (это с очевидностью следует из того, что пре-

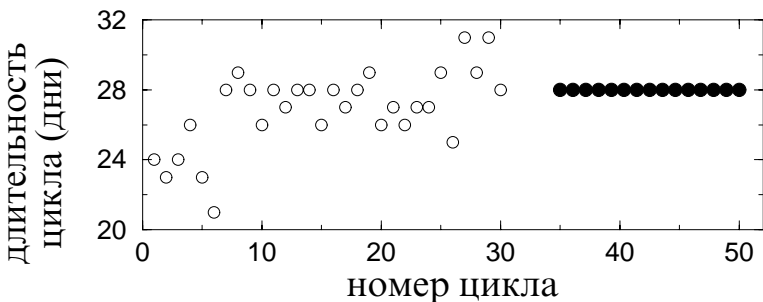


Рис. 3.42. Длительность менструального цикла обычно флуктуирует, но становится постоянной при приеме гормональных препаратов. Символы \circ и \bullet обозначают длительность цикла соответственно до начала приема препаратов и во время их действия.

кращение приема препарата немедленно приводит к менструации). Возможно, в этом случае сила не является слабой.

3.5.3 Захват периодических колебаний уровня инсулина периодическими инъекциями глюкозы

Основная функция гормона инсулин состоит в регуляции поглощения глюкозы мышечными и другими клетками, и тем самым в регуляции концентрации глюкозы в крови. Наиболее важным регулятором выделения инсулина поджелудочной железой служит сама глюкоза, так что инсулин и глюкоза есть два важнейших компонента системы обратной связи. У здоровых людей наблюдаются колебания выделения инсулина и концентрации глюкозы в крови с периодом примерно 2 часа (см. [Sturis *et al.* 1991, 1995] и приведенные там ссылки).

Эксперименты, проведенные Sturis *et al.* [1991], показали, что эти колебания инсулина сохраняются при постоянном внутривенном вливании глюкозы и могут быть захвачены, если глюкозу вводить колебательным образом. Если вливание глюкозы модулировать по синусоидальному закону с относительной амплитудой 33% от среднего значения, а период изменять в пределах $\pm 20\%$ от периода, наблюдаемого при постоянном вливании глюкозы, то возникает синхрониза-

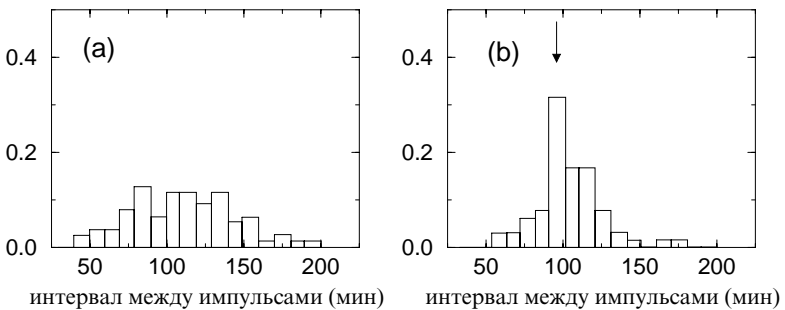


Рис. 3.43. Распределение межимпульсных интервалов (длительностей цикла) выделения инсулина при постоянном (а) и колебательном (б) вливании глюкозы. Как и ожидалось для систем с шумом, период колебаний не постоянен. Периодическая сила делает колебания регулярнее, уменьшая флуктуации длительности цикла. Это отражается в появлении пика в распределении (б). Положение пика соответствует периоду воздействия (стрелка), т.е. средний период колебаний захватывается силой. Из [Sturis *et al.* 1991].

ция порядка $1 : 1$ (рис. 3.43). Введение с очень большим периодом 320 минут приводило к режиму с двумя импульсами в выделении глюкозы и инсулина на один период введения, т.е. к синхронизации порядка $2 : 1$.

3.5.4 Синхронизация плазмодия миксомицета *Physarum*

Плазмодий внеклеточного миксомицета *Physarum* – один из простейших организмов. В теле плазмодия различают фронтальную зону, состоящую из более или менее равномерного слоя протоплазмы, и заднюю область, состоящую из трубок-тяжей, в которых движется эндоплазма. Сила, приводящая к транспортировке, генерируется колебательной сократительной активностью тяжей (см. [Achenbach and Wohlfarth-Bottermann 1980, 1981] и приведенные там ссылки).

Поток протоплазмы ритмически меняет свою скорость и направление с периодом порядка 1–3 мин. Период и амплитуда этих колебаний зависят, в частности, от температуры окружающей среды. Колинько и др. [1985] изучали синхронизацию потока протоплазмы периодическим изменением градиента температуры. Считается, что оно вызывает изменение внутриклеточного градиента давления. Скорость течения протоплазмы измерялась с помощью доплеровского лазерного анемометра. Прежде всего определялся период автономных колебаний T_0 при постоянной температуре 19°C . Далее градиент температуры периодически изменялся с амплитудой 0.5°C ; период T_e этих колебаний изменялся ступенчато, начиная с $T_e \approx T_0$. В определенном диапазоне периода T_e внешней силы, период колебаний протоплазмы захватывался (рис. 3.44).

3.6 Явления, близкие к синхронизации

В этом разделе мы опишем некоторые явления, которые имеют отношение к синхронизации, но не могут быть классифицированы как захват автоколебаний периодической силой.

3.6.1 Явления при большой внешней силе

Мы подробно, с использованием разных примеров, обсудили, как внешняя сила может захватить автоколебания. При этом, как следует из изображения области синхронизации на рис. 3.7, чем больше

расстройка между частотой силы и частотой автоколебаний, тем больше должна быть амплитуда силы. Этот рисунок может создать неправильное представление, что очень большая сила делает синхронизацию возможной даже при очень больших расстройках. Следует помнить, что в нашем описании синхронизации сила предполагалась слабой; в самом деле, мы считали, что сила действует только на фазу автоколебаний и не меняет форму предельного цикла (т.е. амплитуду). Если сила не слабая, то форма языков Арнольда будет не треугольной, и картина синхронизации становится не универсальной – она зависит от конкретных свойств автоколебаний и силы. Более того, при сильном воздействии могут наблюдаться качественно новые эффекты.

Хаотизация автоколебаний

Динамика вынужденных автоколебаний может стать нерегулярной, т.е. хаотической (см. краткое введение в главе 5 и раздел 7.3.4 части II, где обсуждается переход к хаосу при большой силе). Подобные режимы наблюдались в экспериментах с периодической стимуляцией

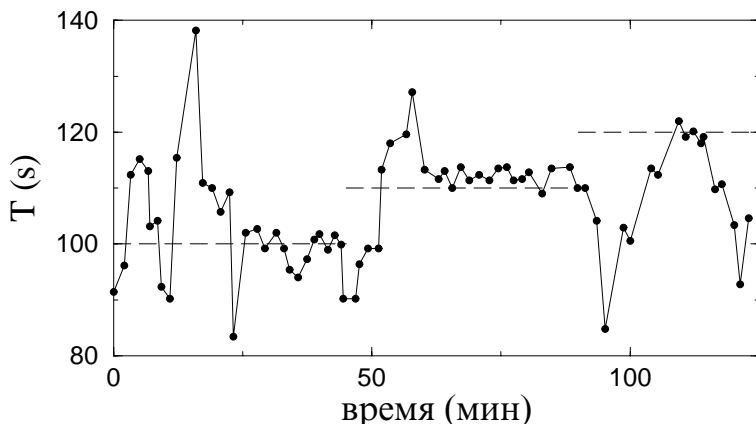


Рис. 3.44. Синхронизация колебаний потока протоплазмы плазмодия миксомицета *Physarum* гармонически изменяющимся градиентом температуры. Период колебаний протоплазмы T показан как функция времени; период T_e внешней силы изменялся ступенчато (пунктир). При $T_e = 100$ с и $T_e = 110$ с синхронизация устанавливается после некоторого переходного времени; в синхронном режиме T флуктуирует вокруг T_e . При дальнейшем увеличении T синхронизация разрушается и наблюдается низкочастотная модуляция T . Из [Колинько и др. 1985]. Copyright Overseas Publishers Association N.V., с разрешения Gordon and Breach Publishers.

агрегатов клеток из сердца куриного эмбриона [Guevara *et al.* 1981; Zeng *et al.* 1990]; см. рис. 3.45 и сравни его с рис. 3.21. В этих работах наблюдались также синхронные режимы, в которых два стимулирующих импульса соответствовали двум циклам. В отличие от простого режима захвата 1 : 1, здесь два импульса соответствуют двум разным фазам автоколебаний. Такое поведение (удвоение периода) типично для перехода к хаосу.

Подавление колебаний

Иногда достаточно большая сила или даже единичный импульс могут подавить автоколебания. Это может, например, произойти, если на фазовой плоскости автоколебательной системы предельный цикл сосуществует с устойчивым состоянием равновесия.²⁶ Подавление происходит, если импульс действует в «чувствительной фазе» (рис. 3.46). Этот эффект наблюдался в экспериментах с аксонами гигантского кальмара [Guttman *et al.* 1980] и с синоатриальным узлом сердца кошки [Jalife and Antzelevitch 1979] (см. также [Winfree 1980; Гласс и Мэки 1988]).

²⁶ Такие системы называют автогенераторами с жестким возбуждением: чтобы привести их в движение, нужно приложить конечное возмущение, переводящее фазовую точку в область притяжения предельного цикла; этот механизм возбуждения называют также докритической бифуркацией Хопфа.

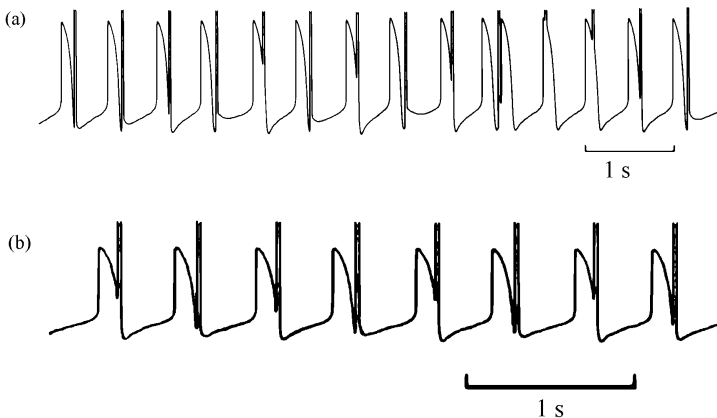


Рис. 3.45. (а) Хаотические колебания периодически возбуждаемого агрегата клеток сердца куриного эмбриона. Из [Glass and Shrier 1991], Fig. 12.5a, Copyright Springer-Verlag. (б) Синхронизация порядка 2 : 2 (удвоение периода). Из [Гласс и Мэки 1988]. Copyright ©1988 by PUP. Воспроизведено с разрешением Princeton University Press.

Ясно также, что периодическая последовательность импульсов может существенно уменьшить амплитуду колебаний, даже если состояние равновесия неустойчиво: первый импульс сдвигает точку к состоянию равновесия, а последующие не дают ей вернуться к предельному циклу. Важным практическим применением этих идей является гашение патологической активности мозга, вызывающей тремор при болезни Паркинсона (см. [Tass 1999] и приведенные там ссылки).

3.6.2 Воздействие на возбудимые системы

Возбудимые системы сами по себе не генерируют колебаний, поэтому их динамика не соответствует нашему пониманию синхронизации. Тем не менее, их отклик на периодическое воздействие сильно напоминает синхронизацию автоколебательных систем, и поэтому мы приводим краткое описание таких систем. Основные свойства возбудимых систем состоят в следующем.

- В ответ на воздействие, превышающее определенный порог, они генерируют импульс (иногда называемый потенциалом действия). Если воздействие меньше порогового, то отклик отсутствует или пренебрежимо мал.
- Сразу после активного периода они находятся в рефрактерной фазе, т.е. не откликаются на воздействие любой амплитуды.

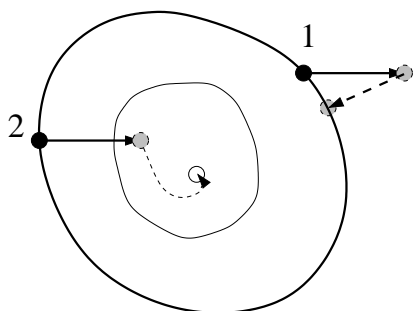


Рис. 3.46. Эффект воздействия одиночного импульса на систему, в которой сосуществуют предельный цикл и устойчивое состояние равновесия, зависит как от амплитуды, так и от фазы воздействия. Импульс, приложенный в точке 1, приводит к сдвигу фазы; импульс той же амплитуды, приложенный в точке 2, переводит фазовую точку в область притяжения устойчивого состояния равновесия (кружок) и подавляет автоколебания; граница области притяжения показана сплошной линией.

Периодическое воздействие на подобные системы приводит к различным видам колебаний, зависящим от частоты воздействия.

Возбудимость – это типичное свойство нервных и мышечных клеток, и похожие на синхронизацию явления наблюдались в экспериментах с тканями обоих типов. Matsumoto *et al.* [1987] изучали отклик аксона гигантского кальмара на последовательность импульсов. Они наблюдали различные регулярные и нерегулярные (возможно, хаотические) ритмы. В эксперименте определялись интервалы частоты воздействия, при которых отклик находился в соотношении $n : m$ к этой частоте; эти интервалы напоминали области захвата фазы (рис. 3.47, ср. с рис. 3.19b).

Большая часть сердечных клеток не демонстрируют спонтанную активность. Они возбуждаются, или генерируют потенциал действия, под действием стимуляции, генерируемой водителем ритма (пейсмекером). Обычно, один стимул от водителя ритма вызывает один отклик (1 : 1 ритм). Однако, если возбудимость пассивных клеток уменьшается, или, если частота биений увеличивается, то этот ритм может нарушиться. В результате могут возникнуть различные сердечные аритмии [Glass and Shrier 1991; Guevara 1991; Yehia *et al.* 1999; Hall *et al.* 1999]. В частности, может случиться, что один из n стимулирующих импульсов подается в момент, когда клетки рефрактерны, и поэтому проведение этого импульса блокируется. В результате будет наблюдаться ритм $n : (n - 1)$. Поскольку возбудимые системы не автоколебательные, мы предлагаем говорить в этом случае не о синхронизации, а о *сложном нелинейном резонансе*.

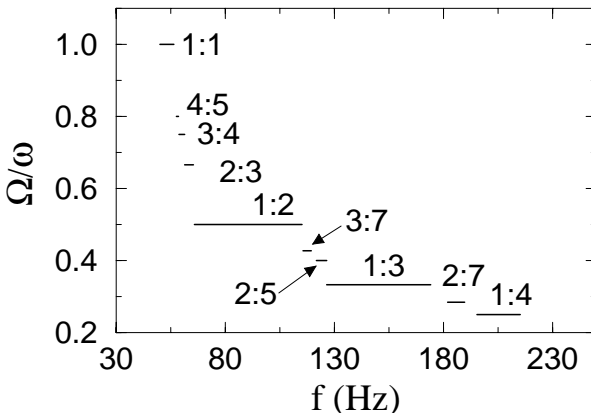


Рис. 3.47. «Чертова лестница», возникающая при воздействии на аксон гигантского кальмара. График построен с использованием данных из [Matsumoto *et al.* 1987].

3.6.3 Стохастический резонанс с точки зрения синхронизации

За исключением случая возбудимых систем, мы все время рассматривали влияние внешнего воздействия на системы, демонстрирующие колебания в автономном состоянии. При этом мы различали автоколебательные системы и те, в которых колебания вынужденные. В автоколебательных системах есть нейтрально устойчивая фаза, которая может быть подстроена внешним воздействием или за счет связи с другим осциллятором. В противоположность этому, при вынужденных колебаниях фаза привязана к фазе силы и не может быть легко сдвинута внешним воздействием или взаимодействием.²⁷ Соответственно, вынужденные колебания нельзя синхронизовать.

В этом разделе мы опишем класс осцилляторов, занимающий, в определенном смысле, промежуточное место между автоколебаниями и вынужденными колебаниями. Конкретнее, мы рассмотрим *колебания, возбуждаемые шумом*, т.е. обусловленные быстро флуктуирующими силами. В отличие от периодических колебаний с шумом, обсуждавшихся в разделе 3.4, здесь шум играет центральную роль: без флуктуаций колебаний нет. С другой стороны, в такой системе колебания наблюдаются без внешней периодической силы, что отличает их от возбудимых систем. В этом смысле эти системы напоминают автоколебательные, и поэтому можно ожидать возникновения явлений типа синхронизации. Как хорошо известно, многие системы с шумом демонстрируют при периодическом воздействии явление *стохастического резонанса*, наблюдавшееся во многих экспериментах (см. обзор *Gammaitoni et al.* [1998]). Мы сначала опишем общие феноменологические свойства стохастического резонанса и синхронизации, а затем обсудим физические причины этого сходства.

Пороговые системы

Начнем с модели, напоминающей осциллятор «накопление–сброс». Рассмотрим систему, в которой переменная не растет монотонно и регулярно, а испытывает случайные флуктуации (рис. 3.48а), время от времени достигая порога.²⁸ Будем отмечать каждое пересечение порога и обозначать его как событие, или импульс. Считается, что

²⁷ На языке теории динамических систем, отличие состоит в существовании у автономной автоколебательной системы нулевого ляпуновского показателя и в отсутствии нулевого показателя для вынужденных колебаний.

²⁸ Иногда такие модели называют «накопление и сброс с уткой» [*Gammaitoni et al.* 1998].

такой моделью можно описать некоторые сенсорные нейроны, в отсутствие стимуляции генерирующие случайные импульсы.

Если порог менять периодически (рис. 3.48b), то система демонстрирует стохастический резонанс; он проявляется в типичной структуре распределения межимпульсных интервалов [Moss *et al.* 1994, 1993; Wiesenfeld and Moss 1995; Gammaitoni *et al.* 1998], см. рис. 3.48c. Действительно, система генерирует импульс с большей вероятностью, если порог максимально низкий, и поэтому интервал между импульсами скорее всего будет равен или кратен периоду силы. Из-за этого появляется корреляция между последовательностями генерируемых импульсов и внешним воздействием. В нейрофизиологической литературе эту корреляцию называют захватом фазы (см., например, [Rose *et al.* 1967; Longtin and Chialvo 1998]).

Бистабильные системы

Другой популярной моделью является система с двумя устойчивыми состояниями равновесия, в которой шум вызывает переходы из

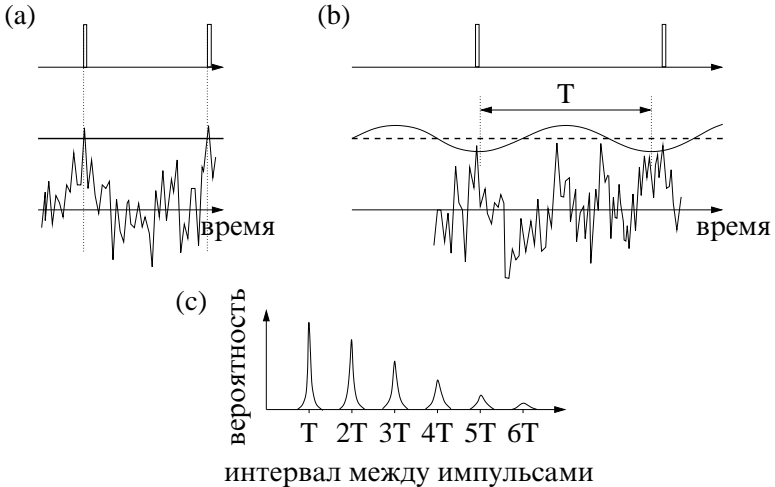


Рис. 3.48. (a) Схематическое представление пороговой шумовой системы. Она генерирует импульсы, когда шум превышает определенный порог. (b) Если порог модулируется слабым внешним сигналом, то генерация с большей вероятностью происходит при определенной фазе силы, когда порог низкий. Это приводит к характерной структуре распределения интервалов между импульсами (c). Такое распределение наблюдалось в экспериментах с периодическим воздействием на первичный слуховой нерв обезьяны *Saimiri Sciureus* [Rose *et al.* 1967] и кошки [Longtin *et al.* 1994], а также при периодическом воздействии на волосяные клетки рака [Petracchi *et al.* 1995].

одного состояния в другое. Удобно представить это как движение частицы в потенциале с двумя минимумами (рис. 3.49а). Такая модель применима ко многим физическим и биологическим явлениям. Для иллюстрации мы выбрали эксперимент, проведенный Varbay *et al.* [2000] с лазером, который может излучать две моды с разной поляризацией, что соответствует двум устойчивым состояниям. Из-за шума генерация лазера нерегулярно переключается между излучением этих мод; для простоты изложения мы по-прежнему будем говорить о частице в бистабильном потенциале. Этот потенциал, реконструированный по данным эксперимента, показан на рис. 3.49б.

Частота перескоков частицы между потенциальными ямами зависит от интенсивности шума. При малом шуме перескоки редки; с увеличением его интенсивности частота растет. Наконец, если шум очень большой, то частица не «чувствует» минимумы потенциала и движется взад-вперед совершенно случайно. Слабая внешняя сила меняет потенциал,²⁹ делая одно состояние более устойчивым, чем другое (рис. 3.49а). Перескоки между ямами более вероятны в те моменты, когда барьер низкий; в результате при определенной интенсивности шума индуцированные шумом перескоки оказываются

²⁹ Слабость силы означает, что она не может вызвать перескок в отсутствие шума.

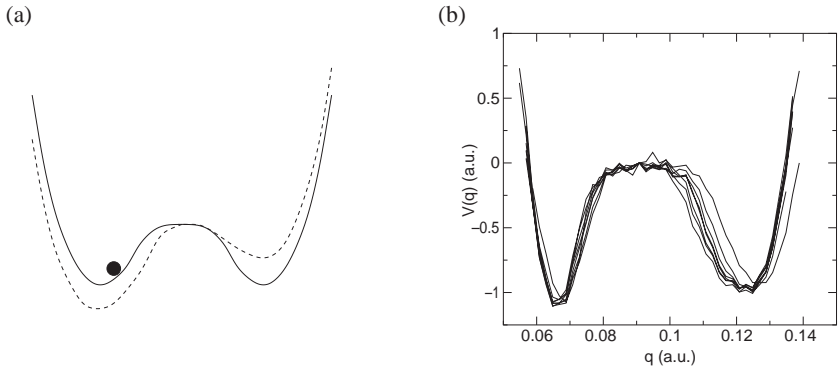


Рис. 3.49. (а) Движение частицы в потенциале с двумя ямами. Шум приводит к нерегулярным переходам между двумя устойчивыми состояниями. Слабая периодическая сила изменяет потенциал так, что высота барьера периодически меняется (одно мгновенное состояние показано штриховой линией). (б) Эффективный бистабильный потенциал $V(q)$, полученный по данным эксперимента с лазером (координата и высота потенциала даны в произвольных единицах). Рисунок (б) из Varbay *et al.*, *Physical Review E*, Vol. 61, 2000, pp. 157–166. Copyright 2000 by the American Physical Society.

в примерном синхронизме с силой (рис. 3.50).³⁰ Это проявление *стохастического резонанса* наблюдалось во многих экспериментах (см., например, [Gammaitoni *et al.* 1998]). В определенном смысле стохастический резонанс можно интерпретировать как синхронизацию индуцированных шумом колебаний [Simon and Libchaber 1992; Shulgin *et al.* 1995]. Недавно для характеристики этого явления стало также использоваться понятие фазы [Neiman *et al.* 1998, 1999c]; в этом контексте один скачок частицы отвечает увеличению фазы на π .

Схожесть свойств синхронизации таких разных систем как автоколебательная и стохастическая бистабильная система можно объяснить следующим образом. Мы подробно обсуждали, что возмож-

³⁰ Отметим сходство в динамике бистабильной и пороговой системы с внешней периодической силой: в обоих случаях сила модулирует барьер и способствует переходам при определенной фазе силы.

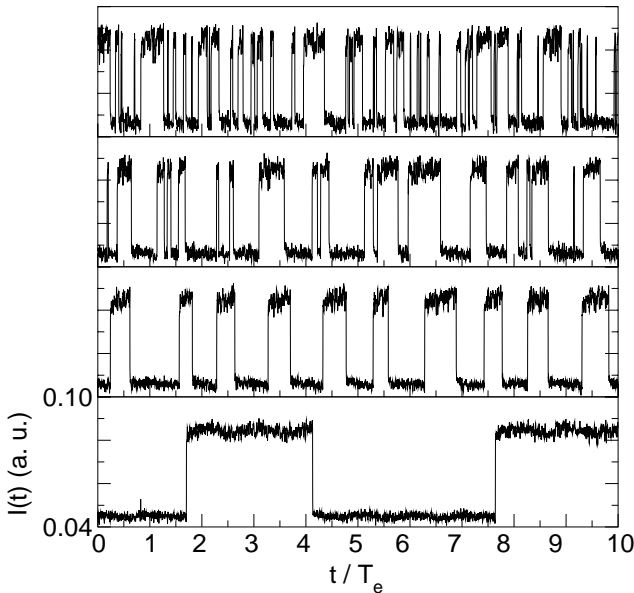


Рис. 3.50. Результаты экспериментов Varbay *et al.* [2000]. Временная зависимость поляризации излучения лазера в присутствии периодической внешней силы с периодом T_e . Различные кривые отвечают различным интенсивностям шума (она возрастает снизу вверх). При слабом и сильном шуме синхронизации нет, а при среднем шуме (вторая кривая снизу) переключения практически идеально синхронизованы с внешней силой (читатель может легко идентифицировать силу по маркерам на оси времени). Из Varbay *et al.*, *Physical Review E*, Vol. 61, 2000, pp. 157–166. Copyright 2000 by the American Physical Society.

ность синхронизации автоколебаний основана на том, что их фаза свободна (и поэтому может быть легко сдвинута), в то время как у систем с периодической силой фаза фиксирована (см. рис. 2.9 и раздел 2.3.2). Это следует из того, что для автономных автоколебательных систем все моменты времени эквивалентны, а для вынужденных колебаний – нет, поскольку сила зависит от времени. Последнее верно и для бистабильных систем с шумом: положение частицы (и, следовательно, фаза) определяется флуктуирующей силой.

Ключевой момент, позволяющий описать стохастический резонанс как синхронизацию, заключается в наличии двух временных масштабов. Один (микроскопический) масштаб связан с временем корреляции шума; он мал. Другой (макроскопический) масштаб – это характерное время между макроскопическими событиями (импульсами в пороговой системе, скачками в бистабильной); он много больше времени корреляции шума. Нас интересуют скачки (импульсы) и интервалы времени между ними. Различие двух временных масштабов позволяет сказать, что макроскопические события могут произойти в любой момент времени. Например, между двумя пересечениями порога на рис. 3.48а процесс может много раз почти подходить к порогу, не достигая его. Немного изменив порог в какой-то момент времени, мы можем вызвать импульс. Это означает, что фаза макроскопического события может быть сдвинута слабым воздействием, а это как раз и есть свойство, обеспечивающее синхронизацию.

3.6.4 Захват нескольких осцилляторов общей силой

В этом разделе мы опишем довольно простое следствие синхронизации внешней силой: появление когерентных колебаний в ансамбле осцилляторов, на которые действует общая сила; при этом часто говорят об осцилляторах, находящихся в общем поле.

Когерентное сложение колебаний. Пример: захват решетки лазеров внешним полем

Представим, что есть несколько схожих автогенераторов, на которые действует общая внешняя сила (рис. 3.51). Пусть осцилляторы различны, но имеют близкие частоты. Тогда периодическая внешняя сила может синхронизовать все или почти все из них. В результате осцилляторы будут колебаться когерентно, с одной и той же частотой (но, возможно, с разным сдвигом фазы).

Этот простой факт позволяет использовать синхронизацию для получения когерентного сложения сигналов от разных генераторов.

Например, таким способом можно получать лазерное излучение большой интенсивности. Современная технология позволяет изготовить решетку полупроводниковых лазеров на одном кристалле; такие лазеры дешевы, но их мощность невелика. Простое сложение их световых пучков не позволяет увеличить мощность. Действительно, даже если лазеры полностью идентичны и излучают на одной и той же частоте, то их поля имеют разные фазы.³¹ Тогда в некоторый момент времени поля будут иметь разный знак и частично компенсировать друг друга. Разница частот еще более препятствует тому, чтобы при сложении колебаний получился большой выходной сигнал.³² Поэтому, чтобы получить выходной сигнал большой интенсивности, поля должны иметь не только одну и ту же частоту, но и близкие фазы, т.е. лазеры должны быть синхронизованы. Этого можно достичь, если использовать один лазер для синхронизации остальных. Такой механизм, известный в оптике как *захват внешним полем*, довольно эффективен (см. детали в [Buczek *et al.* 1973; Kurokawa 1973]). В экспериментах [Goldberg *et al.* 1985] с использованием внешнего поля мощностью менее 3 мВт удалось достичь генерации мощностью 105 мВт в решетке из десяти лазерных диодов (рис. 3.52).

Этот механизм когерентного сложения колебаний можно рассматривать как метод обнаружения слабого сигнала. Действительно, решетка лазеров может рассматриваться как «усилитель», выдаю-

³¹ Напомним, что фаза автоколебаний может быть любой; она зависит от того, как автогенератор «включался», т.е. от начальных условий. Поэтому автогенераторы в ансамбле будут иметь в общем случае разные фазы.

³² При некогерентном сложении колебаний результат пропорционален корню из числа осцилляторов, а при когерентном – числу осцилляторов.

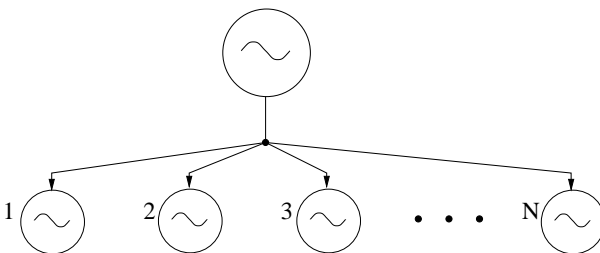


Рис. 3.51. Ансамбль схожих осцилляторов под действием общей внешней силы.

щий мощный выходной сигнал, если на вход подан слабый сигнал. Конечно, этот усилитель работает только в узком диапазоне частот (расстройка основного числа элементов ансамбля должна быть малой).

Не исключено, что похожий принцип реализуется в живых организмах для повышения чувствительности органов чувств. Последние обычно состоят из множества нейронов, генерирующих импульсы с разными частотами. При появлении внешнего сигнала группы нейронов с частотами, близкими к частоте стимуляции, будут захвачены, и сигнал, поступающий от них в мозг, будет большим. Другие группы нейронов реагируют на другие частоты, что делает возможным детектирование слабых сигналов.

Пример: циркадные колебания в клетках

Внешнее воздействие на ансамбль неидентичных и не взаимодействующих осцилляторов приводит к появлению макроскопических колебаний. Ясно, что, если сила прекращает действовать, то эти колебания затухают, поскольку каждый осциллятор теперь колеблется со своей частотой – спустя некоторое время их фазы расходятся и колебания компенсируют друг друга. Рассмотрим эксперимент, описанный в [Whitmore *et al.* 2000]. Он подтверждает тот факт, что циркадная система позвоночных представляет собой децентрализо-

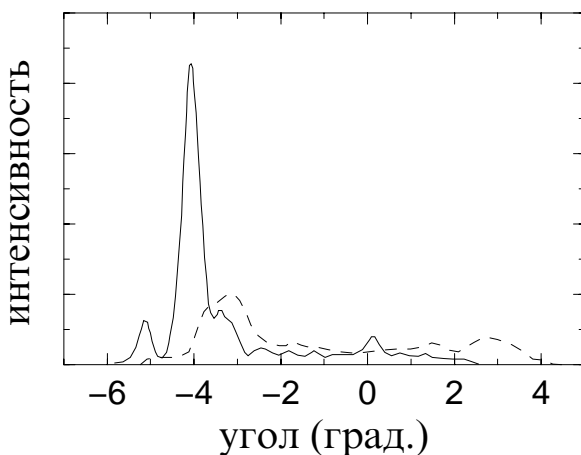


Рис. 3.52. Захват решетки лазеров внешним полем. Сложение полей излучения независимых лазеров дает световое поле малой интенсивности (штриховая линия). Если на решетку подавать пучок с задающего лазера, то на выходе в результате синхронизации отдельных лазеров получается мощный сигнал (сплошная линия). Из [Goldberg *et al.* 1985].

ванный набор периферийных часов, и эти периферийные осцилляторы непосредственно восприимчивы к свету. Наблюдаемой в эксперименте величиной являлась сумма колебаний отдельных клеток.

Whitmore *et al.* [2000] исследовали экспрессию гена *Clock* в периферийных органах (сердце и почки) рыбы-зебры. Две группы органов поддерживались в культуре, одна при постоянной освещенности, а другая в условиях смены дня и ночи. В обеих группах экспрессия гена *Clock* продолжала осциллировать как *in vivo*. В органах, освещавшихся в соответствии с суточным циклом, амплитуда и устойчивость колебаний *Clock* были больше, чем в группе, находившейся в темноте. Смена цикла на противоположный (т.е. сдвиг фазы силы на π) приводил к захвату с новой фазой.

Циркадные колебания наблюдались также в иммортализованных клеточных линиях. Линия одной эмбрионной клетки рыбы-зебры демонстрировала постоянный уровень экспрессии *Clock* в темноте. Однако, когда эти клетки подвергались переменному освещению с суточной периодичностью, то колебания уровня *Clock* были видны уже в первый день; форма колебаний была такова, что пик был относительно широкий и низкий (т.е. максимум имел разброс несколько часов). На второй день цикла пик экспрессии сосредотачивался в определенной фазе силы, и амплитуда колебаний была больше. Когда эти клетки снова помещались в темноту, колебания продолжались два цикла, но с уменьшением амплитуды и расширением пика. На третий день колебания не были видны. Продолжение колебаний в темноте после действия дневного цикла служит подтверждением гипотезы о том, что клетки содержат часы, которые захватываются суточным циклом освещенности.

Whitmore *et al.* [2000] пришли к выводу, что отсутствие периодической экспрессии в темноте указывает на то, что либо цикл день – ночь синхронизует имеющиеся случайные фазы колебания в отдельных клетках, либо инициирует циркадные колебания, которых не было раньше. Для разрешения этой дилеммы следует провести визуализацию экспрессии в отдельных клетках с помощью флюорисцентного гена-репортера.

Пример: синхронизация митотического цикла при острой лейкемии

Любопытный механизм синхронизации был реализован Lampkin *et al.* [1969] при лечении пятилетнего мальчика, страдавшего острой лимфобластозидной лейкемией. Идея состоит в том, что большинство химиотерапевтических средств, эффективных при этом заболевании,

действуют в основном в одной из фаз митотического цикла. Следовательно, терапия может быть более эффективна, если лейкозные клетки синхронизованы в чувствительной фазе, чтобы сделать их более восприимчивыми к лекарству, действие которого зависит от фазы митотического цикла.

Обычно делящиеся лейкозные клетки с равной вероятностью находятся в разных фазах митоза. Синхронизация достигалась введением специального лекарства (арабинозид цитозина), которое замедляет или останавливает синтез ДНК. Клетки, вступающие в фазу синтеза ДНК, подвергаются влиянию этого лекарства и задерживаются в этой стадии митоза. Таким образом, все больше клеток накапливается в S-фазе митотического цикла. После прекращения действия лекарства, синтез ДНК возобновлялся одновременно во всех этих клетках и, следовательно, они были синхронизованы. Затем вводилось другое лекарство (винкрестин).

Такая двухшаговая терапия повторялась три раза с недельным интервалом, и после этого пациент достиг полной ремиссии; во время написания статьи [Lampkin *et al.* 1969] он подвергался поддерживающей терапии и по-прежнему находился в состоянии полной ремиссии.

Недавние исследования показали, что этот механизм синхронизации играет важную роль при митозе (делении ядра). Этот процесс можно уподобить симфоническому оркестру, в котором много инструментов, играя индивидуально, подчиняются дирижерской палочке. Эти «дирижеры», называемые «checkpoints», регулируют продвижение клетки по митотическому циклу, предотвращая ошибки в разделении хромосом, которые могут привести к таким заболеваниям, как синдром Дауна и рак [Cortez and Elledge 2000; Scolnick and Halazonetis 2000].

Глава 4

Синхронизация двух и многих осцилляторов

В главе 3 мы в деталях изучили синхронизацию осциллятора внешней силой. Здесь мы распространяем эти идеи на более сложные случаи, когда взаимодействуют два или несколько осцилляторов.

Мы начнем с рассмотрения двух взаимно связанных автоколебательных систем. Этот случай включает классические эксперименты Гюйгенса, Рэлея и Эплтона, а также множество других экспериментов и явлений природы. Мы опишем эффекты захвата фаз и частот в таких системах, в том числе в присутствии шумов. Далее мы проиллюстрируем некоторые особенности в синхронизации релаксационных осцилляторов и кратко обсудим случай взаимодействия нескольких осцилляторов. Здесь мы также обсудим свойства синхронизации систем специального класса, а именно ротаторов.

Эта глава также включает обсуждение синхронизации в больших пространственно упорядоченных ансамблях автоколебательных систем (в цепочках и в решетках), а также в непрерывных колебательных средах. Интересным эффектом в таких системах является формирование синхронных кластеров.

Глава продолжается описанием и качественным объяснением самосинхронизации в больших популяциях осцилляторов, связанных каждый с каждым (такая связь называется также глобальной). Один пример такого явления – синхронизация вспышек света, генерируемых популяцией светлячков, – был рассмотрен в главе 1; дальнейшие будут приведены в этой главе. Мы завершаем главу описанием

различных экспериментов.

4.1 Взаимная синхронизация автоколебательных систем

В этом разделе мы обсуждаем синхронизацию взаимно связанных осцилляторов. Этот эффект очень близок к случаю синхронизации внешней силой, детально рассмотренному в главе 3. Тем не менее, есть некоторые особенности, которые мы и опишем далее. Мы также кратко обсудим случай взаимодействия нескольких осцилляторов.

4.1.1 Два взаимодействующих осциллятора

Синхронизация была изначально открыта в системе двух связанных осцилляторов. Мы уже описали в главе 1 наблюдения взаимодействующих маятниковых часов Христианом Гюйгенсом и органных труб лордом Рэлеем. В этом разделе мы объясняем как эти, так и другие эксперименты, используя идеи и понятия, введенные в предыдущих главах. Первым делом мы обсудим подстройку частот.

Захват частот

В общем случае взаимодействие двух систем несимметрично: либо один осциллятор мощнее другого, либо они влияют друг на друга в разной степени, либо и то, и другое. Если воздействие в одном направлении существенно сильнее, чем в другом, то мы вновь имеем дело с частным случаем синхронизации внешней силой. Мы знаем, что в этом случае частота системы подтягивается к частоте воздействия. Основная особенность взаимного воздействия – это то, что меняются частоты обоих осцилляторов. Обозначим частоты автономных систем (часто называемые парциальными) как ω_1 и ω_2 , и пусть $\omega_1 < \omega_2$; наблюдаемые частоты взаимодействующих осцилляторов мы обозначим как $\Omega_{1,2}$. Тогда, если связь достаточно сильна, то захват частот возникает в результате их взаимной подстройки, так что $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, где обычно $\omega_1 < \Omega < \omega_2$, см. рис. 4.1.¹

¹ Два осциллятора могут быть связаны довольно сложным образом. Так, например, два электронных генератора могут быть связаны через резистор и дополнительно взаимодействовать за счет перекрытия магнитных полей катушек индуктивности. Следовательно, в общем случае связь характеризуется несколькими параметрами. При такой сложной связи частоты в синхронном режиме могут находиться и вне интервала $[\omega_1, \omega_2]$.

Захват фаз

Захват частот предполагает также и существование определенного соотношения между фазами. Это соотношение зависит не только от расстройки частот и силы связи, но также и от способа взаимодействия. Во введении мы упомянули эксперименты с маятниковыми часами, проведенные И. И. Блехманом [1981] с сотрудниками; они наблюдали как синхронизацию часов в противофазе (разность фаз близка к π), так и синхронизацию в фазе (разность фаз близка к

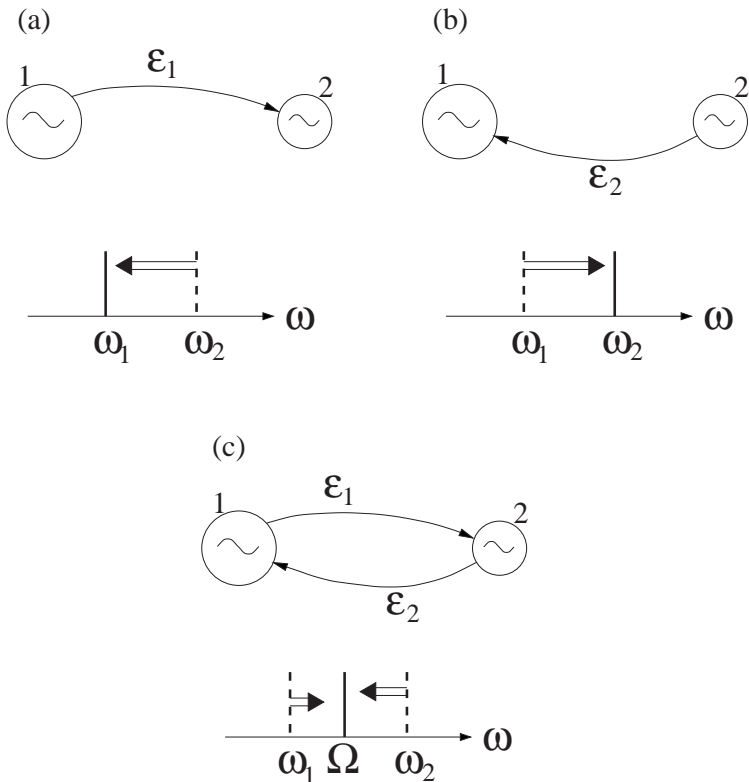


Рис. 4.1. Подстройка частот двух взаимодействующих осцилляторов (ω_1 и ω_2 – это автономные частоты). Если связь действует только в одном направлении (а и б), то частота системы под воздействием (вертикальная пунктирная линия) подтягивается к частоте воздействующего осциллятора. Это эквивалентно захвату внешней силой. Если взаимодействие двустороннее ($\epsilon_{1,2} \neq 0$), то меняются частоты обеих систем (с); общая частота Ω синхронных колебаний обычно лежит между ω_1 и ω_2 . Частотная диаграмма может рассматриваться как схематическое изображение спектра мощности колебаний.

нулю).² Напомним читателю, что первооткрыватель синхронизации Христиаан Гюйгенс наблюдал синхронизацию в противофазе.

Рассмотрим два почти идентичных симметрично связанных осциллятора. Если взаимодействие слабое, то, в полной аналогии со случаем внешней силы, мы можем предположить, что оно влияет лишь на фазы, сдвигая точки вдоль предельных циклов, но не на амплитуды. Взаимодействие зависит некоторым образом от двух фаз, и два простейших случая – это когда связь либо сближает фазы (рис. 4.2а), либо расталкивает их (рис. 4.2б). Ясно, что взаимодействие, притягивающее фазы, приводит к синхронизации в фазе, а отталкивающее – к синхронизации в противофазе. Используя те же самые аргументы, что и для случая осциллятора с внешней силой (см. раздел 3.1), приходим к выводу, что расстройка делает разность фаз не в точности нулем (не в точности π).

² Двое почти одинаковых часов синхронизируются в противофазе, если собственная частота вибраций балки не сильно отличается от частот часов; в противоположном случае возможны оба режима (см. [Блехман 1971, 1981; Ланда 1980], где эта проблема исследуется аналитически).

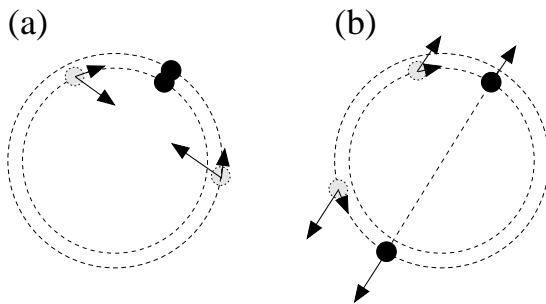


Рис. 4.2. Два взаимно связанных осциллятора с притягивающим (а) и отталкивающим (б) фазы взаимодействием. Схема показывает фазы двух систем с равными собственными частотами; они изображены в системе координат, вращающейся с частотой $\omega = \omega_{1,2}$. Притяжение (отталкивание) фаз, показанное стрелками, приводит к синхронизации в фазе (противофазе). Компоненты сил, стремящиеся сдвинуть точки вдоль предельного цикла, также показаны стрелками. В случае ненулевой расстройки (т.е. неидентичных осцилляторов), разность фаз в синхронном состоянии не в точности ноль (или не в точности π); возникает дополнительный фазовый сдвиг, так что в результате взаимодействие компенсирует разбегание фаз из-за разности частот (ср. с рис. 3.4).

Синхронизация высшего порядка

В общем случае, когда частоты несвязанных систем подчиняются соотношению $n\omega_1 \approx m\omega_2$, при достаточно сильной связи возникает синхронизация порядка $n : m$. Частоты взаимодействующих систем становятся захваченными, $n\Omega_1 = m\Omega_2$; устанавливается также соотношение между фазами. Условие захвата фаз может быть сформулировано в виде

$$|n\phi_1 - m\phi_2| < \text{constant}, \quad (4.1)$$

(ср. с уравнением (3.3) для случая осциллятора под действием внешней силы). Фазовый сдвиг между осцилляторами зависит от начальной расстройки между взаимодействующими системами, а также от вида и параметров связи.

4.1.2 Пример: синхронизация триодных генераторов

Е. В. Эпплтон [Appleton 1922] систематически исследовал свойства синхронизации триодных генераторов в специально спланированном

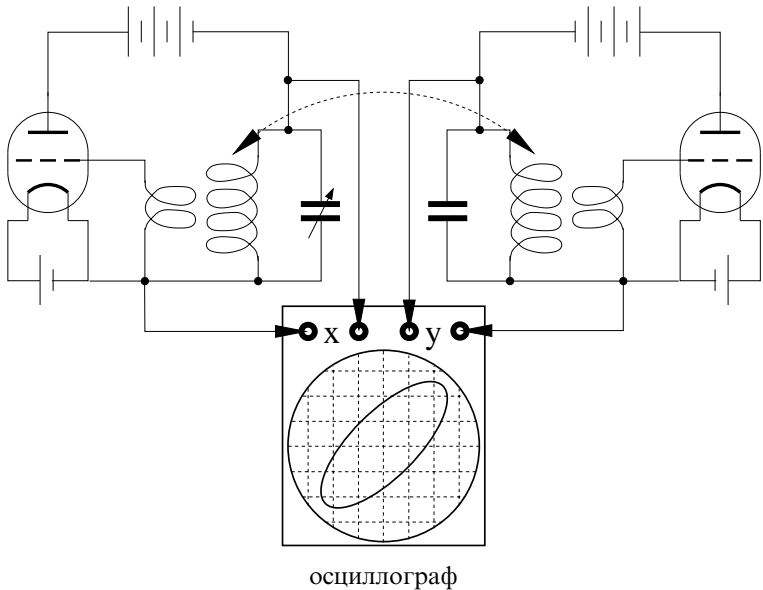


Рис. 4.3. Схема эксперимента Е. В. Эпплтона с генераторами на лампе-триоде [Appleton 1922]. Пунктирная дуга показывает, что катушки были размещены таким образом, что их магнитные поля перекрывались; это обеспечивало связь между генераторами.

эксперименте. Он изучал как синхронизацию внешней силой, так и взаимную синхронизацию двух связанных неидентичных систем. Схема установки последнего эксперимента показана на рис. 4.3. Каждый генератор состоит из усилителя (вакуумной лампы—триода), колебательного LC -контура и цепи обратной связи, реализованной с помощью второй индуктивности. Эта катушка соединяет выход и вход усилителя, подавая сигнал, пропорциональный колебаниям в LC -контуре сетки лампы.

Есть несколько возможностей связать два триодных генератора. Например, их можно связать через сопротивление. В своих экспериментах Эпплтон разместил катушки индуктивности вблизи друг от друга, так что их магнитные поля перекрывались, и, следовательно, токи в LC -контурах воздействовали друг на друга.

Эксперимент проводился с осцилляторами с низкой частотой ≈ 400 Гц. Частоту одной из систем можно было изменять, подстраивая конденсатор. Влияние расстройки отслеживалось двумя способами. Во-первых, на осциллографе наблюдались фигуры Лиссажу, что свидетельствовало о равенстве наблюдаемых частот в определенном диапазоне расстроек. Фазовый сдвиг между синхронными генераторами также оценивался по фигурам Лиссажу. Во-вторых, измерялась частота биений. Это делалось достаточно простым способом: биения были столь медленны, что Эпплтон мог сосчитать их на слух.

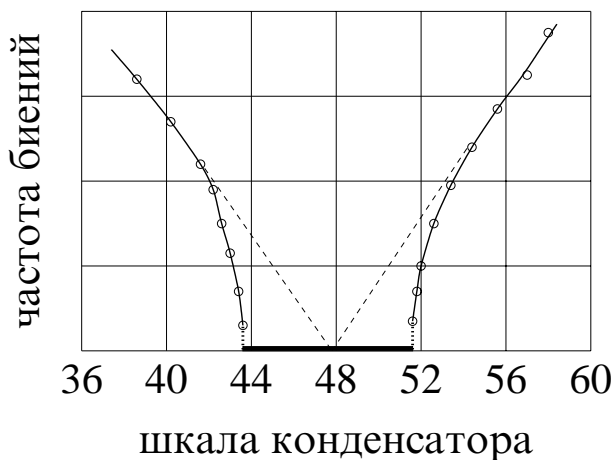


Рис. 4.4. Результаты эксперимента со связанными триодными генераторами. Если бы не эффект синхронизации, то частота биений изменялась бы, как показано пунктирной линией. Сплошные линии проведены через экспериментально полученные значения. Область синхронизации показана горизонтальным отрезком жирной линии. Из [Appleton 1922].

Частота биений $|\Omega_1 - \Omega_2|$ показана на рис. 4.4 как функция показаний регулятора настройки конденсатора (в произвольных единицах), т.е. как функция расстройки.

Отметим, что разность фаз в области синхронизации изменялась от 0 до π , принимая значение $\pi/2$ при расстройке, близкой к нулю. Возможное объяснение этому состоит в том, что генераторы в экспериментах Эплтона были не только расстроены по частоте, но также имели и различные амплитуды, так что один генератор доминировал. Поэтому свойства синхронизации в данной системе очень близки к случаю синхронизации внешней силой.

4.1.3 Пример: частота дыхания и частота взмаха крыльев свободно летящих уток

Взаимосвязь между сердечным ритмом, частотой дыхания и частотой взмаха крыльев свободно летящих морских уток (*barnacle geese*, *Branta leucopsis*) изучалась в работе [Butler and Woakes 1980]. Две утки были успешно приручены и натренированы лететь за грузовиком, в котором находился хозяин. Каждой утке был имплантирован двухканальный радиопередатчик, так что частоты сердцебиения и дыхания могли регистрироваться до, во время и после достаточно долгих полетов. Измеряемые поток воздуха в трахее и электрокардиограмма транслировались на приемное устройство. Полет также фиксировался на видеопленку; по этой съемке определялась частота взмахов крыльями.

Экспериментаторы не обнаружили взаимосвязи между какой-либо из измеряемых частот и скоростью полета птиц, а также между сердцебиением и дыханием. В то же время, частота взмаха крыльев и частота дыхания находились в соотношении 3 : 1; наблюдалась также тесная взаимосвязь между фазами двух колебаний. Распределение частоты дыхания, показанное на рис. 4.5, указывает на наличие захвата частот порядка 1 : 3 и, возможно, 1 : 2.

В течение большинства дыхательных циклов наблюдалось три взмаха крыльев за цикл, причем крылья всегда были полностью подняты в момент перехода от выдоха к вдоху. Взмах крыльев координировался с фиксированной фазой дыхательного цикла. В среднем, крылья были полностью подняты при ≈ 6 , 40.5 и 74% от длительности дыхательного цикла (рис. 4.6). Фазовые соотношения присутствовали в течение достаточно длительных полетов и поддерживались даже при (медленном) изменении частот процессов. Это соответствовало результатам других исследований, где захват

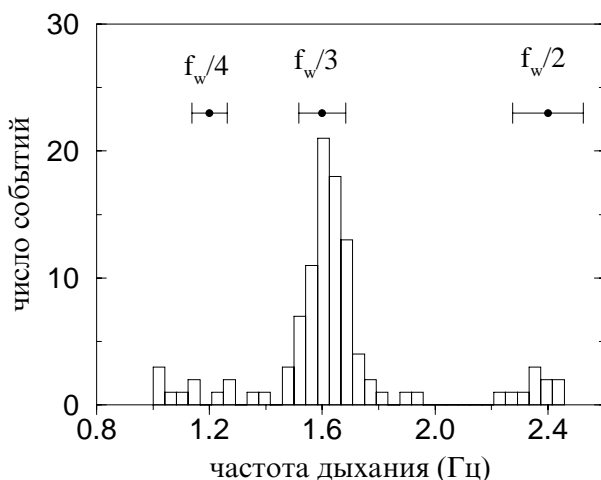


Рис. 4.5. Гистограмма частоты дыхания морской утки во время полета. Каждое измерение – это частота, усредненная по шести циклам. В верхней части графика показаны средние значения \pm стандартное отклонение частоты взмахов крыльев f_w , поделенные на целые числа, соответствующие порядку захвата частоты. Из [Butler and Woakes 1980] с разрешения Company of Biologists Ltd.

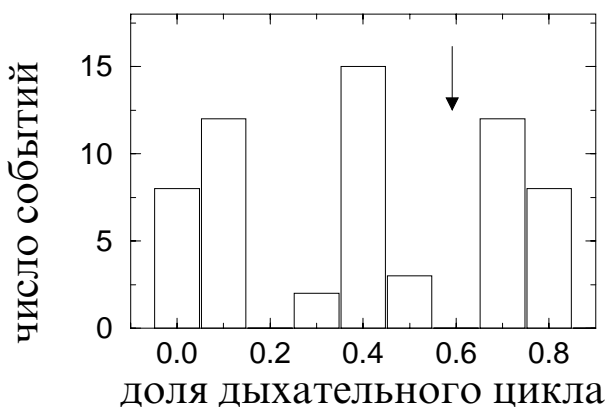


Рис. 4.6. Гистограмма фаз дыхательного цикла утки во время полета, соответствующих моменту, когда крылья были полностью подняты. Показаны двадцать дыхательных циклов, каждый из которых занимал два кинокадра. Каждый интервал гистограммы соответствовал, таким образом, одному кадру. Нулевой кадр соответствует моменту, когда клюв открывался; стрелки отмечают фазу, когда он закрывался. Из [Butler and Woakes 1980] с разрешения Company of Biologists Ltd.

порядка 1 : 1 и даже столь высокого порядка как 1 : 5 наблюдался у других видов птиц (см. ссылки в [Butler and Woakes 1980]). Было также найдено, что крылья полностью подняты в начале вдоха, и что начало выдоха совпадало с началом опускания крыльев. Вопрос, дают ли такие фазовые соотношения какое-либо механическое преимущество для процесса вентиляции легких, остается открытым.

Отметим, что рис. 4.6 может рассматриваться как стробоскопическое изображение: фаза дыхания наблюдается здесь при фиксированном значении фазы движения крыльев (когда крылья полностью подняты). *Фазовый стробоскоп* – это очень эффективный метод для выявления взаимосвязи между фазами по измеренным данным; мы будем широко использовать его в главе 6.

4.1.4 Пример: переход между состояниями с синфазными и противофазными движениями

Следующим примером мы хотим проиллюстрировать вышеупомянутые свойства взаимной синхронизации: для одних и тех же систем разность фаз в синхронном состоянии может принимать различные значения, в зависимости от того, как именно введена связь.

Первоначально описываемый эффект наблюдался Дж. А. С. Келсо; позже он был изучен Хакеном, Келсо и соавторами (см. детали и ссылки в [Haken *et al.* 1985; Haken 1988]). В их экспериментах испытуемому давалось задание выполнять колебательные противофазные движения указательными пальцами, постепенно увеличивая частоту. Оказалось, что при более высоких частотах это движение становится неустойчивым и наблюдается быстрый переход к синфазному режиму,³ см. рис. 4.7 и 4.8.

Объяснение этого явления основывается на гипотезе, утверждающей, что ритмическое движение пальцев управляется активностью соответствующего пейсмейкера в центральной нервной системе, называемого центральным генератором ритма (ЦГР). Соответственно, синхронное колебательное движение двух пальцев может быть рассмотрено как следствие взаимной синхронизации двух ЦГР. Естественно предположить, что эти генераторы взаимодействуют. Очень важен тот факт, что это взаимодействие использует *запаздывающие во времени связи*. Действительно, известно, что мозг получает информацию о положении и скорости членов; эта информация по-

³ Движение считается синфазным, когда обе сгибающие (разгибающие) мышцы сокращаются одновременно.

ставляются специальными сенсорами – проприоцепторами, расположенными в мышцах и сухожилиях. Проприоцептивная информация используется соответствующими разделами мозга и поступает туда с некоторой задержкой. Естественно предположить, что такой сигнал от каждой кисти влияет как на «свой», так и на «чужой» генератор. Предположим также, что такая связь приводит к синхронизации, например, в противофазе. При низких частотах задержка в цепи связи много меньше периода колебаний, и, следовательно, ей можно пренебречь. С другой стороны, запаздывание эквивалентно сдвигу фазы проприоцептивного сигнала. Если запаздывание становится сравнимым с половиной периода, то оно соответствует фазовому сдвигу на π . Такой сдвиг может быть причиной наблюдаемого в экспериментах перехода.

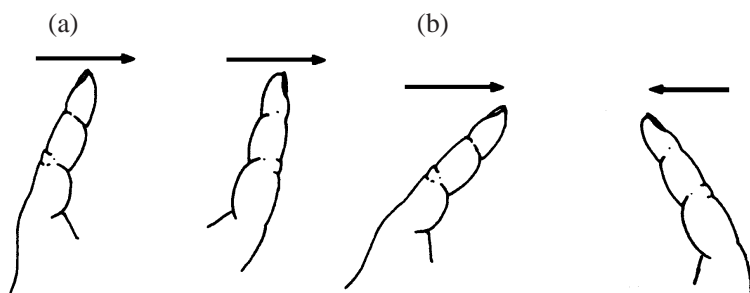


Рис. 4.7. С возрастанием скорости противофазное движение указательных пальцев (а) внезапно сменяется синфазным (б). Из [Haken 1988], Fig. 11.1, Copyright Springer-Verlag.

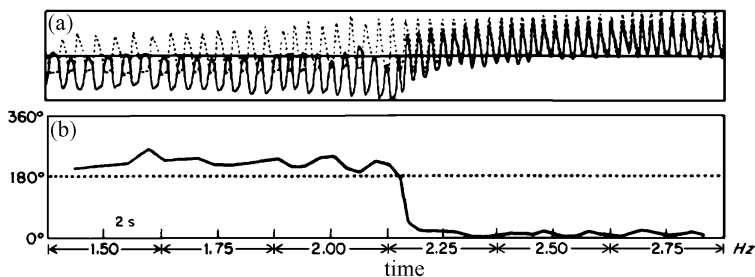


Рис. 4.8. (а) Временная зависимость смещения указательных пальцев левой (сплошная линия) и правой (пунктир) рук. Испытуемый начинает с противофазного режима и увеличивает частоту колебательных движений, следуя инструкциям экспериментатора. (б) Разность фаз двух колебаний. Из [Haken 1988], Fig. 11.2, Copyright Springer-Verlag.

4.1.5 Заключительные замечания и связанные с синхронизацией эффекты

Мы показали с помощью простых аргументов и проиллюстрировали описанием нескольких экспериментов, что эффекты захвата фаз и частот двух взаимодействующих осцилляторов весьма сходны со случаем осциллятора под внешним воздействием. Соответственно, синхронизация двух систем может быть охарактеризована тем же образом, с помощью графиков разность наблюдаемых частот – расстройка и семействами областей синхронизации (языков Арнольда). Возникновение синхронизации опять является переходом от квазипериодического движения с двумя несоизмеримыми частотами к движению с единой частотой. Временная зависимость разности фаз вблизи границы области синхронизации такая же, как и в случае осциллятора под воздействием периодической внешней силы: интервалы почти постоянной разности фаз перемежаются с относительно быстрыми проскоками фазы (см. рис. 3.8).

Есть также и некоторые различия между двумя случаями. Во-первых, для двух взаимодействующих систем частота синхронного движения непостоянна внутри языка Арнольда (выполняется только соотношение $n\Omega_1 = m\Omega_2$). Действительно, два осциллятора взаимно подстраивают свои частоты, пока не достигнут «компромисса»; результирующая частота зависит от начальной расстройки. Во-вторых, фазовый сдвиг в захваченном режиме зависит от вида связи между системами; в частности, можно с определенностью различать син- и противофазные режимы.

Гашение колебаний

Взаимная синхронизация – это не единственный эффект взаимодействия. Если связь достаточно велика, то она может привести к **гашению колебаний** (quenching). (Этот эффект также называют «вымиранием» колебаний.) Пример гашения – давнее наблюдение лорда Рэлея, который обнаружил, что органные трубы взаимно подавляют свои вибрации – был приведен во введении. Причиной такого подавления является то, что взаимодействие может вносить в объединенную систему дополнительную диссипацию. Представим себе, что два электронных генератора, типа использовавшихся Эпплтоном, связаны через сопротивление. Дополнительные потери энергии за счет тока через сопротивление могут не компенсироваться поступлением энергии из источника, и в результате колебания вымирают.

Многомодовые системы

До этого момента мы обсуждали только автоколебательные системы, генерирующие колебания с одной основной частотой; образом таких колебаний является точка, двигающаяся по предельному циклу. В общем случае автоколебательная система может генерировать два (или несколько) процессов, называемых *модами* и имеющих (в общем случае) несоизмеримые частоты. Многомодовая генерация может встречаться в случае, если динамика осциллятора описывается более, чем двумя переменными, т.е. эволюция системы представляется движением точки в M -мерном фазовом пространстве, где $M \geq 3$. Так, например, ламповый генератор на триоде, типа исследованного Эплтоном и Ван-дер-Полем, но с дополнительным колебательным контуром – это четырехмерная система, и для некоторых значений параметров она может генерировать две моды.

Может оказаться (при определенных начальных условиях), что, вследствие конкуренции, выживает только одна мода, но могут сосуществовать и обе. В последнем случае можно рассматривать синхронизацию мод, хотя систему и нельзя разделить на два независимых автогенератора. Путем изменения параметров системы можно попытаться менять связь между модами и добиться их синхронизации, называемой в данном контексте также *захватом мод (mode locking)*.

С точки зрения синхронизации, моды можно рассматривать как отдельные взаимодействующие автоколебания.⁴ Захват мод часто наблюдается в лазерах, см. [Siegmán 1986].

4.1.6 Релаксационные осцилляторы. Пример: клетки истинного и латентного водителей ритма синоатриального узла

Взаимодействие двух релаксационных осцилляторов может осуществляться различными способами. Например, каждый осциллятор может менять порог другого; подобный механизм синхронизации рассматривался Ланда [1980] для двух электронных генераторов пилообразного напряжения. Здесь мы кратко обсудим случай генераторов «накопление–сброс», *взаимодействующих через обмен импульсами*, эта модель важна в ряде биологических приложений.

⁴ В фазовом пространстве захват мод отвечает переходу от движения на торе к движению на предельном цикле, лежащем на торе. С топологической точки зрения это неотличимо от случая двух связанных автоколебательных систем.

Предположим, что осцилляторы независимы в течение периодов накопления, а когда в одном из них происходит сброс, то медленно растущая переменная другого увеличивается скачком (ср. со случаем импульсного воздействия на рис. 3.25). Легко понять, что более быстрый осциллятор заставляет более медленный колебаться со своей частотой (если только расстройка не очень велика). Ясно также, что этот же механизм приведет к синхронизации в ансамблях элементов, где сброс осциллятора приводит к сбросу других. Этот случай *глобальной связи* будет рассмотрен в разделе 4.3; здесь же мы проиллюстрируем синхронизацию связанных через импульсы осцилляторов следующим примером.

Мы уже отмечали, что синоатриальный узел сердца можно рассматривать как релаксационный генератор, вызывающий (в нормальном случае) сокращения сердца. Частота этого осциллятора регулируется автономной нервной системой; в случае некоторых па-

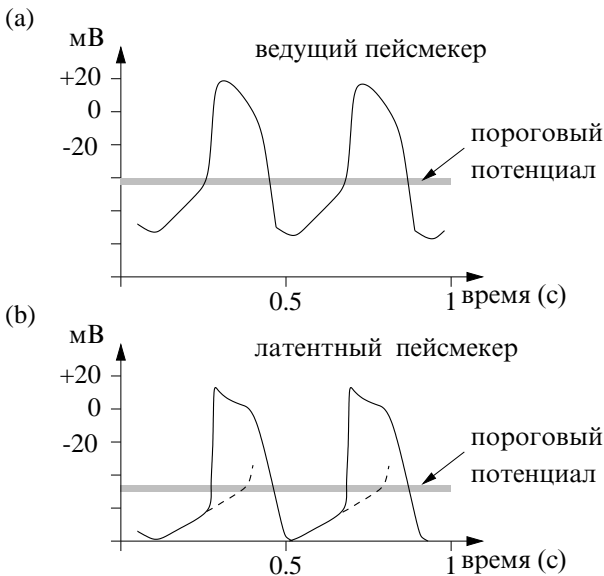


Рис. 4.9. Синхронизация истинной и латентной клеток-пейсмейкеров синоатриального узла сердца. Мембранный потенциал каждой клетки растет, пока не достигнет критического значения, после чего генерируется потенциал действия и мембранный потенциал сбрасывается. Порог сначала достигается истинным водителем ритма (а), и разряд этой клетки заставляет латентный водитель ритма (б) генерировать импульс активности еще до достижения порога. Без взаимодействия латентный водитель ритма генерировал бы потенциал действия позже (штриховая линия). Из [Dudel and Trautwein 1958], см. также [Шмидт и Тевс 1983].

тологий, когда частота становится слишком низкой, синоатриальный узел может быть захвачен искусственным водителем ритма (см. раздел 3.3).

На микроскопическом уровне синоатриальный узел можно рассматривать как совокупность большого числа генерирующих ритм клеток. Когда одна из этих клеток (истинный водитель ритма) сбрасывается («стреляет»), возникающий ток заставляет другие клетки (латентные, скрытые водители ритма) генерировать потенциал действия раньше, чем они бы это сделали без воздействия (рис. 4.9). Таким образом, генерируемый синоатриальным узлом ритм формируется совместным синхронным разрядом большого количества клеток [Шмидт и Тевс 1983]; этот ритм определяется клетками, имеющими наибольшую частоту [Гельфанд и др. 1963]. Это обеспечивает высокую надежность функционирования первичного водителя ритма сердца: если, вследствие каких-либо причин, наиболее быстрая клетка не в состоянии сгенерировать импульс, то генерация задается другой клеткой.

4.1.7 Синхронизация в присутствии шума. Пример: активность мозга и мышц при болезни Паркинсона

Влияние шума на взаимную синхронизацию двух автоколебательных систем примерно такое же, как при захвате внешней силой (см. раздел 3.4). Типичные свойства взаимодействующих осцилляторов с шумом следующие.

- Между синхронными и несинхронными состояниями нет четкой границы, переход к синхронизации размыт.
- В синхронном режиме периоды почти постоянной (но флуктуирующей) разности фаз перемежаются проскоками фазы, при которых разность фаз относительно быстро увеличивается или уменьшается на 2π .

Проиллюстрируем эти свойства на экспериментальном примере.

Ниже мы приводим результаты анализа данных мозговой и мышечной активности пациента, страдавшего болезнью Паркинсона. Мы анализируем записи колебаний магнитного поля, измеренные на поверхности черепа (такая запись называется магнитной энцефалограммой (МЭГ) [Hämäläinen *et al.* 1993]), и одновременно регистрировавшуюся электрическую активность (электромиограмму,

ЭМГ) одной из мышц руки. Детали эксперимента, предварительной обработки данных и обсуждение результатов можно найти в [Tass *et al.* 1998, 1999; Tass 1999]. Целью эксперимента было выяснение электрофизиологии паркинсонического тремора.⁵ Динамика генерации тремора покоя до сих пор не понята окончательно. Известно, что в генерации участвуют несколько взаимодействующих колебательных систем [Volkmann *et al.* 1996], но роль их синхронизации в возникновении патологической активности пока не ясна. В частности, открытым вопросом остается возможность синхронизации активно-

⁵ Тремор — это непроизвольное дрожание рук. При данном заболевании тремор в покое имеет частоту около 3–8 Гц и обычно уменьшается или исчезает при целенаправленном движении [Elble and Koller 1990].

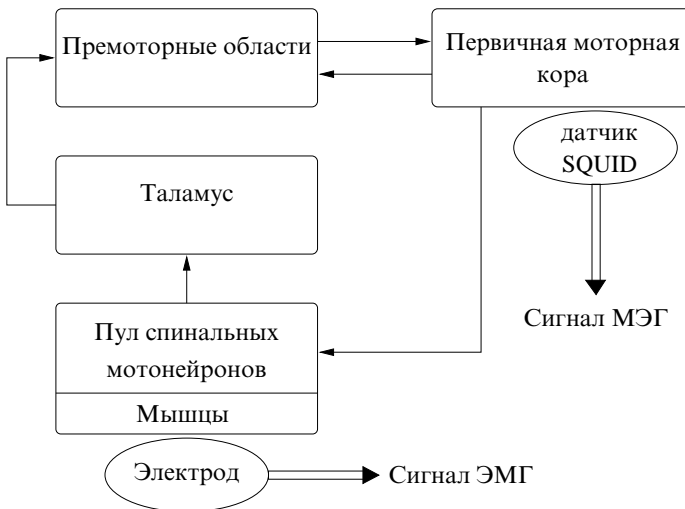


Рис. 4.10. В генерации тремора покоя при болезни Паркинсона задействованы разделы мозжечка, спинной мозг, периферийные нервы и мышцы. Volkmann *et al.* [1996] предполагают, что ритмическая активность таламуса воздействует на премоторные области (премоторная кора и дополнительная моторная область), которые воздействуют на первичную моторную кору. Последняя воздействует на пул спинальных мотонейронов, что создает ритмическую мышечную активность. Периферийные цепи обратной связи достигают двигательной коры через таламус. Активность двигательной коры характеризуется магнитным полем (МЭГ сигнал), регистрируемым на поверхности головы с помощью сверхпроводящих устройств (SQUID), в то время как активность спинального мотонейронного пула отражается в электрической активности мышц, измеряемой поверхностными электродами (ЭМГ сигнал). Анализируя эти сигналы, мы получаем информацию о взаимодействии между соответствующими осцилляторами.

сти областей коры во время тремора, а также – синхронизованы ли сокращения мышц с активностью мозга. Обсудим анализ сигналов от двух элементов сложной системы, схематически представленной на рис. 4.10.

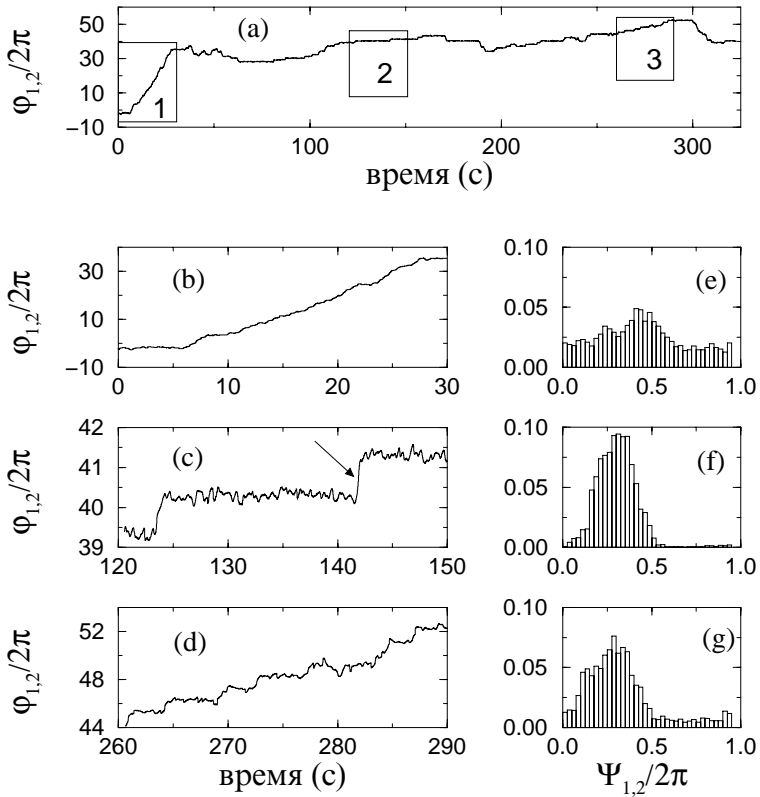


Рис. 4.11. (а) Зависимость от времени разности фаз порядка 1 : 2, $\varphi_{1,2} = \varphi_{\text{MEG}} - 2\varphi_{\text{EMG}}$, демонстрирует поведение, типичное для взаимодействующих осцилляторов в присутствии шума. Три интервала длиной 30 с, показанные прямоугольниками 1, 2 и 3, увеличены в (b), (c) и (d), соответственно. Эти интервалы существенно различаются из-за нестационарности системы (тремор возникает примерно через 50 с после начала записи). В течение первых 30 с осцилляторы можно считать асинхронными (b): разность фаз возрастает и распределение циклической разности фаз $\Psi_{1,2} = \varphi_{1,2} \bmod 2\pi$ почти равномерно (e). Интервалы, показанные в (c) и (d), и соответствующие унимодальные распределения Ψ в (f) и (g) выявляют синхронизацию взаимодействующих систем, хотя степень синхронизации различается. Проскок фазы, показанный стрелкой в (c), увеличен на рис. 4.12. Из [Rosenblum *et al.* 2000], Fig. 2, Copyright Springer-Verlag.

Для конкретного набора данных частоты сигналов ЭМГ и МЭГ равны ≈ 6 Гц и ≈ 12 Гц, соответственно,⁶ поэтому мы ожидаем найти синхронизацию порядка 1 : 2. Рисунок 4.11а показывает разность фаз $\phi_{\text{МЭГ}} - 2\phi_{\text{ЭМГ}}$ между сигналом от двигательной коры и ЭМГ.⁷ Отметим, что анализируемая система *нестационарна*, т.е. ее параметры (например, частоты осцилляторов, сила связи между ними) изменяются во времени. Качественное изменение происходит в момент времени ≈ 50 с, когда возникает тремор. Нестационарность отражается в поведении разности фаз: она растет в течение некоторых эпох (несинхронные состояния) и флуктуирует вокруг постоянного уровня в другое время (синхронные состояния). Мы видим, что во время синхронных эпох разность фаз напоминает случайные блуждания, как мы и ожидали для осцилляторов с шумом. Из-за нестационарности степень синхронизации изменяется во времени. В интервале времени, показанном на рис. 4.11b, разность фаз возрастает (за исключением первых 5 с) и распределение циклической разности фаз – широкое, что типично при отсутствии синхронизации (ср. с рис. 3.38). Во время других интервалов, показанных на рис. 4.11c и рис. 4.11d, колебания могут считаться синхронными. На рис. 4.11c

⁶ Частоты оценивались с помощью спектрального анализа. Отметим также, что данные были предварительно отфильтрованы полосовым пропускающим фильтром, чтобы отделить интересующий нас сигнал от остальной активности.

⁷ Мгновенные фазы вычисляются по МЭГ и ЭМГ сигналам с помощью преобразования Гильберта. Технические детали подробно обсуждаются в главе 6 и приложении П2.

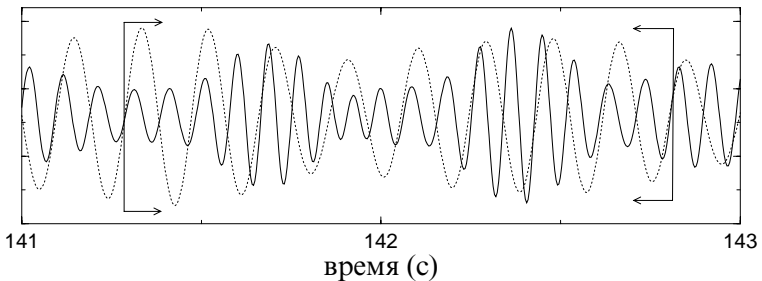


Рис. 4.12. Проскок фазы занимает несколько периодов. Медленный сигнал (пунктир) – это ЭМГ, быстрый сигнал (жирная линия) – это МЭГ (оба сигнала даны в произвольных единицах). Внутри отмеченного участка мы видим 8 и 17 циклов ЭМГ и МЭГ соответственно. В большем масштабе времени разность фаз выглядит как скачок (ср. с рис. 4.11).

мы видим два проскока фазы, а на рис. 4.11d они более частые, так что в течение этих интервалов осцилляторы «менее синхронны» (напомним, что для систем с шумом нет четко определенной границы синхронизации).

Сравнительно быстрые прыжки фазы на 2π , хорошо видные на рис. 4.11 (а, с и d), – это то, что мы называем проскоками фазы. Детальное рассмотрение показывает, что проскок – это не мгновенное событие, а происходящее в течение нескольких периодов колебаний (рис. 4.12). Действительно, вне помеченного участка один цикл ЭМГ соответствует в точности двум циклам МЭГ, в то время как внутри этого участка мы наблюдаем 8 и 17 циклов соответственно.

4.1.8 Синхронизация роторов. Пример: контакты Джозефсона

Здесь мы кратко обсудим особый класс систем, которые не являются автоколебательными, и поэтому их рассмотрение не лежит в основном русле этой книги. Это – **роторы**; примером служит, например, ротор электрического мотора. Частоту вращения можно рассматривать как аналог частоты колебаний, и естественно исследовать, могут ли связанные роторы подстраивать свои частоты. (Отметим, что в данном случае бессмысленно говорить об амплитуде.)

Уже в конце девятнадцатого века было известно, что при определенных условиях генераторы электростанций, работая на общую нагрузку, синхронизируются. Этот эффект исключительно важен для нормальной работы электрических сетей. Действительно, потеря синхронизации одним из генераторов может привести к серьезной поломке или даже к катастрофе. Теоретически это исследовалось в [Ollendorf and Peters 1925–1926].

В 1940-х годах И. И. Блехман и соавторы наблюдали в эксперименте синхронизацию разбалансированных роторов, приводимых в движение моторами: два ротора на общей вибрирующей основе вращались с одной и той же частотой. Действительно, поскольку роторы разбалансированы, они вызывают вибрацию основы с частотой вращения, так что системы «чувствуют» друг друга. Этот эффект взаимной синхронизации вращающихся электромеханических систем нашел ряд приложений в инженерной механике (см. описание, теорию и дальнейшие ссылки в [Блехман 1971, 1981; Blekhnman *et al.* 1995]).

В последнее время большой интерес привлекли сверхпроводящие электронные устройства – контакты Джозефсона. Оказывается, ди-

намика такого контакта с параллельно подключенной емкостью, питаемого постоянным внешним током, описывается точно теми же уравнениями, что и динамика механического маятника под действием постоянного момента силы (см. раздел 7.4). Поэтому контакт Джозефсона можно рассматривать как «электрический ротор». Экспериментально показано, что «вращения» можно синхронизовать периодическим внешним током (рис. 4.13) или связывая два контакта (рис. 4.14). Обзор этих эффектов содержится в [Jain *et al.* 1984].

На качественном уровне синхронизацию роторов можно объяснить, используя их сходство с колебательными системами. Состояние ротора однозначно определяется двумя величинами – углом и скоростью вращения. Поскольку угол – это 2π -периодическая переменная, фазовое пространство ротора – это не плоскость, как у простейших осцилляторов, а цилиндр. Вращения под действием постоянного момента отвечают движению точки по замкнутой кривой, охватывающей цилиндр. Эта кривая обладает тем же свойством нейтральной устойчивости по отношению к возмущениям вдоль тра-

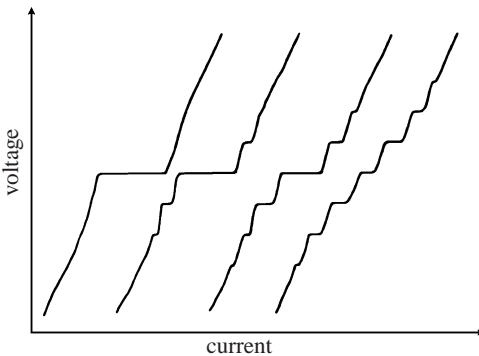


Рис. 4.13. Вольт-амперная характеристика контакта Джозефсона с периодической внешней силой. Самая левая кривая отвечает автономному контакту, а три другие получены при возрастающем значении амплитуды силы. (Эти кривые для наглядности произвольно сдвинуты вдоль оси тока.) Ток и напряжение соответствуют моменту силы и частоте вращения ротора. При малом токе (моменте силы) вращения нет из-за диссипации, и поэтому напряжение равно нулю (см. полку на первой кривой). Большой ток приводит к вращению, направление которого зависит от направления тока; это отражается в ненулевом напряжении. Если приложена дополнительная периодическая сила, то наблюдаются дополнительные полки, называемые ступеньками Шапиро [Shapiro 1963]. Они соответствуют областям захвата частоты вращения частотой внешнего тока. Чем больше сила, тем большее число областей синхронизации видно на характеристике. Из [Кулик и Янсон 1970].

ектории, что и предельный цикл автоколебательной системы.⁸ Следовательно, вращения можно синхронизовать.

4.1.9 Несколько осцилляторов

Синхронизация наблюдается и при взаимодействии более чем двух осцилляторов. Обсуждение больших ансамблей мы отложим до разделов 4.2 и 4.3. Здесь же мы остановимся на синхронизации нескольких осцилляторов.

Свойства синхронизации зависят от числа осцилляторов, а также от вида и силы взаимодействия между каждой парой. Поэтому задача описывается многими параметрами, и возможны различные синхронные состояния, не только синфазные и противофазные.

Более того, при сложных видах связи могут сосуществовать несколько устойчивых фазовых конфигураций. В этом случае связанные системы демонстрируют мультистабильность: которая из конфигураций реализуется, зависит от начальных условий (в фазовом пространстве это отвечает существованию нескольких аттракторов с различными областями притяжения).

Мы не будем углубляться в рассмотрение этой сложной задачи (некоторые случаи рассмотрены в [Ланда 1980; Collins and Stewart

⁸ Другими словами, у замкнутой траектории на цилиндре один ляпуновский показатель равен нулю.

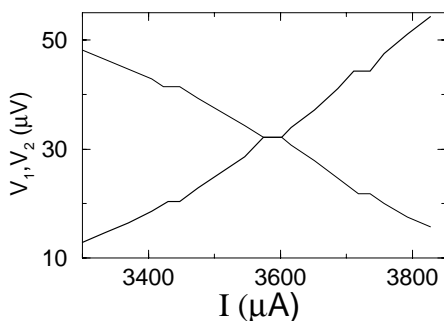


Рис. 4.14. Вольт-амперная характеристика двух связанных контактов Джозефсона демонстрирует эффект взаимной синхронизации. При изменении тока выявляются области захвата 1 : 1 и 1 : 2, где $nV_1 = mV_2$ (напряжение пропорционально частоте вращения). Воспроизведено из *Physics Reports*, 1984, Vol. 109, A. K. Jain, Mutual phase-locking in Josephson junction arrays, pp. 309–426. Copyright 1984, с разрешения издательства Elsevier Science.

1993]), а приведем пример, демонстрирующий возможность сложного поведения уже в нескольких идентичных осцилляторах. Так, уже три осциллятора, соединенные в кольцо, могут находиться в трех устойчивых синхронных конфигурациях в зависимости от параметров связи:⁹ (i) все элементы синхронизованы синфазно; (ii) они сдвинуты по фазе на $2\pi/3$ по отношению к соседям; (iii) два осциллятора колеблются синфазно, а третий элемент имеет другую фазу [Ланда 1980].

В качестве другого примера рассмотрим кольцо из четырех одинаковых осцилляторов (рис. 4.15а). Если связь притягивающая по фазам, то все генераторы синхронизируются в синфазном режиме (рис. 4.15б). При отталкивании фаз элементы образуют две синфазные синхронные пары (рис. 4.15с), а симметричная конфигурация с разностью фаз между соседями $\pi/2$ оказывается неустойчивой.

Свойство нескольких синхронизованных осцилляторов демонстрировать состояния с различным сдвигом фаз позволило выдвинуть гипотезу, что этот эффект используется центральной нервной системой для реализации разных походок [Collins and Stewart 1993; Strogatz and Stewart 1993]. Согласно этой гипотезе, каждая нога контролируется соответствующим автогенератором (центральным генератором ритма, или ЦГР). В случае двуногой ходьбы, синфазные и противофазные синхронные состояния этих генераторов соответствуют прыжкам и шаганию. Различные аллюры четвероногих (иноходь,

⁹ Взаимодействие в этом примере отвечает связи электронных автогенераторов через сопротивления и емкости, и в общем случае связь не симметрична. Поэтому она характеризуется несколькими параметрами.

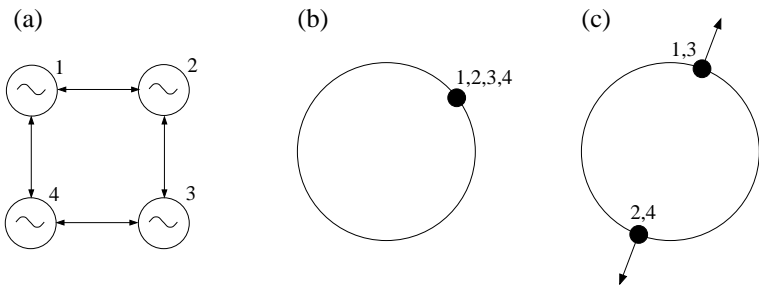


Рис. 4.15. (а) Четыре идентичных осциллятора соединены в кольцо; каждый взаимодействует с двумя соседями. (б) При связи, притягивающей фазы, наблюдается синфазное состояние. (с) При отталкивании фаз образуется конфигурация, при которой невзаимодействующие элементы (1 и 3, 2 и 4) имеют одинаковые фазы, а взаимодействующие соседи находятся в противофазе.

рысь, галоп) соответствуют различным синхронным состояниям системы из четырех осцилляторов.

4.2 Цепочки, решетки и колебательные среды

В этом разделе мы опишем синхронизацию в больших упорядоченных ансамблях осцилляторов. Это означает, что системы составляют упорядоченную пространственную структуру. Простейший пример – это цепочка, в которой каждый элемент взаимодействует с ближайшими соседями; если первый и последний элементы цепочки также связаны, то получается кольцо. В общем случае и пространственное расположение, и взаимодействие могут быть более сложными, например осцилляторы могут взаимодействовать с несколькими соседями. Интересный специальный случай, когда каждый осциллятор взаимодействует со всеми другими, рассматривается отдельно в разделе 4.3. Мы рассмотрим также колебательные среды, в которых осцилляторы непрерывно распределены по пространству.

Представим, что частоты различных осцилляторов слегка отличаются. Какое коллективное поведение может наблюдаться в таком ансамбле? Конечно, если взаимодействие очень слабое, то синхронизации не будет и каждая система будет колебаться со своей частотой. Можно представить также, что достаточно сильная связь синхронизует весь ансамбль, если только собственные частоты не слишком различаются (раздел 4.2.1). В промежуточном случае можно ожидать появление частично синхронизованных состояний. Действительно, несколько осцилляторов могут синхронизоваться и колебаться с одной частотой, отличающейся от частоты соседей (раздел 4.2.2). Могут наблюдаться несколько таких групп, называемых **кластерами** синхронных элементов. Такое рассмотрение справедливо и для сплошной среды, где каждая точка может рассматриваться как осциллятор (разделы 4.2.3 и 4.2.4). Мы проиллюстрируем эти соображения несколькими примерами.

4.2.1 Синхронизация в цепочке. Пример: цепочка лазеров

Синхронизация в цепочке лазеров часто используется для получения излучения большой интенсивности. Этого можно достигнуть, расположив лазеры в линию, так что каждый взаимодействует с

ближайшими соседями или со всеми другими лазерами. Мы опишем эксперименты с CO_2 -лазерами, выполненными Гловой и др. [1996]. В этих экспериментах связь между пятью лазерами осуществлялась путем расположения пространственного фильтра между цепочкой и внешним зеркалом. При такой конфигурации каждый лазер взаимодействует с остальными четырьмя, но сила связи зависит от расстояния между лазерами (рис. 4.16). Результаты, представленные на рис. 4.17, четко указывают на синхронизацию. Действительно, если бы лазеры были не синхронизованы, то излучение в дальней зоне представляло бы собой сумму некогерентных колебаний, и потому было бы пространственно однородным. Неоднородность распределения на рис. 4.17 появляется из-за захвата фаз; это типичная интерференционная картина.

Эта же группа исследователей провела эксперимент с многопучковым CO_2 -лазером, состоящим из 61 стеклянной трубки. Трубки были

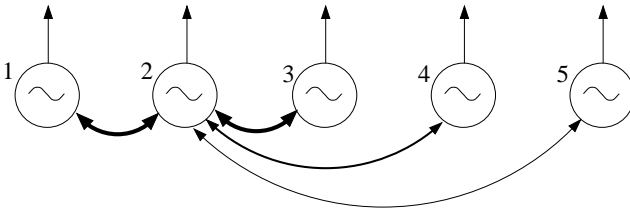


Рис. 4.16. Схема лазерного эксперимента [Глова и др. 1996]. Связь между лазерами уменьшается с расстоянием между ними; это схематически показано толщиной стрелки, обозначающей связь (она показана только для второго лазера).

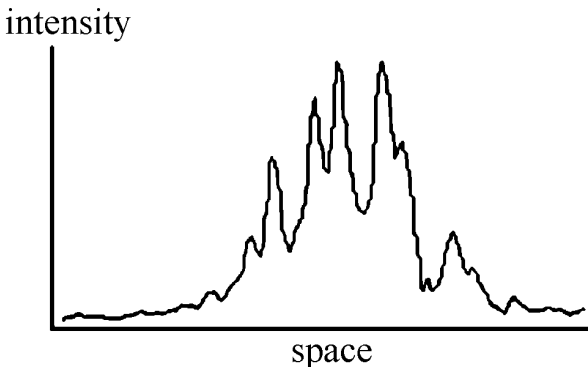


Рис. 4.17. Интенсивность излучения в дальней зоне при слабой связи лазеров. Из-за захвата фаз отдельных лазеров наблюдается интерференция. Из [Глова и др. 1996].

расположены в виде сот [Антюхов и др. 1986]; это пример двумерной решетки (рис. 4.18а). Связь между лазерами осуществлялась через внешнее зеркало. В этом случае индикатором синхронизации также служило неравномерное распределение излучения в дальней зоне (рис. 4.18b, с и d).

4.2.2 Образование кластеров. Пример: электрическая активность кишечника млекопитающих

Кишка состоит из слоев мышечных волокон, по которым от ротового к аборальному концу может распространяться бегущая волна электрической активности. Эта волна вызывает волну сокращения мышц. В работе [Diamant and Bortoff 1969] экспериментально исследовалось распределение частот электрической активности вдоль кишки. Большая часть экспериментов проводилась на кошках; основные наблюдения повторялись на собаках и макаках. Частоты определялись путем усреднения по пятиминутному интервалу времени.

С физической точки зрения, если ограничиться только электрической активностью, то кишку можно рассматривать как одномерную среду, в которой каждая точка – колебательный элемент. Действительно, Diamant and Bortoff [1969] обнаружили, что, если часть кишки разрезать на кусочки, то каждый из них демонстрирует почти синусоидальные колебания с постоянной частотой. Эти частоты уменьшаются от ротового к аборальному концу с почти постоянным градиентом. Частота электрической активности, измеренная *in situ* и отложенная как функция координаты вдоль кишки, обычно имеет вид ступенек (рис. 4.19). Это указывает на существование кластеров

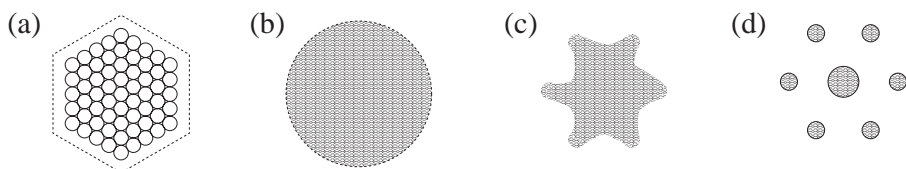


Рис. 4.18. Синхронизация в решетке из 61 лазера, которые были расположены в виде сот (а). При слабой связи интенсивность в фокальном пятне примерно однородна (b). Синхронизация при более сильной связи проявляется в пространственно упорядоченном распределении интенсивности (d). Случай промежуточной связи показан на рисунке (с). Нарисовано схематически по данным [Антюхов и др. 1986].

синхронной активности.¹⁰ В каждом кластере сдвиг фаз между колебаниями увеличивается с пространственной координатой (в соответствии с градиентом собственных частот); соседние кластеры разделены областями модулированных колебаний, или биений (рис. 4.20). В англоязычной физиологической литературе такое поведение во времени часто называют структурой *waxing and waning* (подъем – спад). Отметим, что кластеры в основном формируются на ротовом конце кишки, где относительная расстройка $\Delta f/f$ меньше.

4.2.3 Кластеры и биения в среде: подробное рассмотрение

Образование кластеров в непрерывной колебательной среде (в нашем примере это маскулатура кишечника) является результатом

¹⁰ Образование кластеров в цепочке слабосвязанных генераторов Ван-дер-Поля исследовалось численно Ermentrout and Kopell [1984]; они моделировали таким образом явление синхронизации в кишечнике.

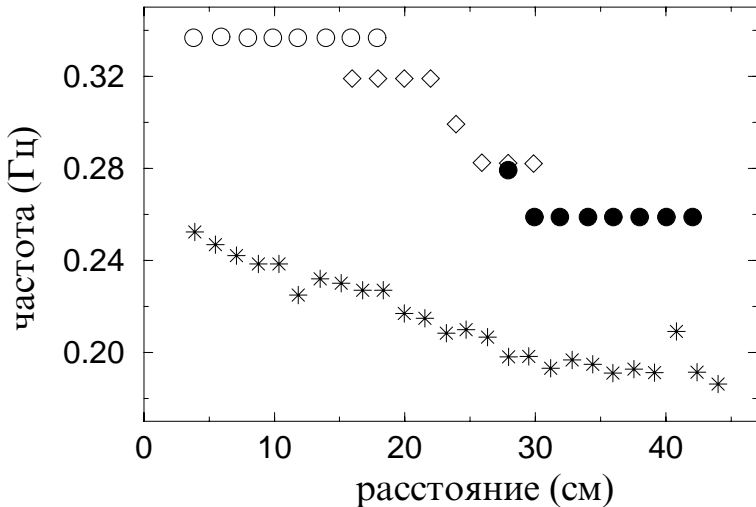


Рис. 4.19. Синхронные кластеры в кишке млекопитающего. График частоты медленной электрической активности мышц как функции координаты вдоль кишки обычно демонстрирует ступеньки. (Расстояние измерялось от связки Трейтца.) Символы \circ , \diamond , и \bullet отвечают трем последовательным (с интервалом 30 минут) измерениям частоты вдоль кишки *in situ*; при каждом измерении электроды переставлялись. Звездочки отвечают частотам разных сегментов той же кишки *in vitro*. Из [Diamant and Bortoff 1969].

двух противоположных факторов: неоднородности распределения собственных частот и связи, которая старается уравнивать состояния систем. Такая связь часто возникает вследствие диффузии, и поэтому называется диффузионной. Рассмотрим, что происходит на границе двух кластеров, имеющих разные частоты. Здесь важно различать случаи дискретной цепочки и непрерывной среды.

В дискретной цепочке граница между двумя кластерами есть граница между двумя осцилляторами, имеющими разные частоты. Это просто означает, что они не захвачены: каждый колеблется со своей частотой. В отличие от этого, если в сплошной среде два осциллятора в двух пространственных точках имеют разные частоты, то между ними должен быть непрерывный переход. На первый взгляд, можно просто провести непрерывный профиль частот, соединяющий эти точки. Более детальное рассмотрение показывает, что это невозможно. Действительно, разные частоты отвечают разным скоростям вращения фазы. Поэтому разность фаз между точками, принадлежащими к двум кластерам, растет во времени со скоростью, пропорциональной разности частот. Следовательно, профиль фазы

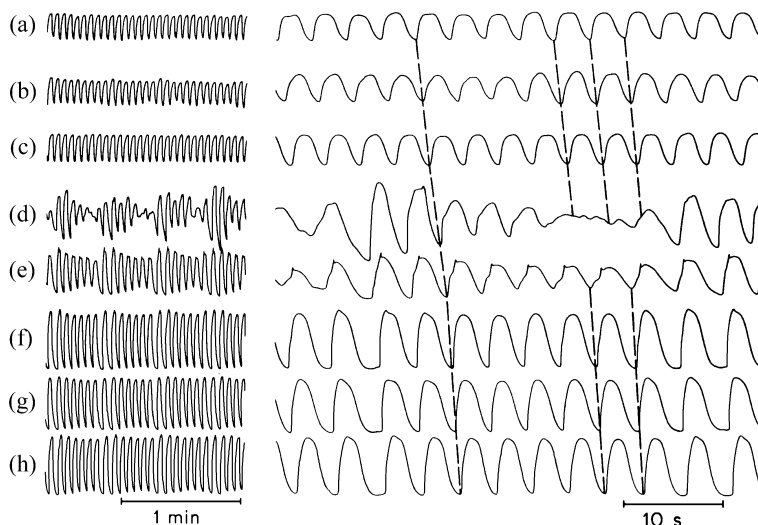


Рис. 4.20. Электрическая активность кишки кошки, измеренная *in situ* с помощью восьми эквидистантно расположенных электродов. Первые три измерения (а, б и в) принадлежат одному кластеру с частотой колебаний 0.29 Гц. Три последних электрода (f, g и h) измеряют активность другого кластера, имеющего частоту 0.26 Гц. На границе между этими кластерами наблюдаются модулированные колебания, или биения (d и e). Штриховые линии отвечают линиям постоянной фазы. Из [Diamant and Bortoff 1969].

становится все более наклонным. С другой стороны, непрерывный крутой профиль фазы означает, что в среде образуются волновые структуры с все меньшей и меньшей длиной волны. Рост разности фаз между кластерами приводит к укорочению длины волны со временем. Ясно, что этот процесс долго продолжаться не может – и действительно, среда находит выход из этой коротковолновой катастрофы. Увеличивающийся градиент фазы уменьшается за счет *пространственно–временного дефекта*. Дефект образуется, когда амплитуда колебаний обращается в ноль, он позволяет сохранить градиент фазы конечным.

Чтобы продемонстрировать, как возникает пространственно–временной дефект, предположим, что разность фаз между точками 1 и 2, принадлежащими разным кластерам, достигла значения $\approx 2\pi$. Если бы между 1 и 2 не было среды, то мы бы просто считали состояния в этих точках почти идентичными. В среде, однако, существует непрерывный профиль фазы между этими точками. Представляя как амплитуду, так и фазу в полярных координатах, мы можем изобразить поле окружностью, см. рис. 4.21. Рассмотрим теперь влияние связи в среде на профиль амплитуды и фазы. Типичная связь – диффузионная, или, по крайней мере, имеет диффузионную компоненту; она стремится уменьшить разность между состояниями ближайших соседей, т.е. уменьшить разность между состояниями в точках 1 и 2 на рис. 4.21. Единственная возможность добиться этого – это уменьшить амплитуду колебаний. Из рис. 4.21 видно, что такое уменьшение амплитуды действительно превращает профиль фазы между 1 и 2 из окружности в почти точку. В конечном состоянии фазы в точках 1 и 2 почти равны, хотя изначально они различались на

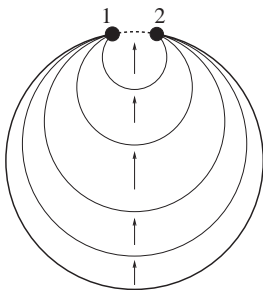


Рис. 4.21. Иллюстрация пространственно–временного дефекта. Начальный профиль фазы и амплитуды между точками 1 и 2 показан жирной сплошной линией. С течением времени амплитуда уменьшается и профиль меняется, как показано стрелками. В конечном состоянии (пунктирная линия) разность фаз между точками 1 и 2 близка к нулю.

2π . Таким образом, можно сказать, что пространственно–временной дефект «съедает» разность фаз 2π . Как ясно из рис. 4.21, это возможно, только если в некоторой пространственной точке в некоторый момент времени амплитуда обращается в ноль. Это можно понять следующим образом: если амплитуда всегда и везде больше нуля, то фаза всегда и везде хорошо определена, и не существует возможности устранить большие градиенты фазы. Напротив, в состоянии с исчезающе малой амплитудой фаза не определена, поэтому единственная возможность изменить профиль фазы – это пройти через такое состояние. Мы отсылаем читателя к рис. 4.20d, где приведен пример пространственно–временного дефекта в природной системе.

4.2.4 Колебательная среда под периодическим воздействием. Пример: воздействие на реакцию Белоусова–Жаботинского

Реакция Белоусова–Жаботинского – это хорошо известный пример колебательного химического процесса (см., например, [Kapral and Showalter 1995] и приведенные там ссылки). Протекание этой реакции сопровождается периодическим изменением цвета среды.

Petrov *et al.* [1997] экспериментировали со светочувствительной формой такой реакции, используя периодическое оптическое воздействие. Реакция протекала в тонкой мембране, расположенной между двумя резервуарами реагентов. При данных условиях автономная (т.е. без воздействия) частота была $f_0 = 0.028$ Гц. Если среда некоторое время подвергалась воздействию яркого света, который задавал одинаковые начальные условия для каждой точки среды, то, после его выключения, среда осциллировала однородно в течение нескольких циклов, так что собственная частота могла быть измерена. Тем не менее, наличие границы и неидеальности среды всегда приводили к разрушению однородных колебаний и возникновению вращающихся спиралей.

Если на реакцию воздействовали пространственно однородными импульсами света с частотой f_e , то, в зависимости от f_e , наблюдалось несколько $n : m$ синхронных состояний. В этом случае воздействие разрушало спиральные волны и возникали различные пространственные структуры. Так, при захвате порядка $1 : 1$ среда осциллировала однородно с частотой силы. В области синхронизации порядка $1 : 2$ система была бистабильной: в зависимости от начальных усло-

вий наблюдались либо два облака¹¹ синхронно колеблющихся точек со сдвигом фазы на π между облаками, либо лабиринтная структура (рис. 4.22). При захвате порядка $1 : 3$ были видны три однородно осциллирующих облака. Структура языков Арнольда в периодически возмущаемой реакции Белоусова—Жаботинского исследовалась также в работе [Lin *et al.* 2000].

Отметим, что причина образования облаков в среде Белоусова—Жаботинского с внешней силой отличается от причины образования кластеров в кишечнике. В последнем случае кластеры возникают за счет неоднородности среды (точки с близкими частотами стремятся сгруппироваться). В данном примере механизм другой: каждая точка стремится синхронизоваться с внешней силой, а также с соседними точками. Если бы не было взаимодействия в среде (в этом случае мы вернулись бы к случаю многих невзаимодействующих осцилляторов, захваченных общей внешней силой, см. раздел 3.6.4), то при захвате порядка $1 : m$ соседние точки с равной вероятностью имели

¹¹ Мы предпочитаем не использовать здесь термин «кластеры», поскольку различные облака имеют одну и ту же частоту и различаются только фазами.

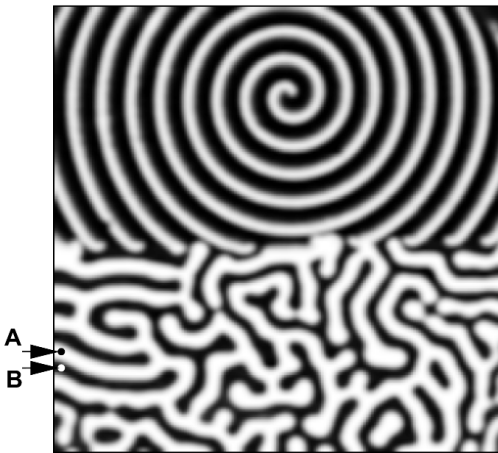


Рис. 4.22. Пример лабиринтной структуры, возникающей при захвате порядка $1 : 2$. Верхняя часть реактора содержалась в темноте; наблюдаемая в этой части спиральная волна типична для автономной колебательной среды. Нижняя часть реактора освещалась импульсами света с частотой $f_e \approx 2f_0$. Временная зависимость колебаний в точках А и В показана на рис. 4.23. Воспроизведено с разрешением из *Nature* [Petrov *et al.* 1997]. Copyright 1997 Macmillan Magazines Limited.

бы разность фаз $2\pi/m \cdot i$, где $i = 1, \dots, m-1$.¹² Из-за взаимодействия точки стремятся иметь те же фазы, что и соседи, и компромисс достигается за счет образования облаков. Очевидно, что разность фаз между облаками равна $2\pi/m \cdot i$.

Синхронизация движения острия спиральной волны

Другой эффект синхронизации в непрерывной среде изучался экспериментально и теоретически в работе [Steinbock *et al.* 1993]. В их установке колебательная химическая система (реакция Белоусова–Жаботинского) освещалась с периодической модуляцией интенсивности. Наблюдался интересный режим, когда ядро спирали двигалось по одной из множества незамкнутых или замкнутых гиперциклоидальных траекторий в фазе с воздействующим освещением.

¹² Действительно, сдвиг во времени медленного сигнала на целое число периодов быстрого не меняет разности фаз между этими сигналами.

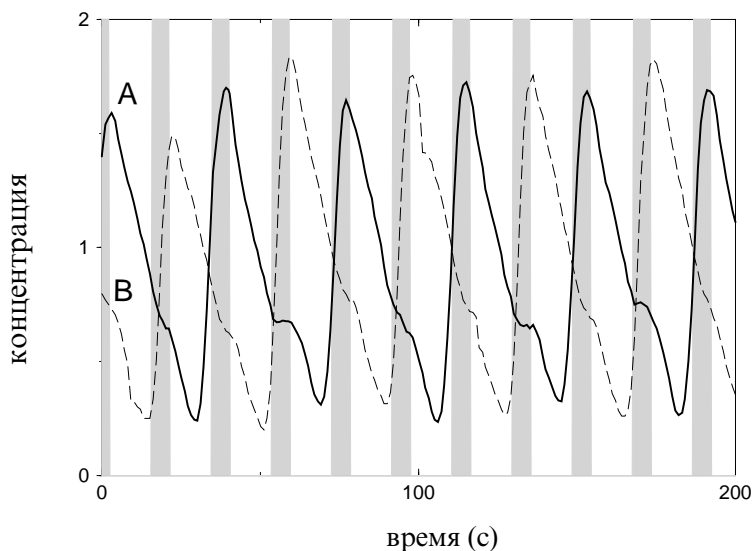


Рис. 4.23. Временная зависимость интенсивности среды в точке А (жирная кривая) и В (пунктир) на рис. 4.22. Заштрихованные серым полосы показывают время возмущения светом. Таким образом, белые и темные полосы в лабиринте представляют точки, синхронизированные с силой; сдвиг фазы между этими двумя группами равен π . Воспроизведено с разрешения из *Nature* [Petrov *et al.* 1997]. Copyright 1997 Macmillan Magazines Limited.

4.3 Глобально связанные осцилляторы

Теперь мы займемся изучением явлений синхронизации в больших ансамблях осцилляторов, в которых каждый элемент взаимодействует со всеми остальными (рис. 4.24а). Такую связь обычно называют *глобальной* или связью типа «каждый с каждым». В качестве характерных примеров мы уже упомянули синхронное испускание световых импульсов популяцией светлячков и синхронные аплодисменты в большой аудитории. Действительно, каждый светлячок подвержен влиянию светового поля, которое создается всей популяцией. Точно так же, каждый аплодирующий слышит звуки, производимые всеми остальными сидящими в зале. В другом примере на стрекочущего сверчка (см. [Walker 1969]) воздействуют своими песнями все его соседи. Ниже мы объясним, почему такая связь приводит к синхронизации в ансамбле, и проиллюстрируем это дальнейшими примерами.

4.3.1 Самосинхронизация в ансамбле: переход Курамото

Светлячки не могут быть абсолютно одинаковыми, как не могут быть идентичными различные индивидуумы в коллективе *homo sapiens*. Следовательно, чтобы понять явление коллективной синхронности, мы должны рассматривать *ансамбль неидентичных осцилляторов*. Мы знаем, что системы могут синхронизоваться, если расстройка не слишком велика, и, следовательно, мы можем ожидать, что синхронизация может охватить всю популяцию, или, по крайней мере, большую ее часть.

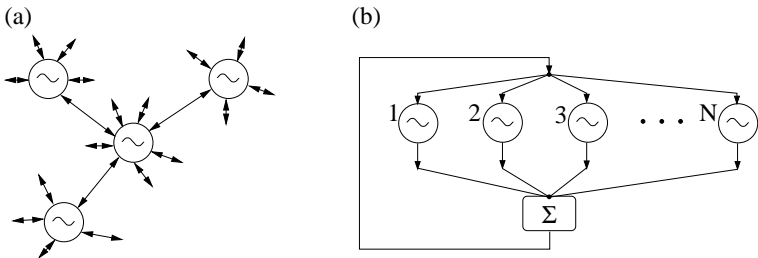


Рис. 4.24. (а) Каждый осциллятор в большой популяции взаимодействует со всеми остальными. Такое взаимодействие называется глобальной, или «каждый с каждым», связью. (б) Эквивалентное представление: каждый элемент ансамбля подвержен воздействию среднего поля, которое создается всеми элементами.

В качестве вспомогательного шага мы перерисуем рис. 4.24а в эквивалентном виде, показанном на рис. 4.24b. Здесь мы заменили сумму сил, действующих на осциллятор со стороны всех остальных, одной силой, действующей со стороны всего ансамбля. Действительно, можно сказать, что на каждый осциллятор действует сила, пропорциональная сумме колебаний всех осцилляторов в ансамбле.¹³

Схема на рис. 4.24b сильно напоминает рис. 3.51. Действительно, в обоих случаях на все осцилляторы действует общая сила, и, как мы уже знаем, эта сила может захватить многие осцилляторы, если их частоты близки. Проблема только в том, что, в случае глобальной связи, эта сила, или среднее поле, не задана изначально, а возникает из-за взаимодействия в ансамбле. Эта сила определяет, синхронизованы ли системы, но сама она зависит от их колебаний – это типичный пример самоорганизации. Чтобы качественно объяснить возникновение этой силы (или чтобы вычислить ее, что делается в разделе 12.1), мы рассмотрим эту проблему самосогласованно.

Предположим сначала, что среднее поле равно нулю. Тогда все элементы в ансамбле осциллируют независимо, и, как известно из раздела 3.6.4, их вклады в среднее поле практически компенсируются. Даже если частоты этих колебаний идентичны, но фазы независимы, среднее от выходов всех элементов ансамбля мало по сравнению с амплитудой одиночного осциллятора.¹⁴ Таким образом, асинхронное состояние с нулевым полем удовлетворяет условию самосогласованности.

Далее, чтобы продемонстрировать, что синхронизация в ансамбле также возможна, мы предположим, что среднее поле не нулевое. Тогда, естественно, оно захватит по крайней мере часть популяции, выходы этих захваченных элементов будут суммироваться когерентно (ср. с разделом 3.6.4), и среднее поле получится ненулевым, как

¹³ Обозначим выход каждого осциллятора $x_k(t)$, где $k = 1, \dots, N$ – индекс осциллятора, а N – число элементов в ансамбле; x может быть изменением интенсивности света или акустического поля относительно некоего среднего значения, или в общем случае любой колебательной величиной. Такая сила, действующая на индивидуальный осциллятор, пропорциональна $\sum_k x_k(t)$. Принято писать эту пропорциональность в виде $\varepsilon N^{-1} \sum_k x_k(t)$, так что она включает нормализацию на число осцилляторов N . Член $N^{-1} \sum_k x_k(t)$ есть просто среднее арифметическое от всех колебаний, поэтому такую связь часто называют связью через **среднее поле**.

¹⁴ В соответствии с законом больших чисел оно стремится к нулю, когда число взаимодействующих элементов стремится к бесконечности; флуктуации среднего поля имеют порядок $N^{-1/2}$.

и предполагалось. Какое из этих двух состояний – синхронное или асинхронное – будет реализовано, или, другими словами, какое из них устойчиво, зависит от степени взаимодействия каждой пары и от того, насколько различаются элементы ансамбля. Сочетание этих двух факторов – силы связи и распределения автономных частот – определяют также, как много осцилляторов будет синхронизовано и, следовательно, как велико будет среднее поле.

Обсудим теперь, как происходит переход к синхронизации, взяв для примера аплодисменты в аудитории. Изначально каждый человек хлопает со своей индивидуальной частотой, и звук, который создает вся публика, – это просто шум.¹⁵ Пока эти отклонения слабы и не имеют характерных частот, они не оказывают на ансамбль существенного влияния. Каждый осциллятор имеет свою собственную индивидуальную частоту ω_k , каждый человек аплодирует и светлячок излучает вспышки в своем ритме, но всегда существует значение частоты, которое предпочитается большинством. Конечно, некоторые элементы ведут себя в очень индивидуалистической манере, но большая часть популяции стремится вести себя «как соседи». Так, частоты ω_k распределены в некотором диапазоне, и это распределение имеет максимум вокруг наиболее вероятной частоты. Таким образом, всегда найдется хотя бы два осциллятора, имеющие близкие частоты, и, следовательно, легко синхронизирующиеся. В результате, вклад в среднее поле на частоте этих колебаний возрастет. Эта увеличившаяся компонента вынуждающей силы захватит, естественно, другие элементы с близкими частотами, что приведет к росту синхронного кластера и дальнейшему росту компоненты среднего поля на определенной частоте. Этот процесс развивается (быстро для релаксационных осцилляторов, относительно медленно для квазилинейных), и в конце концов почти все элементы присоединяются к большинству и осциллируют синхронно, а их общий выход – среднее поле – из шумового становится ритмическим.

Физический механизм, который мы описали, известен как переход Курамото [Kuramoto 1975]. Сценарий такого перехода может быть и более сложным, например, если распределение индивидуальных

¹⁵ Естественно, что общее (среднее) акустическое поле – не нулевое, потому что каждое индивидуальное колебание положительно; интенсивность звука не может быть отрицательной, она колеблется между нулем и неким максимальным значением. Соответственно сумма этих колебаний содержит некую большую постоянную составляющую, а отклонения от этого среднего мы и рассматриваем как колебания среднего поля, и оно мало. Следовательно, аплодисменты воспринимаются как шум почти постоянной интенсивности.

частот ω_k имеет несколько максимумов. В этом случае могут образоваться несколько синхронных кластеров; в конечном счете они могут как слиться, так и сосуществовать. Кластеризация может наблюдаться, например, и в случае, когда сила взаимодействия элемента ансамбля с его ближайшими в пространстве соседями больше, чем с удаленными.

Сценарий перехода Курамото не зависит от природы колебаний (биологические, электрические и т.д.) и от природы взаимодействия. В приведенных выше примерах связь осуществлялась через оптическое или акустическое поле. Глобальная связь электронных систем может быть реализована с помощью общей нагрузки (рис. 4.25); в этом случае напряжение, приложенное к индивидуальной системе, зависит от суммы токов через все элементы. (Пример с последовательно соединенными контактами Джозефсона приведен в разделе 12.3.) Химические осцилляторы могут быть связаны через общую среду, где концентрация реагентов зависит от реакции в каждом осцилляторе и, с другой стороны, воздействует на эти реакции. Один пример такой связи приведен в работе [Vanag *et al.* 2000], где изучалась динамика фоточувствительной реакции Белоусова–Жаботинского в тонком слое, подверженном освещению, интенсивность которого была функцией от средней концентрации одного из реагентов.¹⁶ При достаточно сильном взаимодействии наблюдались синхронные состояния с различными, зависящими от начальных условий, структурами кластеров.

Иногда механизм взаимодействия между элементами ансамбля не вполне ясен. Проиллюстрируем это следующими примерами.

¹⁶ В такой системе глобальная связь сосуществует с локальной диффузионной связью.

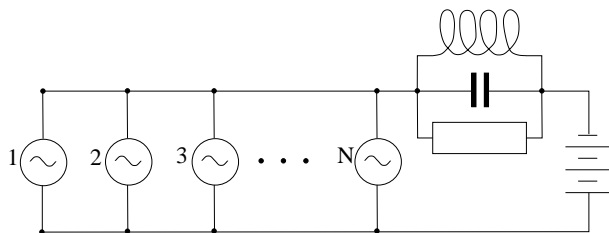


Рис. 4.25. Ансамбль электронных систем, глобально связанных через общую нагрузку. Среднее поле этой системы пропорционально току через нагрузку.

4.3.2 Пример: синхронизация менструальных циклов

Мы иллюстрируем наши теоретические рассуждения результатами [McClintock 1971], которая провела детальное исследование менструальных циклов у 135 женщин в возрасте 17–22 лет, проживавших в общежитии женского колледжа. Она показала повышение синхронности в наступлении начала цикла в течение учебного года (сентябрь–апрель). Это подтвердило ранние косвенные наблюдения, что образование социальных групп влияет на некоторые аспекты менструального цикла. Результаты McClintock соответствовали результатам экспериментов на мышах (см. ссылки в [McClintock 1971]), показавших, что образование групп влияет на баланс эндокринной системы. В частности, было показано, что дисперсия времен начала менструации в различных группах «близких подруг» внутри наблюдаемого коллектива уменьшалась в течение академического года; термин «близкие подруги» был принят для обозначения тех студенток, которые указали друг друга в списке тех, кого они наиболее часто видят и с кем проводят наибольшее время. Это исследование указало на существование у людей некоего межличностного взаимодействия, влияющего на менструальный цикл. Вопрос, является ли механизм этого явления феромональным,¹⁷ или он основан на знании циклов среди подруг, или же на других процессах, остается открытым.

4.3.3 Пример: синхронизация гликолитических колебаний в популяции дрожжевых клеток

Мы уже упомянули, что химические осцилляторы могут быть связаны через общую среду. Действительно, предположим, что некоторое вещество производится в результате реакции и что скорость реакции зависит от концентрации этого вещества. Если среда постоянно перемешивается, то эта концентрация пространственно однородна и определяется всеми осцилляторами (рис. 4.26). Следовательно, ее можно рассматривать как среднее поле. Опишем пример такой системы.

Гликолитические автоколебания могут наблюдаться при определенных условиях в суспензии дрожжевых клеток в перемешиваемой

¹⁷ Феромоны – это ароматические вещества, выделяемые животными и человеком и влияющие на сексуальное поведение и связанные с ним функции организма.

кювете (см. [Richard *et al.* 1996] и приведенные там ссылки). Эти колебания можно наблюдать, измеряя флуоресценцию одного из метаболитов, а именно NADH.¹⁸

Richard *et al.* [1996] рассмотрели две альтернативные гипотезы причин возникновения макроскопических колебаний NADH. Во-первых, можно предположить, что они возникают в результате суммирования одновременно индуцированных колебаний индивидуальных клеток. Действительно, гликолитические колебания индуцируются путем добавления глюкозы в голодающую клеточную структуру. Так как клетки не очень различны и начинают осциллировать в один и тот же момент времени, то можно ожидать, что, по крайней мере некоторое время, клетки останутся приблизительно в фазе. Альтернативная гипотеза – это синхронизация химических осцилляторов, глобально связанных через общую среду. Richard *et al.* [1996] подтвердили вторую гипотезу в следующем эксперименте. Они инициировали гликолитические колебания в двух популяциях клеток, так что сдвиг фаз между ними был около π , а затем смешали две эти популяции. Если бы клетки осциллировали независимо, то колебания компенсировали бы друг друга. Если же клетки взаимодействуют, то можно ожидать возникновения синхронизации в смеси двух изначально синхронных популяций. Последний эффект действительно наблюдался экспериментально: сразу же после смеси-

¹⁸ NADH (никотинамидадениндинуклеотид) имеет свойство поглощать свет с определенной длиной волны; таким образом, концентрация NADH может определяться спектроскопически.

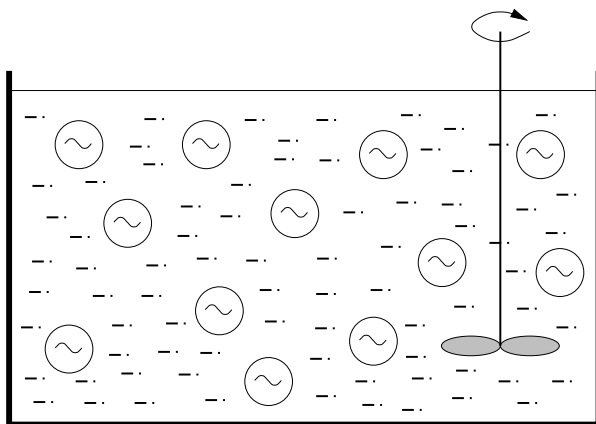


Рис. 4.26. Химические осцилляторы в перемешиваемом растворе глобально связаны через общую среду.

вания колебания NADH исчезли, но они вновь возникли примерно через три минуты (характерный период колебаний порядка 40 с). Далее Richard *et al.* [1996] показали, что внеклеточная концентрация свободного ацетальдегида колеблется с частотой внутриклеточных гликолитических колебаний. Они сделали вывод, что это вещество играет роль средства коммуникации между клетками, т.е. является тем, что мы называем средним полем. Этот вывод подтверждается двумя фактами. Во-первых, клетки дрожжей реагировали на импульсы ацетальдегида. Добавление ацетальдегида во время колебаний приводит к сдвигу фазы, зависящему от концентрации добавки (т.е. от величины импульса) и ее фазы (ср. с описанием переустановки фазы в разделе 3.2). Во-вторых, ацетальдегид выделяется осциллирующими клетками.

4.3.4 Экспериментальное изучение ритмических аплодисментов

Возникновение ритмических аплодисментов изучалось недавно экспериментально Néda *et al.* [2000], которые осуществили записи нескольких оперных представлений в Румынии и Венгрии. Они измеряли интенсивность общего шума с помощью микрофона, помещенного под потолком оперного зала, а также звуки индивидуальных аплодисментов с помощью микрофона, спрятанного недалеко от одного из зрителей. Néda *et al.* [2000] подчеркивают, что возникновению синхронных аплодисментов предшествует приблизительное удвоение периода хлопков. Возможное объяснение состоит в том, что при низкой скорости (i) индивиды способны поддерживать свой собственный довольно стабильный ритм (это означает, что каждый «осциллятор» становится менее шумовым за счет уменьшения флуктуации частоты) и (ii) дисперсия частот уменьшается. Оба фактора – уменьшение шума и расстройки – способствуют переходу к синхронизации. Интересно, что уменьшение частоты, направленное на создание синхронности, – это произвольный акт индивида. Как пишут Néda *et al.* [2000], такое коллективное поведение типично для культурно однородных обществ Восточной Европы и лишь изредка наблюдается в Западной Европе и Северной Америке.

4.4 Различные примеры

В этом разделе мы иллюстрируем эффект взаимной синхронизации дальнейшими примерами.

4.4.1 Бег и дыхание у млекопитающих

Bramble and Carrier [1983] систематически исследовали синхронизацию дыхания и локомоции у бегущих млекопитающих. Захват частоты дыхания и частоты движения конечностей был выявлен у бегущих по конвейерной ленте кроликов, а также у собак, лошадей и людей при беге по твердой поверхности. Было найдено, что при высоких скоростях четвероногие обычно синхронизируют свои локомоторные и дыхательные циклы с постоянным соотношением 1 : 1 (шаг на вдох) как при рыси, так и при галопе (рис. 4.27). Бегущий человек использует несколько режимов с захватом фазы (4 : 1, 3 : 1, 2 : 1, 1 : 1, 5 : 2 и 3 : 2), хотя режим 2 : 1 является, по видимому, предпочтительным (рис. 4.28). Остается неясным, нужна ли синхронизация

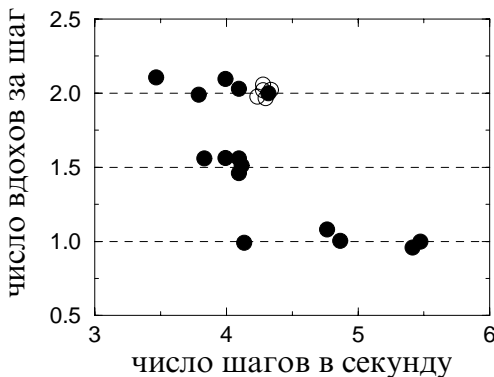


Рис. 4.27. Соотношение между частотой дыхания и прыжков молодого зайца *Lepus californicus*, бегущего по конвейерной ленте. Каждая точка – это среднее из трех последовательных прыжков. Символы ● получены, когда животное еще не достигло зрелого возраста, символы ○ получены, когда оно было почти взрослым. При низких скоростях наблюдалось два полных цикла дыхания на один локомоторный ритм. При высоких скоростях заяц резко переключался на режим синхронизации 1 : 1, тем самым уменьшая вдвое частоту дыхания. Вынужденное бежать со скоростью, соответствующей переходу между этими режимами (примерно четыре прыжка в секунду), животное чередовало эти два режима, демонстрируя захват частот порядка 3 : 2. Нарисовано с использованием данных из [Bramble and Carrier 1983].

дыхания и локомоторной активности для повышения эффективности, или же она просто является физиологически несущественным следствием общего свойства связанных осцилляторов.

Синхронизация сердцебиения, дыхания и локомоции при беге и ходьбе людей по конвейерной дорожке изучалась в работе [Niizeki *et al.* 1993].

4.4.2 Синхронизация двух осцилляторов «соль–вода»

Осциллятор «соль–вода» состоит из пластиковой чашки с водным раствором NaCl, помещенной во внешний сосуд, содержащий чистую воду. Чашка имеет маленькое отверстие снизу. Если измерять электрический потенциал в чашке, то оказывается, что он осциллирует вслед за колебаниями притока чистой и оттока соленой воды. Если две такие чашки помещены в общий внешний сосуд, то, если отношение поверхности чашки к поверхности внешнего сосуда достаточно велико, то наблюдается синхронизация в противофазе [Nakata *et al.* 1998].

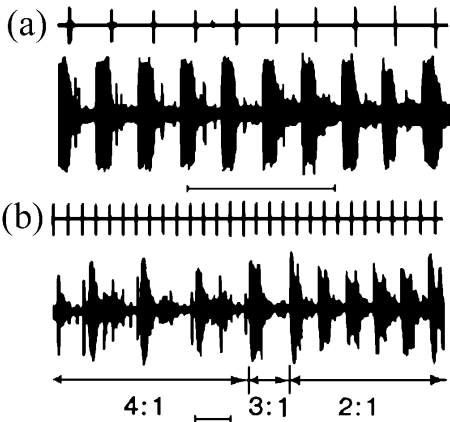


Рис. 4.28. Осциллографическая запись локомоции и дыхания свободно бегущих млекопитающих. Верхняя кривая показывает момент постановки конечности (правой передней ноги у лошади и правой ноги у человека). Нижняя кривая – это дыхание, записанное с помощью микрофона, расположенного в маске на лице. (а) Лошадь в галопе. (б) Человек в момент смены режима 4 : 1 на режим 2 : 1. Горизонтальные отрезки обозначают временной масштаб (2 с). Воспроизведено с разрешения из Bramble and Carrier, *Science*, Vol. 219, 1983, pp. 251–256. Copyright 1983 American Association for the Advancement of Science.

4.4.3 Захват колебаний тубулярного давления в нефронах

Обзор эффектов синхронизации, связанных с регуляцией почечного кровотока, приведен в [Yip and Holstein-Rathlou 1996]. Нормальное функционирование почек требует постоянного кровотока. Это обеспечивается специальным механизмом обратной связи (tubuloglomerular feedback), который действует на уровне отдельных нефронов; эта регуляция часто приводит к возбуждению колебаний. Возникающие колебания автономны и независимы от сердечного и дыхательного ритмов. Эксперименты показывают, что соседние нефроны, относящиеся к одной и той же кортикальной радиальной артерии обычно синхронизуют свои колебания. Была высказана гипотеза, что нефроны взаимодействуют за счет распространения сигнала от системы обратной связи вдоль сосудистой сети предгломерулярной области.

Возможно, что явление захвата лежит в основе резонанса, наблюдавшегося в почечном кровотоке, когда артериальное давление колебательно изменялось с частотой, близкой к собственной частоте индивидуальных нефронов. В этой ситуации авторегуляция в почке отсутствует. Вместо этого могут быть обнаружены сильные колебания почечного кровотока и тубулярного давления, синхронные с внешней силой. Наиболее вероятно, что причина этому – индуцированная синхронность нефронов в почке [Yip and Holstein-Rathlou 1996].

4.4.4 Клеточные популяции

Бродский [1997] приводит обзор многих экспериментальных работ по изучению ритмов клеточных популяций. В частности, в клеточных культурах наблюдались окологосовые ритмы синтеза белка. Был сделан вывод, что эти ритмы возникают за счет синхронизации колебаний многих клеток, взаимодействующих через общую среду (т.е. глобально связанных); конкретные механизмы такого взаимодействия также обсуждались Бродским. Митюшин и др. [1967] изучали изменение размера клеточных ядер асцитной карциномы Эрлиха. Они обнаружили, что в этой популяции есть группы синхронно пульсирующих клеток.

Vasiliev *et al.* [1966] обнаружили, что для клеточных комплексов (групп нескольких контактирующих клеток) мышинной асцитной гепатомы характерна либо полная синхронность в прохождении

митотического цикла, либо существенная асинхронность. Авторы подчеркивают, «что эта синхронность столь точна, что естественно предположить, что она поддерживается некоторым взаимодействием контактирующих клеток, противодействующим случайным флуктуациям цикла». Они сделали вывод, что синхронность митоза может играть важную роль в развитии тканевой анаплазии (изменении клеточной морфологии), характерной для злокачественных опухолей. Возможный механизм синхронизации клеточных циклов обсуждается в работе [Polezhaev and Volkov 1981].

Milan *et al.* [1996] обнаружили, что в изменяющихся в процессе метаморфоза крыловых дисках фруктовой мушки *Drosophila* прохождение через клеточный цикл происходит в кластерах клеток, синхронизованных в одной и той же фазе клеточного цикла. (Подчеркивается, что эти кластеры – неклонального происхождения, т.е. клетки, принадлежащие этим кластерам, являются потомством различных клеток.)

Синхронизация в культурах спонтанно сокращающихся клеток желудочка сердца изучалась в работе [Soen *et al.* 1999]. Наблюдалось, что поведение ансамбля часто состоит из периодических сокращений, синхронизирующихся в поле видимости. Тем не менее, достаточно длинные записи выявляют сложные нарушения ритма.

4.4.5 Синхронизация колебаний систем хищник–жертва

Колебания численности видов – хорошо известное в экологии явление. Один из наиболее изученных примеров – это численность зайцев и рысей в Канаде (канадский меховой цикл, см. рис. 1.14 и его обсуждение, а также работы [Elton and Nicholson 1942; Blasius *et al.* 1999] и приведенные там ссылки). Удивительно, что колебания численности видов в различных регионах Канады идеально синхронизованы по фазе, хотя их амплитуды нерегулярны и остаются довольно различными (рис. 4.29). Blasius *et al.* [1999] предположили, что нерегулярность амплитуд является следствием хаотической динамики в системе хищник–жертва, а взаимодействие между популяциями в соседних областях происходит за счет миграции животных. Они объясняли наблюдаемое явление синхронизацией в решетке связанных хаотических осцилляторов.

4.4.6 Синхронизация в нейронных системах

Исследование синхронизации в больших ансамблях нейронов становится важной проблемой нейробиологии; мы не приводим здесь

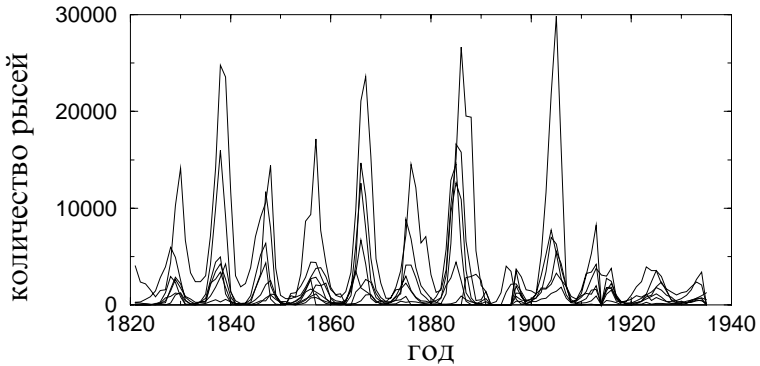


Рис. 4.29. Зависимость численности рысей в девяти регионах Канады от времени. График построен с использованием данных из [Elton and Nicholson 1942].

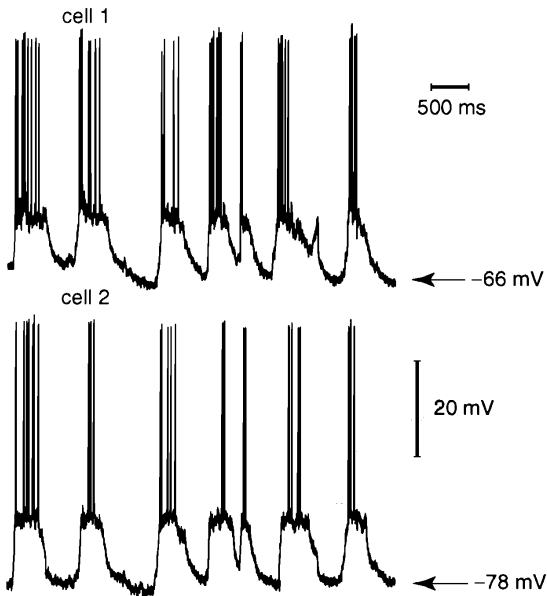


Рис. 4.30. Синхронизация медленных колебаний мембранного потенциала нейронов полосатого тела. Отметим, что генерация спайков (коротких импульсов большой амплитуды, наложенных на медленные колебания) не синхронна. Воспроизведено с разрешением из *Nature* [Stern *et al.* 1998]. Copyright 1998 Macmillan Magazines Limited.

обзора исследований в данной области, а просто упоминаем основные эффекты и приводим некоторые ссылки.

Эффекты синхронизации связаны с несколькими центральными проблемами нейробиологии (см., например, [Singer and Gray 1995; Singer 1999]). Так, по-видимому, синхронизация является центральным механизмом обработки информации нейронами в различных областях мозга, а также коммуникации между этими областями. Результаты экспериментов на животных указывают, что синхронизация нейронной активности зрительной коры, по-видимому, является ответственной за связывание (*binding*) различных, но имеющих друг к другу отношение зрительных черт, в зрительный образ, который распознается как единое целое (см. [Gray *et al.* 1989; Singer and Gray 1995] и приведенные там ссылки). Дальнейшим свидетельством является то, что синхронизация колебательной активности в сенсорно-двигательной коре может служить для интеграции и координации информации, лежащей в основе управления движениями [MacKay 1997].

Синхронизация является механизмом, который поддерживает такие жизненно важные ритмы, как дыхание. Koshiya and Smith [1999] показали, что этот ритм генерируется сетью синаптически связанных пейсмекерных нейронов в нижней части ствола мозга. (Если связь была нарушена фармакологической блокадой синаптического проведения, то нейроны продолжали генерировать ритмически, но не синхронно.) С другой стороны, синхронизация ответственна за генерацию патологического тремора [Freund 1983; Elble and Koller 1990] и играет важную роль в таких серьезных неврологических заболеваниях как эпилепсия [Engel and Pedley 1975].

Синхронная генерация спайков многими нейронами приводит к появлению измеримых флуктуаций сигнала электроэнцефалограммы (ЭЭГ). Спектральный анализ ЭЭГ показывает, что нейроны могут осциллировать синхронно в различных частотных диапазонах (от менее чем 2 до более чем 60 Гц) [Singer 1999]. Одновременная генерация спайков нейронной популяцией – это типовой ответ на различные стимулы: визуальные [Gray *et al.* 1989], обонятельные [Stopfer *et al.* 1997] или тактильные [Steinmetz *et al.* 2000].

Другой тип синхронизации нейронов был описан в [Stern *et al.* 1998]. Они записали мембранный потенциал нейронов полосатого тела в анестезированных животных *in vivo*. Потенциал флуктуирует между двумя подпороговыми состояниями, и во время «верхнего» состояния нейрон генерирует спайки (рис. 4.30). Можно увидеть, что медленные колебания синхронны, в то время как генерация спайков

– асинхронна; моменты генерации спайков определяются шумовыми флуктуациями во время «верхнего» состояния. (Сходные режимы наблюдались в работе [Elson *et al.* 1998] в экспериментах с двумя связанными нейронами из стоматогастрического ганглия омара.)

Stern *et al.* [1998] отметили, что медленные неоднородные флуктуации «вверх–вниз» в клетках коры коррелируют с медленным (≈ 1 Гц) ритмом ЭЭГ во время сна. Было показано, что эти флуктуации зависят от уровня анестезии. С уменьшением уровня анестезии медленные флуктуации различных нейронов коры становятся в меньшей степени синхронизованными, и медленный ритм ЭЭГ становится все более и более слабым, пока не пропадает совсем, хотя колебания индивидуальных нейронов все еще продолжают (см. [Stern *et al.* 1998] и приведенные там ссылки). Отметим, что в нашей терминологии это означает, что анестезия нарушает связь между индивидуальными осцилляторами и, следовательно, среднее поле (медленный ритм ЭЭГ) уменьшается.

Глава 5

Синхронизация хаотических систем

В этой главе мы опишем синхронизацию в хаотических системах. Мы начнем с краткого описания хаотических колебаний в диссипативных динамических системах, обращая особое внимание на свойства, важные с точки зрения возникновения синхронизации. Затем мы опишем различные типы синхронизации: фазовую, полную, обобщенную и т.д. При изучении этих явлений часто обращаются к численному моделированию, поэтому для иллюстрации мы обычно будем использовать результаты расчетов; будут, однако, представлены и экспериментальные данные. Где только возможно, мы постараемся проследить аналогию с синхронизацией периодических автоколебаний.

5.1 Хаотические колебания

Одним из самых важных достижений нелинейной динамики последних десятилетий было открытие сложных, **хаотических** движений в простых колебательных системах. Теперь это явление подробно исследовано и вошло в программу старших классов школы и первых курсов института; тем не менее, введение в эту тематику представляется не лишним. Термин «хаос» означает, что на больших интервалах времени поведение динамической системы предсказать нельзя, даже если параметры системы не флуктуируют и система не подверже-

на действие шума. Нерегулярность и непредсказуемость вытекают непосредственно из внутренних свойств детерминированной динамики системы, хотя на первый взгляд это утверждение выглядит противоречивым. При представлении хаотических автоколебаний в диссипативной системе в фазовом пространстве выясняется, что им соответствует не такой простой геометрический объект, как предельный цикл, а довольно сложное множество, называемое **странным аттрактором** (в противоположность предельному циклу – простому аттрактору).

5.1.1 Пример: модель Лоренца

В 1963 метеоролог Эд Лоренц опубликовал свою знаменитую работу, в которой странный аттрактор был найден при численном исследовании турбулентной конвекции. К счастью, имеется простая физическая реализация *модели Лоренца* – конвекция в вертикальном обруче [Gorman *et al.* 1984, 1986], см. рис. 5.1. Жидкость подогревается снизу, и при достаточно сильном подогреве возникает конвекция. Вблизи порога ее возникновения движение стационарно, с постоянной скоростью V . Ясно, что вследствие симметрии движение возможно как по часовой стрелке, так и в противоположном направлении. При увеличении подогрева стационарное вращение становится неустойчивым и происходят переключения направления конвективного движения. Более того, эти переключения не регулярны и не повторяются: движение не периодически, а хаотично.

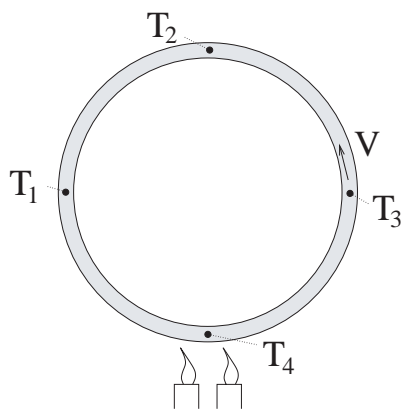


Рис. 5.1. Конвекция вязкой жидкости в тонком подогреваемом снизу обруче хорошо описывается системой Лоренца.

Для теоретического описания хаоса нужно составить модель – систему обыкновенных дифференциальных уравнений. До сих пор мы рассматривали только системы на фазовой плоскости, т.е. с двумя независимыми переменными. Два – это минимальная размерность для существования предельного цикла, но ее недостаточно для хаотического движения. Поскольку траектории в фазовом пространстве не пересекаются (это противоречило бы детерминизму – через данную точку фазового пространства может проходить только одна траектория), на фазовой плоскости невозможно получить что-то более сложное, чем предельный цикл. Хаотическая модель должна быть по крайней мере трехмерной, т.е. состояние осциллятора должно задаваться тремя координатами. Модель Лоренца как раз и описывается тремя переменными x, y, z , имеющими следующее физическое значение: x пропорционально горизонтальной разности температур $T_3 - T_1$; y пропорционально скорости потока V ; z пропорционально вертикальной разности температур $T_4 - T_2$. Следуя заголовку этой части, мы не будем приводить здесь сами уравнения (см. часть II, уравнения (10.4)), а просто изобразим на рис. 5.2 полученное численно решение. Зависимости всех переменных от времени представляют собой нерегулярные колебания с переключениями между конвективными движениями по часовой стрелке (отрицательные y) и против часовой стрелки (положительные y).

Мы взяли модель Лоренца как представительный пример хаотических колебаний. Есть много других систем (например, электронные схемы, лазеры, химические реакции), которые демонстрируют хаос и могут быть описаны простыми дифференциальными уравнениями; их описания можно найти в многочисленных книгах о хаосе, см. ссылки в разделе 1.4. Более того, при наблюдении многих естественных процессов можно сделать вывод, что они порождены хаотической динамикой, см. примеры в [Kantz and Schreiber 1997].

Так же как и в случае периодических колебаний, важно различать автоколебания и вынужденные движения. Хаотические автоколебания описываются *автономными* уравнениями, поэтому все моменты времени эквивалентны. Можно сказать, что они обладают непрерывной симметрией по времени (в смысле независимости динамики от сдвига времени). Есть много примеров хаотических движений в нелинейных системах с периодической внешней силой, они описываются неавтономными уравнениями. Сила в этом случае нарушает непрерывную симметрию по времени и делает ее дискретной (только моменты времени, различающиеся на период или несколько периодов внешней силы, эквивалентны друг другу), см. также аналогичное

обсуждение для периодических колебаний в разделе 2.3.2. Другой популярный класс хаотических моделей – отображения – в этом смысле эквивалентен системам с периодической силой. Здесь симметрия по времени очевидным образом дискретна, так как дискретно само время. Для многих свойств хаоса, в частности для явления полной синхронизации (раздел 5.3), различие между автоколебательными и вынужденными системами не существенно. Однако для фазовой синхронизации хаоса (раздел 5.2) оно является решающим.

5.1.2 Чувствительность к начальным условиям

Нерегулярность хаотических движений вовсе не означает их полную непредсказуемость. Действительно, кривые на рис. 5.2b выглядят вполне предсказуемо на коротких (меньше характерного периода) интервалах времени; это следует из регулярности колебательных структур на рис. 5.2a. Это полностью согласуется с детерминированностью процесса: если состояние x, y, z известно в момент времени

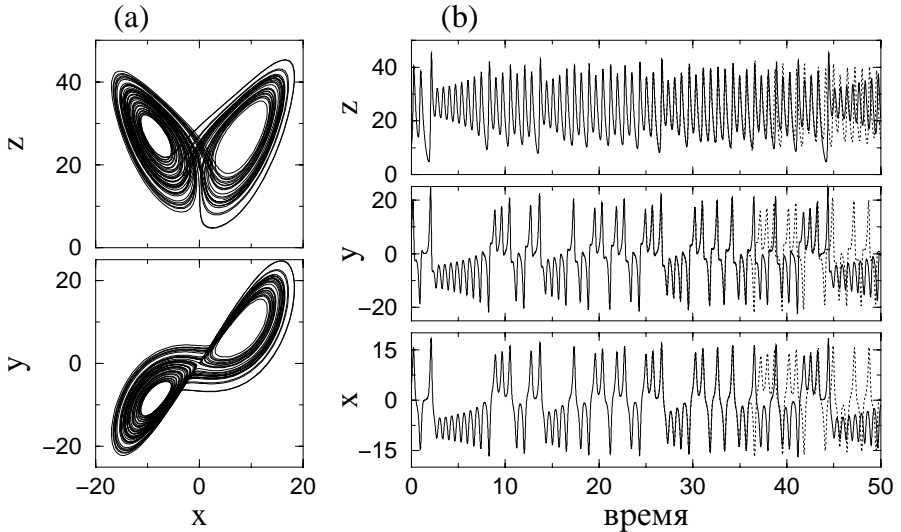


Рис. 5.2. Динамика системы Лоренца (см. уравнения (10.4)). (а) Проекция фазового портрета на плоскости (x, y) и (x, z) . Отметим симметрию $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$. (б) Зависимости переменных x, y, z от времени (сплошные линии). На этом рисунке также иллюстрируется чувствительность к малым возмущениям: при $t = 25$ к переменной x добавлено возмущение 10^{-4} . Возмущенное решение показано пунктиром, очень скоро оно начинает отличаться от исходного и демонстрирует другую последовательность колебаний.

$t = 0$ с абсолютной точностью, то состояния во все моменты времени $t > 0$ определены однозначно. Эти состояния задаются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений; на практике для его нахождения используются численные методы. Для поведения хаотических динамических систем характерно следующее: оно *чувствительно зависит от малых возмущений начальных условий*. Это означает, что если взять две близкие точки в фазовом пространстве и следить за их эволюцией, то фазовые траектории, выходящие из этих точек, в конце концов расходятся (рис. 5.2b). Другими словами, даже если начальное состояние хаотического осциллятора известно с большой, но конечной точностью, дальнейшее поведение можно предсказать только на конечном, зависящем от точности, интервале времени, но не на больших временах.

Эта чувствительность свойственна каждой точке траектории, что означает неустойчивость всех движений на странном аттракторе. Количественно неустойчивость измеряется максимальным **ляпуновским показателем**. Обратная к нему величина есть характерное время развития неустойчивости; возмущение приблизительно удваивается на этом интервале времени. На рис. 5.3 мы демонстрируем, как из чувствительности следует нерегулярность. Во-первых, мы рассматриваем только установившиеся (возвращающиеся) состояния, т.е. те, которые когда-нибудь повторяются. Пусть такое состояние 1 после некоторой эволюции примерно повторяется, придя в близкое состояние 2. Это соседнее состояние можно рассматривать как возмущение исходного. Из-за неустойчивости, эволюция состояния 2 будет все более и более отличаться от эволюции состо-

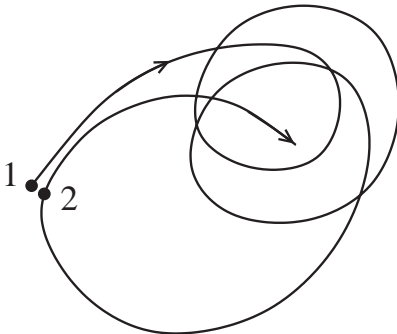


Рис. 5.3. Иллюстрация связи неустойчивости траекторий и нерегулярности: хотя состояние 1 почти повторяется в состоянии 2, в конце концов они расходятся, так что любое повторение оказывается временным.

нения 1.¹ Таким образом, любая повторяемость состояний системы – временная, регулярные повторения определенных структур динамики невозможны. Из неустойчивости следует и перемешивание на хаотических аттракторах: если выбрать множество близких начальных условий, то через некоторое время (обратно пропорциональное наибольшему ляпуновскому показателю) эти точки будут равномерно распределены по всему аттрактору.²

Устойчивость движений можно охарактеризовать более подробно. В самом деле, малые возмущения состояния в фазовом пространстве могут возникать по всем возможным направлениям. Число независимых компонент их линейной эволюции в точности равно числу независимых переменных, и для каждой компоненты можно определить инкремент (декремент) неустойчивости (устойчивости); эти инкременты называют ляпуновскими показателями. В модели Лоренца три ляпуновских показателя, поскольку число переменных равно трем.³ У хаотической трехмерной системы один показатель положителен (он отвечает описанной выше чувствительности), один отрицателен (он отвечает свойству аттрактора притягивать близле-

¹ В устойчивом случае траектории, выходящие из 1 и 2, подходят все ближе друг к другу, что с необходимостью приводит к существованию устойчивого предельного цикла в их окрестности.

² В некоторых случаях время перемешивания может быть гораздо большим, что связано со слабой диффузией по фазе, см. раздел 5.2.1.

³ У M -мерной динамической системы имеется M ляпуновских показателей.

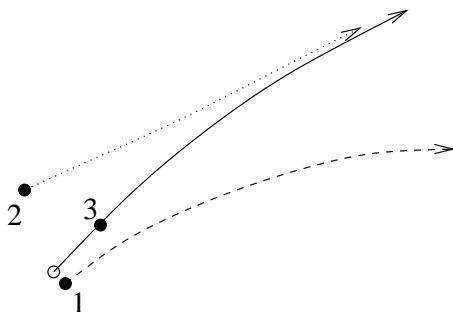


Рис. 5.4. Нарастающее, убывающее и нейтральное возмущения в хаотической системе. Состояние в трехмерной хаотической системе (символ \circ) возмущено по одному из трех направлений в фазовом пространстве (символ \bullet). Невозмущенная траектория показана сплошной линией. Возмущение 1 растет, соответствующая траектория (штриховая линия) отходит от исходной. Возмущение 2 убывает: траектория (пунктир) подходит к невозмущенной. Возмущение 3 лежит на самой траектории, оно не растет и не убывает.

жащие траектории), и один в точности равен нулю, что соответствует сдвигам вдоль траектории – ясно, что эти возмущения не растут и не убывают.⁴ Локальная устойчивость хаотических состояний показана на рис. 5.4. Напомним читателю, что в случае устойчивых периодических автоколебаний один ляпуновский показатель равен нулю, а остальные отрицательны (ср. с рис. 2.6). Последние отвечают притяжению траекторий к аттрактору (предельному циклу), в то время как нулевой показатель соответствует сдвигу точки вдоль предельного цикла, что эквивалентно сдвигу фазы автоколебаний. Это дает основание ввести понятие фазы и для хаотических колебаний, определив ее как переменную, соответствующую нулевому ляпуновскому показателю, или, другими словами, как координату вдоль траектории. Мы покажем, что во многих случаях динамика фазы приводит к интересным эффектам, например к захвату частоты хаотических колебаний. Мы называем эти эффекты «фазовой синхронизацией», чтобы отличить от других типов синхронизации хаотических колебаний, рассматриваемых ниже в разделе 5.3.

5.2 Фазовая синхронизация хаотических автоколебаний

Сначала мы покажем, что по крайней мере некоторые хаотические автоколебания можно описывать в терминах зависящих от времени фазы и частоты. Затем будет обоснована возможность синхронизации таких колебаний, где синхронизация понимается в смысле захвата частот. Мы подробно обсудим захват частоты внешним сигналом и проиллюстрируем его на экспериментальном примере.

5.2.1 Фаза и средняя частота хаотических автоколебаний

Определение фазы и частоты основано на наблюдении, что многие хаотические автоколебания выглядят как периодические, но с нере-

⁴ Свойство иметь нулевой ляпуновский показатель выполняется для автономных систем, которые инвариантны по отношению к произвольным сдвигам времени. В случае систем с периодической силой или в случае отображений система остается неизменной только при дискретных сдвигах времени (на период силы или на единицу времени соответственно), поэтому нейтральных малых возмущений вдоль траектории нет, и в общем случае нулевой ляпуновский показатель отсутствует.

гулярной модуляцией. Например, если для системы Лоренца взять координаты z и $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ (это, фактически, соответствует специальной двумерной проекции фазового портрета), то траектория на плоскости (z, u) будет выглядеть как размазанный предельный цикл (рис. 5.5а). Временные зависимости величин z и u напоминают периодические колебания с изменяющимися «амплитудой» и «периодом». Сконцентрируем наше внимание на этой последней характеристике колебаний. Поскольку процесс нерегулярный, то период нельзя определить так, как это было сделано для периодических автоколебаний.⁵ Вместо этого мы можем определить время между двумя схожими событиями процесса, например, между двумя максимумами переменной z . В терминах теории динамических систем это можно представить как построение отображения Пуанкаре по условию максимума переменной z и рассмотрение времен между двумя последовательными пересечениями секущей поверхности (рис. 5.5b). Эти **времена возврата** не постоянны: они зависят от значения переменной на секущей. Эти значения – хаотические, поэтому и времена возврата нерегулярны. Мы можем интерпретировать эти времена как «мгновенные» *периоды* колебаний и определить средний

⁵ Более того, из рассмотрения спектра мощности можно заключить, что в движении присутствует много частот.

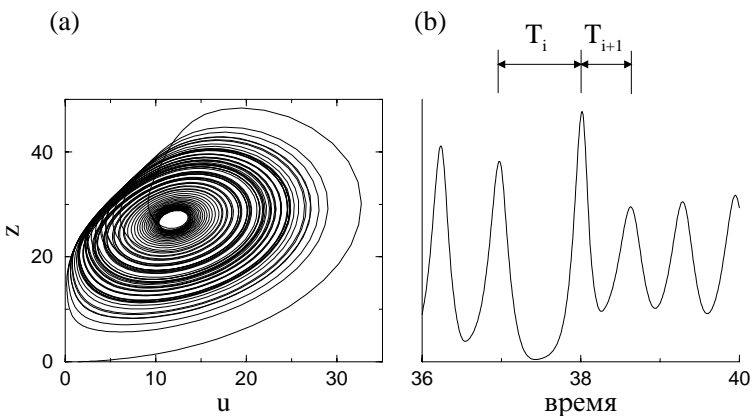


Рис. 5.5. (а) В переменных z, u динамика системы Лоренца напоминает вращения вокруг центра $u \approx 12, z \approx 27$ с нерегулярной амплитудой и нерегулярным временем оборота. (б) Времена возврата T_i показаны на графике зависимости z от времени как расстояния между максимумами; T_i можно рассматривать как мгновенный период хаотических автоколебаний.

период процесса $z(t)$. Для этого достаточно взять большой интервал времени τ и сосчитать число максимумов $N(\tau)$ переменной z на этом интервале (или сосчитать число других событий, выбранных для построения отображения Пуанкаре); отношение $\tau/N(\tau)$ даст *средний период*. Соответственно, средняя угловая частота колебаний может быть определена как $\langle \omega \rangle = 2\pi N(\tau)/\tau$. Основная идея фазовой синхронизации хаотических автоколебаний состоит в возможности захвата этой частоты периодической внешней силой или же в возможности ее подстройки к частоте другого хаотического осциллятора в результате их взаимодействия. Для более детального описания процесса полезно определить фазу хаотических автоколебаний.

Действуя в том же духе, что и в случае периодических автоколебаний, мы припишем каждому обороту траектории на рис. 5.5 приращение фазы 2π . Используя отображение Пуанкаре, можно считать, что каждому пересечению секущей соответствует определенная фаза (и, конечно, мы выберем ее равной 0). За один оборот между двумя последовательными пересечениями фаза увеличивается на 2π . Поскольку времена возврата нерегулярны, мгновенная частота, определенная как обратное время возврата, флуктуирует. Другими словами, фаза вращается не равномерно, как при периодических автоколебаниях, а то ускоряется, то замедляется, причем нерегулярно. В результате *фаза диффундирует как при периодических автоколебаниях с шумом* (см. раздел 3.4). Полную динамику фазы можно представить как комбинацию двух процессов: вращение со средней частотой и случайные блуждания, интенсивность которых пропорциональна вариации времен возврата. Динамика фазы показана на рис. 5.6, ее следует сравнить с соответствующей картиной для осциллятора с шумом, показанной на рис. 3.35.

Подчеркнем, что диффузия фазы слабее расходимости близких траекторий вследствие присущей хаосу неустойчивости. В диффузионном процессе с нулевым средним сносом отклонение от начальной точки растет примерно пропорционально корню от времени; то же справедливо и для расстояния между близкими точками. В отличие от этого, неустойчивость развивается экспоненциально быстро. Более того, если разброс времен возврата мал, то и коэффициент диффузии будет малым, в этом случае хаотические автоколебания выглядят в двумерной проекции как относительно равномерные вращения с хаотической амплитудной модуляцией. Подобные автоколебания часто называют когерентными; в их спектре мощности присутствует узкий пик (примером служит система Рёсслера (см. раздел 1.3 и 10.1)). Отметим также, что вычисление фазы – это нелиней-

ное преобразование, в некотором роде – «нелинейная фильтрация». Действительно, при вычислении фазы мы пренебрегаем вариациями амплитуды, которые обычно вносят вклад в сплошную компоненту спектра мощности процесса. Диффузия фазы ответственна за ширину основного спектрального пика.

На фазовую динамику хаотических систем можно взглянуть и по-другому: взять ансамбль (облако) начальных условий и проследить его эволюцию в фазовом пространстве. Поскольку хаотическая система – перемешивающая, локализованное вначале облако в конце концов расплывается по хаотическому аттрактору. Это расплывание включает в себя быстрое распространение вследствие неустойчивости и диффузию, соответствующую фазе (рис. 5.7).

5.2.2 Захват частоты внешней силой. Пример: хаотический разряд в газе

Предположим теперь, что на хаотические автоколебания действует периодическая сила. В случае модели Лоренца, например, можно периодически во времени менять подогрев; такая сила периодически воздействует на переменную z . Если период силы близок к среднему времени возврата, то движения, убегающие вперед по фазе, замедляются, а отстающие – ускоряются. В результате фаза захватывается внешней силой, как показано на рис. 5.8. Синхронизацию можно также характеризовать как захват частоты: средняя частота хаоти-

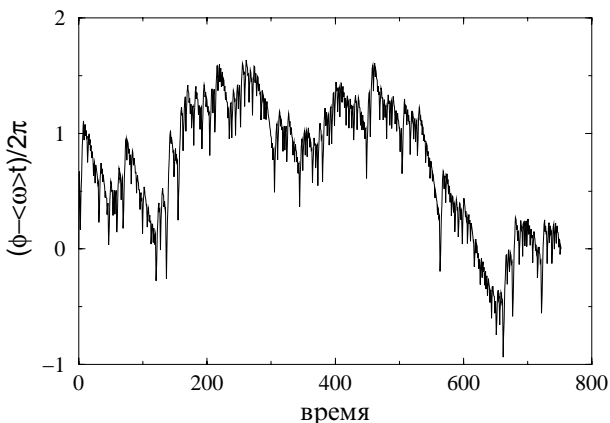


Рис. 5.6. Отклонение фазы системы Лоренца от равномерного вращения выглядит как типичный диффузионный процесс (случайные блуждания).

ческих автоколебаний совпадает (или почти совпадает) с частотой внешней силы.

Описанная выше фазовая синхронизация хаотических автоколебаний наблюдается при средних амплитудах внешней силы. С од-

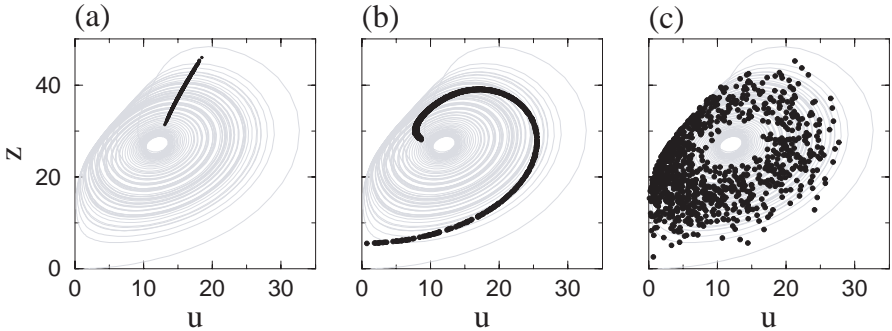


Рис. 5.7. Диффузия фазы в модели Лоренца. Аттрактор показан серым цветом. (а) Множество начальных условий (черные точки) выбрано на секущей поверхности (переменная z максимальна), все фазы при этом равны нулю. Эволюция этого множества приводится на (b) и (c). (b) По истечении времени $t = 0.75$ (среднее время возврата) некоторые точки отстают, а некоторые уходят вперед, фазы распределены в конечном интервале, меньшем 2π . (c) После дальнейшей эволюции в течение времени $t = 3.75$ траектории распределяются по аттрактору, что означает, что фазы распределены примерно равномерно от 0 до 2π .

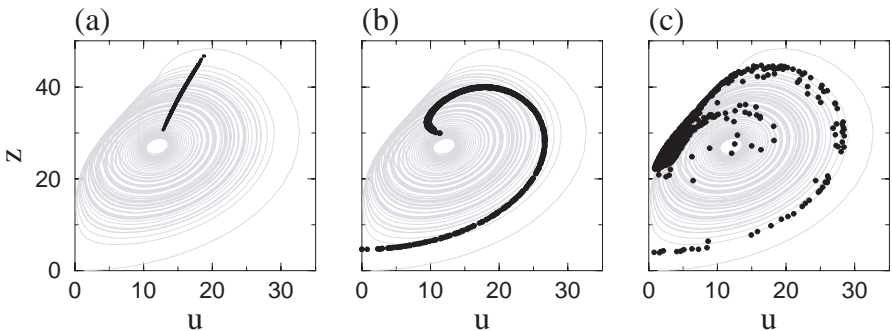


Рис. 5.8. Та же модель Лоренца, что и на рис. 5.7, но с периодической силой (безразмерная частота которой равна 8.3). (а) Начальные условия такие же, как на рис. 5.7а. (b) После одного периода силы фазы более сконцентрированы вокруг среднего значения; отличие от рис. 5.7b, впрочем, мало. Тем не менее, эффект накапливается и после следующих 50 периодов силы различие явно видно на графике (c). Большая часть точек вращается синхронно с силой, хотя некоторые точки не захвачены.

ной стороны, сила должна быть достаточно большой, чтобы подавить диффузию фазы и захватить частоту. С другой стороны, сила должна быть достаточно слабой, чтобы не подавить хаос. Если сила очень большая, то вместо хаоса обычно устанавливается устойчивое периодическое движение (см. раздел 5.3.4).

Представляется уместным описать фазовую синхронизацию хаотических автоколебаний в общем контексте явления захвата частоты. На рис. 5.9 сравниваются периодические, шумовые и хаотические колебания. Захват фазы периодических автоколебаний – полный, он может быть реализован при сколь угодно малой амплитуде силы. Для захвата фазы шумовых и хаотических колебаний необходимо подавить диффузию фазы, поэтому в этих случаях обычно имеется порог синхронизации по амплитуде силы. Отметим также, что захваченные колебания остаются шумовыми или хаотическими: сила вносит в движение некоторый порядок (идеальный ритм), но не делает его полностью регулярным. В целом можно сказать, что фазовая синхронизация хаотических систем очень похожа на синхронизацию шумовых; это позволяет широко интерпретировать наблюдаемый в

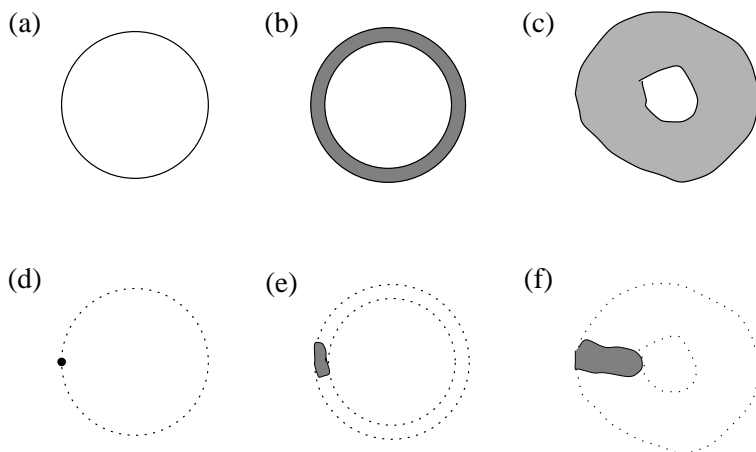


Рис. 5.9. Схематическое представление фазовой синхронизации для периодических (а), (d), шумовых (b), (e) и хаотических (c), (f) автоколебаний. Когда периодические автоколебания (а) захвачены внешней силой, стробоскопически (с периодом внешней силы) наблюдаемая фаза принимает определенное значение (d). Эта идеальная картина частично искажается в присутствии ограниченного шума, но захват тем не менее возможен: флуктуации фазы ограничены (e). Хаотические автоколебания (c) похожи на шумовые (b); здесь диффузия фазы также может быть подавлена, что приводит к состоянию с хаотической амплитудой, но ограниченными флуктуациями фазы (f).

нерегулярных процессах захват фазы (см. главу 6): чтобы идентифицировать синхронизацию по экспериментальным данным, не обязательно выяснять, является процесс шумовым или хаотическим.

Фазовая синхронизация хаоса наблюдалась в ряде экспериментов. Пиковский [1984b] неявно продемонстрировал этот эффект, сравнивая спектры мощности свободных и вынужденных автоколебаний в электронной цепи. В этой работе было показано, что внешняя сила делает более узким пик в спектре (напомним, что ширина пика связана с диффузией фазы, и, как мы уже знаем, внешняя сила подавляет диффузию). Захват частоты электронного хаотического автогенератора наблюдался в [Parlitz *et al.* 1996], см. также [Rulkov 1996]; эксперименты с лазером описаны в [Tang *et al.* 1998a,c].

Для иллюстрации мы выбрали эксперименты [Rosa Jr. *et al.* 2000; Ticos *et al.* 2000], где изучалась фазовая синхронизация хаотического газового разряда периодической силой. Разряд создавался прикладыванием постоянного напряжения в 800 Вольт к трубке, наполненной гелием. Периодическая сила осуществлялась переменным напряжением, подаваемым последовательно с постоянным. Амплитуда переменного напряжения составляла 0.4 В. Сравнение стробоскопических портретов свободного и вынужденного разряда (рис. 5.10) свидетельствует о синхронизации; здесь I – интенсивность излучаемого лампой света, и фазовый портрет системы показан в запаздывающих координатах $(I(t), I(t + \tau))$.⁶ Систематически изменяя амплитуду и частоту внешней силы, можно определить область синхронизации.

⁶ Время измеряется в единицах интервала выборки. Более подробно о методе реконструкции аттрактора по наблюдаемому скалярному временному ряду можно прочитать в [Abarbanel 1996; Kantz and Schreiber 1997].

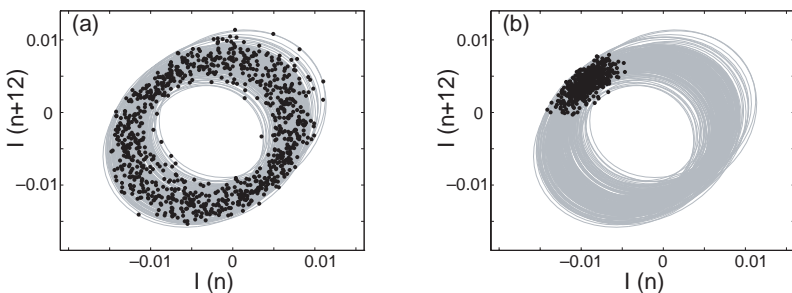


Рис. 5.10. Стробоскопический портрет автономного (а) и вынужденного (б) хаотического газового разряда. Аттрактор показан серым, а состояния, наблюдаемые с периодом силы – кружками. Концентрация кружков на рисунке (б) свидетельствует о фазовой синхронизации (ср. с рис. 5.8 и 5.9). Из [Rosa Jr. *et al.* 2000].

Ее форма (рис. 5 в работе [Ticos *et al.* 2000]) близка к показанной на рис. 3.39: очень слабая сила не может подавить диффузию фазы, и даже при нулевой расстройке синхронизация невозможна.

В заключение этого раздела отметим, что возможна также взаимная синхронизация хаотических осцилляторов. Если параметры двух хаотических систем различны, то и их средние частоты в общем случае не одинаковы. Связь систем приводит к подстраиванию фаз и частот, и они могут захватить друг друга. Как и в случае периодических автоколебаний, слабая связь воздействует только на фазы. В результате, средние частоты двух синхронизованных осцилляторов совпадают, но каждый из них сохраняет амплитудный хаос. В целом, в хаотических системах можно наблюдать те же эффекты, что и для периодических осцилляторов с шумом, например, образование кластеров в цепочке осцилляторов или переход Курамото в ансамбле.

5.3 Полная синхронизация хаотических систем

Сильная взаимная связь хаотических осцилляторов приводит к их **полной синхронизации**. В отличие от фазовой, она может наблюдаться в любых хаотических системах, не обязательно автономных – в частности, в системах с периодической внешней силой или в системах с дискретным временем (отображениях). Фактически это явление имеет мало общего с классической синхронизацией периодических автоколебаний, поскольку здесь не происходит подстройки ритма (в частности, мы не можем представить этот эффект в рамках рис. 5.9). Скорее, полную синхронизацию можно характеризовать как подавление различий в связанных *идентичных* системах. Поэтому здесь не идет речь о захвате, это явление ближе к установлению симметрии.⁷

5.3.1 Полная синхронизация идентичных систем.

Пример: синхронизация двух лазеров

Чтобы описать этот эффект, возьмем две *идентичные* хаотические системы (например, две системы Лоренца) и введем связь, которая

⁷ Возможно, использование другого термина вместо «синхронизация» было бы более уместным; мы все же будем следовать принятой в литературе терминологии, добавляя для определенности прилагательное «полная».

стремилась бы сделать переменные одинаковыми. Будем использовать индексы 1, 2 для идентификации систем; притягивающее взаимодействие стремится уменьшить разности $|x_1 - x_2|$, $|y_1 - y_2|$ и $|z_1 - z_2|$. Далее, мы потребуем, чтобы связь была пропорциональна разности состояний осцилляторов (т.е. пропорциональна $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$) и обнулялась бы, если эти состояния совпадают, $x_1 = x_2$, и т.д. Тогда при полном совпадении переменных каждая система не будет чувствовать другую, и будет совершать хаотические колебания, как будто они не связаны. Поскольку системы идентичны, совпадение состояний со временем сохраняется. Этот режим и называется **полной синхронизацией**: состояния двух систем совпадают и хаотически эволюционируют во времени.

Очевидно, что полностью синхронное состояние может быть реализовано при любой интенсивности связи, но только при сильной связи можно ожидать, что оно будет устойчивым. В самом деле, предположим, что мы слегка возмущили полностью идентичное состояние, т.е. положим $x_1 \neq x_2$ и т.д. Что произойдет с малой разностью $x_2 - x_1$? Если бы не было связи, ответ следовал бы из свойства неустойчивости хаоса: поскольку два состояния x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 можно рассматривать (из-за идентичности) как две начальные точки в одной системе, они будут расходиться экспоненциально по времени, причем скорость роста определяется максимальным ляпуновским показателем. При малой связи расходимость будет слабее, из-за «притяжения» двух состояний. При достаточно сильной связи притяжение преобладает и малое различие будет затухать, так что в конце концов устанавливается полностью синхронное состояние.

Мы видим, что полная синхронизация – пороговое явление: она наблюдается, только если связь превышает критическое значение, пропорциональное ляпуновскому показателю отдельной системы. Ниже порога состояния систем близки, но все же различаются. Выше порога они идентичны и хаотически меняются со временем. Этот переход показан для двух связанных систем Лоренца на рис. 5.11 и 5.12.

Roy and Thornburg [1994] экспериментально наблюдали синхронизацию хаотических колебаний интенсивности двух Nd:YAG лазеров с модуляцией накачки. Связь осуществлялась перекрытием электромагнитных полей внутри резонатора; она могла изменяться в ходе эксперимента. При сильной связи интенсивности были идентичны и продолжали изменяться хаотически (рис. 5.13).

5.3.2 Синхронизация неидентичных систем

Рассмотренное выше явление полной синхронизации не может быть, строго говоря, непосредственно обобщено на случай связанных *неидентичных* систем. Ясно, что теперь состояния не могут в точности совпадать, но они могут быть довольно близкими друг к другу. В частности, при достаточно большой связи может существовать функциональная зависимость $\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_1)$ между состояниями двух систем. Это означает, что, зная функции \mathbf{F} , можно однозначно предсказать состояние второй системы, если известно состояние первой. Этот режим называют **обобщенной синхронизацией** [Rulkov *et al.* 1995]. Полная синхронизация – это частный случай обобщенной, когда функции \mathbf{F} – это просто идентичные функции. Обычно обобщенная синхронизация наблюдается при *однонаправленной связи*, когда

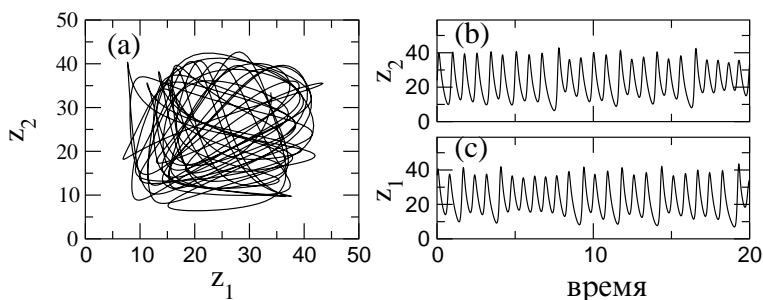


Рис. 5.11. Слабо связанные системы Лоренца (ниже порога синхронизации). (a) Проще всего различие между системами видно на графике, где по осям отложены переменные двух систем (как при изображении фигур Лиссажу). Разница видна также и по временным рядам (b) и (c).

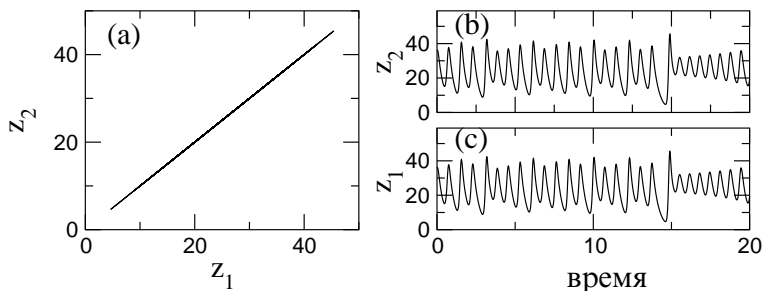


Рис. 5.12. Полная синхронизация в связанных моделях Лоренца. (a) Состояния систем идентичны, что сразу видно на плоскости $z_1 - z_2$: траектория лежит на диагонали $z_1 = z_2$. Зависимости переменных от времени нерегулярны, но полностью совпадают ((b) и (c)).

одна система (вынуждающая) действует на другую (вынуждаемую), но обратного воздействия нет. Такую ситуацию называют также связью типа «управление–подчинение» (master–slave). Установление обобщенной синхронизации можно интерпретировать как подавление собственной динамики вынуждаемой системы воздействием со стороны другой, так что она «подчиняется управлению».

5.3.3 Полная синхронизация в общем контексте. Пример: синхронизация и кластеры в глобально связанных электрохимических осцилляторах

Ряд обобщений описанного выше явления представляются особенно интересными. Одно обобщение основано на наблюдении, что переход к синхронизации можно рассматривать как установление симметрич-

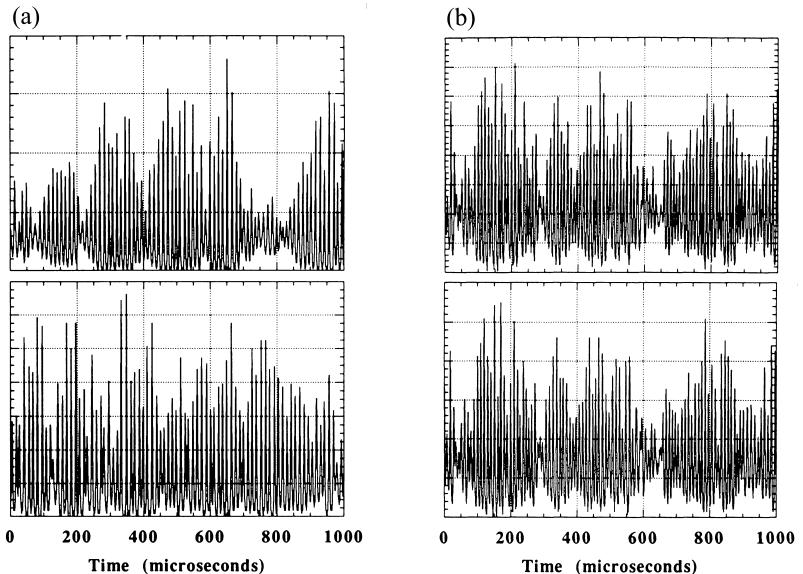


Рис. 5.13. Полная синхронизация в связанных лазерах. (а) Интенсивности (в произвольных единицах) несвязанных лазеров меняются хаотически; они различаются, хотя накачка в обоих лазерах модулируется одинаково. (б) При сильной связи оба лазера продолжают колебаться хаотически, но теперь эти колебания почти одинаковы, т.е. имеет место полная синхронизация. Из Roy and Thornburg, *Physical Review Letters*, Vol. 72, 1994, pp. 2009–2012. Copyright 1994 by the American Physical Society.

ного режима в системе, обладающей соответствующей симметрией. Действительно, требуя чтобы идентичные системы взаимодействовали так, чтобы связь обнулялась при совпадении переменных, мы практически накладываем определенные условия симметрии.

Поэтому можно рассмотреть и более общий случай, когда в большой хаотической системе есть некоторая внутренняя симметрия, например, уравнения движения не меняются при перестановке некоторых переменных (скажем, в четырехмерной системе с переменными x, y, z, v перестановка $z \leftrightarrow v$ систему не меняет). Тогда режим, в котором эти переменные совпадают (в нашем примере $z = v$), есть решение, возможно и хаотическое. Если соответствующее малое возмущение $z - v$ затухает со временем, то симметричное решение будет устойчивым, и можно сказать, что подсистемы z и v синхронизованы [Pecora and Carroll 1990]. Такая синхронизация в хаосе иногда тоже называется «управление-подчинение», мы будем чаще говорить о синхронизации системы и ее копии, поскольку обычно уравнение для v получается просто копированием уравнения для z . Отметим, что в этой ситуации нет двух систем, которые могли бы функционировать отдельно или быть связанными. Вместо этого, некоторые переменные внутри одной большой системы могут совпадать, внося частичный порядок в хаос.

Общая симметрия, делающая возможной полную синхронизацию, может возникать при большом числе взаимодействующих хаотических систем. Wang *et al.* [2000a] экспериментально изучали синхронизацию 64 электрохимических осцилляторов. Глобальная связь осуществлялась путем соединения всех электродов через общую нагрузку; это эквивалентно схеме, показанной на рис. 4.25. Экспериментаторы

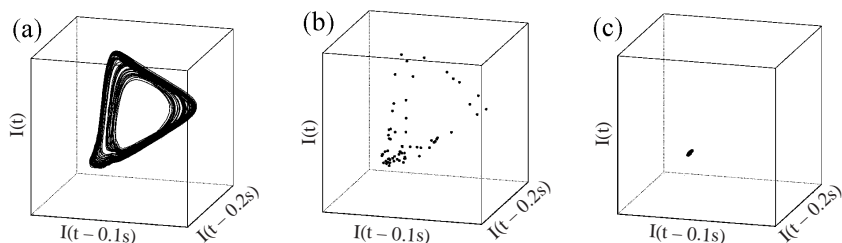


Рис. 5.14. Полная синхронизация в глобально связанных электрохимических осцилляторах. (а) Аттрактор одного несвязанного осциллятора, реконструированный по измерениям силы тока через электрод. (б) Мгновенный снимок ансамбля при отсутствии связи. (с) Мгновенный снимок при достаточно сильной связи – все 64 осциллятора полностью синхронизованы. Из [Wang *et al.* 2000a].

постарались сделать элементы ансамбля как можно более близкими. Фазовый портрет одного изолированного осциллятора показан на рис. 5.14а. Если несвязанные элементы наблюдать в какой-то момент времени, то их состояния будут различны (рис. 5.14b). Они распределены по фазовому пространству так же, как траектория одной системы. Если ввести достаточно большую связь и сделать «снимок» системы в какой-то момент времени, то фазовые точки, описывающие системы, образуют маленькое облачко, почти точку (рис. 5.14с), что свидетельствует о полной синхронизации в ансамбле. При некоторых промежуточных значениях связи можно наблюдать два или три облачка, т.е. несколько синхронных кластеров.

5.3.4 Синхронизация путем подавления хаоса

Особый случай синхронизации наблюдается при достаточно сильном периодическом воздействии на хаотическую систему. Такая сила может подавить хаос и привести к периодическим движениям с периодом силы. Такой режим можно характеризовать как синхронизацию через подавление хаоса.

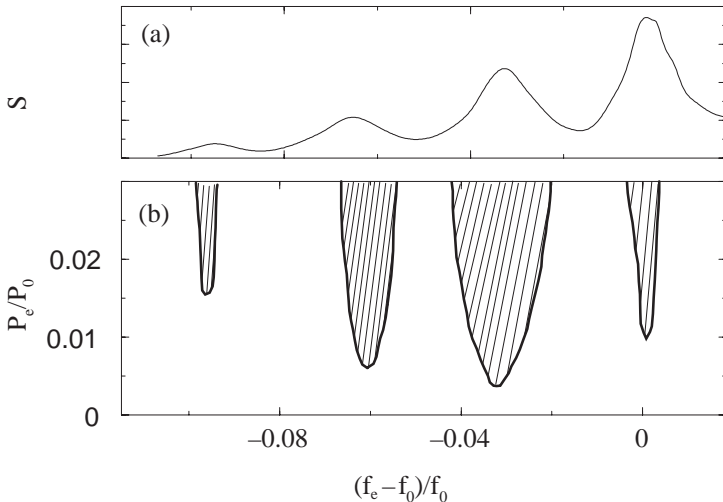


Рис. 5.15. Синхронизация через подавление хаоса внешней периодической силой в лампе обратной волны. (а) Спектр мощности автономного автогенератора имеет несколько широких пиков. Если частота силы близка к этим максимумам, то хаос может быть подавлен. В результате устанавливаются периодические колебания на частоте силы (заштрихованные области на рисунке (b)). Отметим, что сила должна быть достаточно большой. Из [Безручко 1980; Безручко и др. 1981].

Мы проиллюстрируем этот эффект опытами Безручко и соавторов [1979, 1980, 1981], в которых экспериментально исследовалось влияние периодической внешней силы на электронный высокочастотный генератор – лампу обратной волны. При некоторых значениях параметров такой генератор в автономном режиме демонстрирует хаос. Области, в которых сила приводит к периодизации колебаний, показаны на рис. 5.15. Этот график напоминает картину областей синхронизации (языков Арнольда), подробно обсуждавшуюся в разделе 3.2. Отметим, что в отличие от вынуждаемых периодических автоколебаний, здесь области синхронизации не подходят к оси частот, т.е. синхронизация возможна только в том случае, если амплитуда силы превышает некоторый порог. Напомним, что подобная ситуация характерна для синхронизации шумовых колебаний (см. рис. 3.39).

Глава 6

Экспериментальное исследование синхронизации

В этой главе мы обсуждаем методы экспериментального исследования синхронизации и даем практические рекомендации по обработке данных. Ранее, представляя различные стороны этого явления, мы иллюстрировали теорию результатами ряда экспериментов и наблюдений. В этих примерах наличие (или отсутствие) синхронизации было вполне очевидным, но так бывает далеко не всегда. Вообще говоря, выявление синхронизации нерегулярных осцилляторов – непростая задача. Бывает, что визуальный анализ колебаний, как у Гюйгенса в его опытах с часами, не помогает, и требуются специальные методы анализа данных. Действительно, даже оценка частоты и фазы сложного сигнала, особенно нестационарного, является сложной проблемой, и мы начнем с ее обсуждения. Далее мы продолжим в двух направлениях: во-первых, мы обсудим, как определить экспериментально свойства синхронизации данной системы (систем); во-вторых, мы используем идею синхронизации для анализа взаимной зависимости двух и более скалярных сигналов. Некоторые технические аспекты анализа данных выделены в приложение П2.

6.1 Оценка фазы и частоты по сигналу

Возникновение синхронизации – это появление взаимосвязи между фазами и частотами взаимодействующих систем. Для периодических

осцилляторов эта связь описывается достаточно простыми условиями захвата фаз и частот (см. (3.3) и (3.2)); для систем с шумом и хаотических систем определение синхронизации нетривиально. В любом случае, для определения возникновения синхронизации в эксперименте нам необходимо оценить фазы и частоты по измеряемым данным. Чтобы не рассуждать слишком абстрактно, рассмотрим в качестве примеров электрокардиограмму (ЭКГ) человека и запись дыхания (поток воздуха через нос испытуемого), см. рис. 6.1.

6.1.1 Фаза импульсной последовательности.

Пример: электрокардиограмма

Существенным свойством ЭКГ является наличие в каждом (нормальном) кардиоцикле хорошо выраженных узких пиков, которые могут быть с высокой точностью локализованы во времени; их традиционно обозначают как R-зубцы (рис. 6.1a). Последовательность R-зубцов может рассматриваться как последовательность точечных событий, происходящих во времена t_k , $k = 1, 2, \dots$. Фаза такого

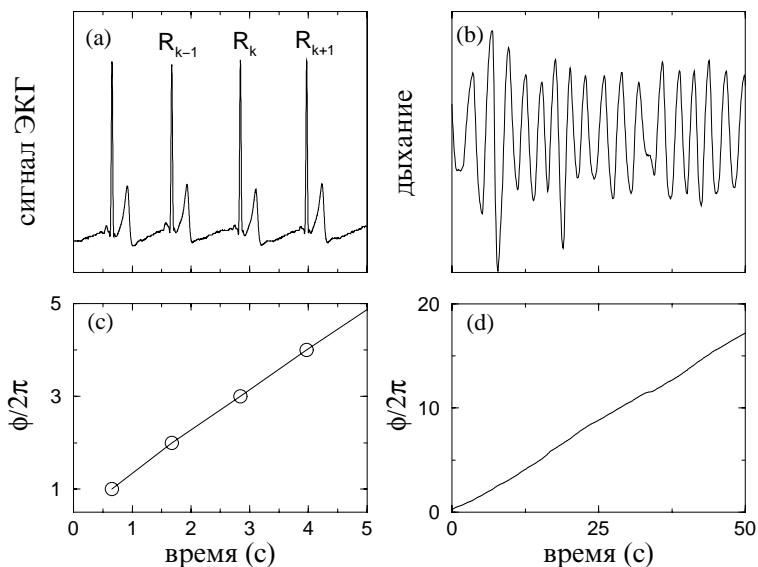


Рис. 6.1. Короткий сегмент электрокардиограммы (ЭКГ) с помеченными R-зубцами (a) и сегмент записи дыхания (b); оба сигнала даны в произвольных единицах. (c) Фаза ЭКГ, вычисленная в соответствии с (6.1), является кусочно-линейной функцией времени; моменты появления R-зубцов помечены окружностями. (d) Фаза дыхания, полученная с помощью преобразования Гильберта (6.2).

процесса может быть легко вычислена. Действительно, интервал времени между двумя R-зубцами соответствует одному кардиоциклу,¹ следовательно, фаза возрастает во время этого интервала ровно на 2π . Таким образом, мы можем приписать временам t_k значения фазы $\phi(t_k) = 2\pi k$, а для произвольного момента времени $t_k < t < t_{k+1}$ определить фазу путем линейной интерполяции между этими значениями:

$$\phi(t) = 2\pi k + 2\pi \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}. \quad (6.1)$$

Этот метод может быть эффективно применен к процессу, который содержит ярко выраженные события, и поэтому может быть сведен к последовательности импульсов. Определение фазы с помощью событий-маркеров может быть рассмотрено как аналог метода отображения Пуанкаре (см. раздел 5.2), хотя мы и не предполагаем, что исследуемая система не подвержена влиянию шумов, т.е. не считаем ее динамической.

6.1.2 Фаза узкополосного сигнала. Пример: дыхание

Рассмотрим теперь значительно менее сложный сигнал – запись дыхания (рис. 6.1b); она напоминает синусоидальный процесс с медленно меняющейся амплитудой и фазой. Фаза такого узкополосного сигнала может быть получена методом **аналитического сигнала**, предложенного Габором [Gabor 1946]. Реализация этого метода предполагает конструирование по скалярному сигналу $s(t)$ комплексного процесса

$$\zeta(t) = s(t) + is_H(t) = A(t)e^{i\phi(t)}, \quad (6.2)$$

где $s_H(t)$ есть преобразование Гильберта от $s(t)$. **Мгновенные** фаза $\phi(t)$ и амплитуда $A(t)$ сигнала однозначно определяются из (6.2). Отметим, что хотя формально это может быть сделано для произвольного $s(t)$, тем не менее $A(t)$ и $\phi(t)$ имеют четкий физический смысл только в том случае, если $s(t)$ – узкополосный сигнал (см. обсуждение свойств и практической реализации преобразования Гильберта в приложении П2).

¹ С точки зрения физиолога кардиоциклы начинаются с R-зубца, который отражает начало возбуждения предсердий. Это не противоречит нашему подходу: мы понимаем цикл как интервал между двумя почти идентичными состояниями системы.

6.1.3 Несколько практических замечаний

Важный практический вопрос: какой метод оценки фазы должен быть выбран для анализа конкретной экспериментальной записи? Теоретически, оба метода – преобразование Гильберта и отображение Пуанкаре – могут быть использованы равным образом,² но в эксперименте, когда приходится вычислять фазы по короткой, зашумленной и нестационарной реализации, численные проблемы становятся решающими. Наш опыт показывает, что, если сигнал содержит четкие события-маркеры, как, например, ЭКГ, то метод отображения Пуанкаре является наилучшим выбором. Он может быть также применен к «колебательному» сигналу, например, к записи дыхания – в этом случае следует определить «события» (например, пересечения нуля) и вычислить фазу в соответствии с (6.1). Тем не менее, мы не рекомендуем этот способ: его недостатком является то, что на определение событий по медленно меняющемуся сигналу сильно влияют шум и тренд. Кроме того, мы получаем только одну точку на характерный период, и, если запись короткая, то статистика является недостаточной. В этом случае метод, основанный на преобразовании Гильберта, значительно более эффективен, потому что он дает оценку фазы в каждой точке временного ряда. Следовательно, мы получаем много точек на период и можем сгладить влияние шума и получить достаточную статистическую информацию для определения фазовых соотношений. В заключение отметим, что метод, основанный на преобразовании Гильберта, чувствителен к низкочастотному тренду (см. приложение П2). Мы также рекомендуем использовать фильтрацию, если исследуемый сигнал смешан с сигналами других частотных диапазонов.

Другой важный момент состоит в том, что, хотя мы и можем однозначно вычислить фазу сигнала, нам не удастся избежать неоднозначности в оценке фазы осциллятора.³ Эта оценка зависит от используемой наблюдаемой; тем не менее, «хорошие» наблюдаемые дают эквивалентные фазы (в том смысле, что средние частоты, определенные по этим наблюдаемым, совпадают). В эксперименте мы обычно не свободны в выборе наблюдаемой. Поэтому необходимо

² Хотя фазы, полученные этими методами и различаются микроскопически, т.е. на масштабах времен меньших одного (квази)периода, средние частоты, вычисленные по этим фазам, совпадают, а именно эти частоты и важны для описания синхронизации.

³ Хотя можно вычислить несколько фаз по разным наблюдаемым одного и того же осциллятора, существует только одна фаза системы, соответствующая нулевому ляпуновскому показателю.

всегда соблюдать осторожность в формальном применении изложенных методов и интерпретации результатов.

Частота сигнала может быть определена двумя способами. Если сигнал может быть сведен к последовательности событий и фаза вычисляется по (6.1), то частота определяется путем подсчета числа циклов на единицу времени. Если используется метод аналитического сигнала, то частота определяется путем вычисления наклона графика зависимости фазы от времени. Технические детали см. в приложении П2.

6.2 Анализ данных в «активном» и «пассивном» эксперименте

В этом разделе мы обсуждаем две типичные экспериментальные задачи и связанные с ними проблемы анализа данных. Первая задача состоит в том, чтобы выяснить, может ли данный осциллятор быть захвачен определенной внешней силой, или могут ли два осциллятора взаимно синхронизоваться при заданной связи. Вторая экспериментальная задача состоит в том, чтобы проанализировать сигналы, генерируемые двумя осцилляторами, для того чтобы выяснить, взаимодействуют ли эти осцилляторы или же они независимы.

6.2.1 «Активный» эксперимент

Мы понимаем синхронизацию как возникновение определенных соотношений между фазами и частотами взаимодействующих объектов. Эти соотношения должны выполняться в некотором диапазоне расстроек и коэффициентов связи (этот диапазон соответствует области синхронизации). Следовательно, чтобы установить возникновение синхронизации в конкретном эксперименте, нам необходимо иметь возможность изменять параметры осцилляторов (или осциллятора и внешней силы), влияющие на расстройку, или же иметь возможность варьировать силу связи. При этом нам необходимо следить за поведением частот и/или разности фаз, т.е. мы должны провести «активный» эксперимент, управляя системой. Классический опыт Эпплтона [Appleton 1922] (см. раздел 4.1) является хорошим примером такого эксперимента.

Полное описание способности систем к синхронизации предполагает определение языка (языков) Арнольда. Тем не менее, если мы просто хотим убедиться в том, что синхронизация данных систем

возможна, то для этого достаточно наблюдать переход к синхронизации при изменении одного параметра. Наиболее простой способ показать переход – это вычислить частоты связанных осцилляторов Ω_1 и Ω_2 (наблюдаемые частоты) и построить график зависимости их разности от изменяемого параметра, как это было сделано Эпплтоном в его эксперименте (см. рис. 4.4).⁴

В современных экспериментах сигналы обычно сохраняются в памяти компьютера для последующей обработки в режиме off-line. В этом случае частоты могут быть вычислены в соответствии с рекомендациями предыдущего раздела и приложения П2. Отметим, что, если сигналы близки к периодическим, то синхронизацию можно выявить простым способом, анализируя классические фигуры Лиссажу, т.е. график зависимости одного сигнала от другого (ср. с рис. 3.9 и 3.23). В случае захвата частот этот график представляет собой замкнутую кривую.

6.2.2 «Пассивный» эксперимент

Приступим к обсуждению экспериментов, в которых нет возможности изменять параметры систем и/или связи, а возможно только наблюдать генерируемые ими сигналы. Такая ситуация часто встречается при исследовании биологических или геофизических систем. Характерным примером является исследование взаимодействия сердечно-сосудистой и дыхательной систем человека по двум измеряемым сигналам: ЭКГ и дыханию (см. предыдущий раздел). Проблема состоит в том, чтобы выяснить, какую информацию можно в принципе извлечь из такого эксперимента? В частности, естественным образом возникает вопрос: можно ли выявить синхронизацию путем анализа двухканальных данных?

Вообще говоря, ответ на этот вопрос отрицателен. Так как синхронизация – это не состояние, а процесс подстройки частот и фаз, ее наличие или отсутствие не могут быть установлены по одному наблюдению. Кроме того, в системах с шумом (а реальные системы неизбежно подвержены влиянию шумов), переход к синхронизации размыт и не существует четкой границы между синхронными и несинхронными состояниями. Следовательно, без дополнительных предположений мы не можем выявить синхронизацию путем анализа

⁴ Возможны два варианта: можно наблюдать переход к синхронизации, т.е. сближение наблюдаемых частот, либо уменьшая расстройку при фиксированной связи, либо увеличивая связь при неизменной расстройке.

данных, даже если и удастся найти некие соотношения между фазами и частотами (которые должны быть вычислены по сигналам, как описано ранее). Тем не менее, анализ двухканальных данных, основанный на использовании теории синхронизации, может дать важную информацию о взаимосвязи между системами, которые генерируют наблюдаемые сигналы.

Отметим, что определение *зависимости между двумя (или несколькими) сигналами* – это типовая задача обработки данных. Она решается традиционными линейными методами взаимнокорреляционного (взаимноспектрального) анализа [Рабинер и Голд 1975] или нелинейными методами, такими как вычисление взаимной информации или максимальной корреляции [Rényi 1970; Pompe 1993; Voss and Kurths 1997].

Рис. 6.2 иллюстрирует различие этой типовой задачи и проблемы, которую мы рассматриваем ниже: мы пытаемся выявить *взаимодействие между осцилляторами*, которые генерируют двухканальные данные. Подчеркнем, что подход к анализу данных с точки зрения синхронизации явно предполагает, что данные генерируются несколькими (по крайней мере, двумя) взаимодействующими автоколебательными системами. Если это предположение не может быть проверено, то описанные ниже методы могут быть интерпретированы только как средства анализа взаимосвязи между сигналами, и никакого заключения о связи между системами сделано быть не может.

Напомним, что взаимосвязь между фазами может также возникнуть вследствие родственного явления, такого как стохастический резонанс (см. раздел 3.6.3). Другой причиной может быть, например, модуляция скорости распространения сигнала по передающему каналу (см. раздел 3.3.5). Этими замечаниями мы хотим подчеркнуть, что результаты пассивного эксперимента должны интерпретироваться с большой осторожностью; см. подробное обсуждение в разделе 6.4.

Совпадение частот или захват частот?

Если экспериментатор действительно имеет дело с сигналами, генерируемыми двумя автоколебательными системами, и видит, что их частоты близки, то возникает вопрос, является это следствием гипотетического взаимодействия или же просто случайным совпадением. На сегодняшний день не существует способа ответить на этот вопрос, можно только получить косвенное подтверждение гипотезы о взаимодействии.

Прежде всего отметим, что оценка отношения частот не помогает. Действительно, если две частоты равны (в пределах точности их определения), то мы не можем проверить, произошло это случайно, или есть проявление взаимодействия. С другой стороны, если мы нашли, что, например, $\Omega_1/\Omega_2 = 1.05$, то это не исключает существование 1 : 1 синхронного режима, так как частые проскоки фазы на границе области синхронизации приводят к различию частот. (Напомним, что в системах с шумом область точного равенства частот может стремиться к нулю.) Поэтому, обычно оценка частот $\Omega_{1,2}$ может быть использована только для того, чтобы оценить возможный порядок $n : m$ синхронизации. Более полная информация может

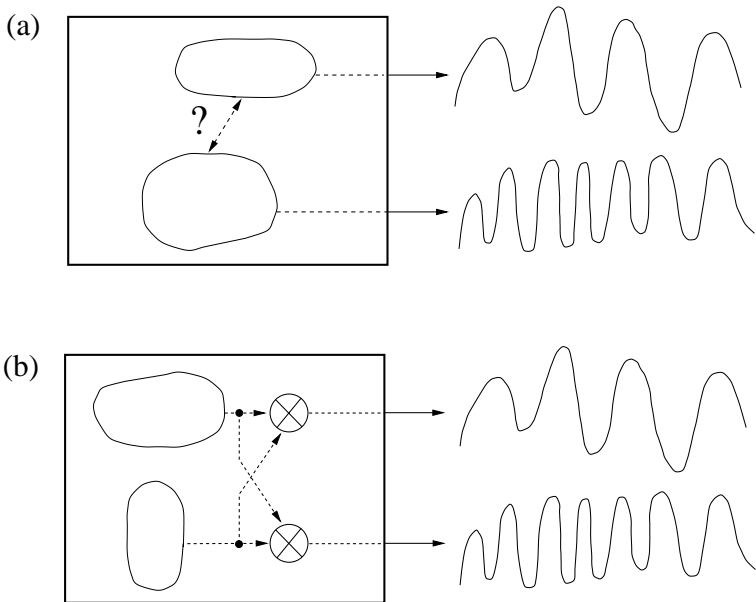


Рис. 6.2. Иллюстрация подхода к анализу двухканальных данных с точки зрения синхронизации. Цель такого анализа – выявить слабое взаимодействие между подсистемами только по измеряемым на их выходе сигналам. Предполагается, что данные генерируются двумя осцилляторами с собственными ритмами (а). Альтернативная гипотеза состоит в том, что измеряется смесь сигналов, генерируемых двумя несвязанными системами (б). Традиционные методы не позволяют различить эти гипотезы. В первом случае, взаимодействие между системами может быть выявлено с помощью анализа фаз, вычисленных по сигналам. Отметим, что взаимосвязь между фазами может быть не только результатом взаимодействия автоколебательных систем, способных синхронизоваться, но и следствием модуляции (ср. с рис. 3.31) или стохастического резонанса (ср. с рис. 3.48).

быть получена из анализа фаз.

Некоторые факторы, типичные для экспериментов, могут оказаться полезными для анализа данных. Ниже мы обсудим два важных аспекта.

- (i) **Шум** усложняет картину синхронизации, но в некоторых случаях «пассивного» эксперимента он помогает отличить случайное совпадение частот от их истинного захвата. Действительно, шум порождает диффузию фазы, и при случайном совпадении частот разность фаз не является постоянной, а совершает случайные блуждания.⁵ Распределение $(\phi_1 - \phi_2) \bmod 2\pi$ является в этом случае практически равномерным, в то время как взаимодействие приводит к появлению максимума в распределении (см. раздел 3.4). Это можно проинтерпретировать как существование предпочтительного значения разности фаз (взятой по модулю 2π), т.е. как захват фаз (в статистическом смысле). Следовательно, нам необходимо анализировать разность фаз; как показано ниже, наиболее эффективен для этого стробоскопический метод.
- (ii) **Нестационарность** данных, вызванная медленным изменением параметров исследуемой системы, существенно усложняет анализ, но может также помочь найти дополнительные аргументы, подтверждающие гипотезу о взаимодействующих осцилляторах. Действительно, если мы наблюдаем, что мгновенные частоты двух сигналов изменяются, но их отношение остается (приблизительно) постоянным, то очень маловероятно, что это происходит случайно; в этом случае вполне разумно считать, что мы наблюдаем захват частот. Другим свидетельством может быть изменение соотношения частот, скажем, с $\approx 5/2$ на ≈ 3 : маловероятно, что это случайность, скорее это похоже на переход между соседними языками Арнольда.

6.3 Анализ взаимоотношения между фазами

В этом разделе мы подробно обсуждаем методы анализа фазовых соотношений и иллюстрируем эти методы несколькими примерами.

⁵ В общем случае, при $n\Omega_1 \approx m\Omega_2$ мы должны рассматривать обобщенную разность фаз $n\phi_1 - m\phi_2$; здесь мы для простоты обсуждения предполагаем $n = m = 1$.

Данные методы основаны на идее о синхронизации, поэтому мы используем соответствующую терминологию, хотя, строго говоря, по данным мы можем выявить только наличие взаимодействия.

6.3.1 Непосредственный анализ разности фаз.

Пример: регуляция позы человека

Самый простой способ выявить синхронизацию – это нарисовать зависимость разности фаз от времени и посмотреть, содержит ли этот график горизонтальные участки. В общем случае мы должны строить график *обобщенной разности фаз*

$$\varphi_{n,m} = n\phi_1 - m\phi_2. \quad (6.3)$$

Этот непосредственный метод оказался вполне эффективным для анализа модельных систем и некоторых экспериментально полученных наборов данных.

Для иллюстрации опишем результаты экспериментов по исследованию регуляции позы человека [Rosenblum *et al.* 1998]. Во время опыта испытуемому предлагалось спокойно стоять на специальной жесткой платформе, оснащенной четырьмя тензодатчиками. На выходе этого устройства получают текущие координаты (x, y) центра давления под стопами стоящего испытуемого. Такие двухканальные данные называются стабилотграммой; известно, что они содержат информацию о состоянии центральной нервной системы [Гурфинкель и др. 1965; Cernasek 1980; Furman 1994; Lipp and Longridge 1994]. Каждому испытуемому предлагалось пройти три теста, а именно, спокойно стоять в течение трех минут (i) с открытыми глазами (ОГ) при постоянном окружении; (ii) с закрытыми глазами (ЗГ); (iii) с открытыми глазами при наличии специально введенной зрительной обратной связи (ОС). 132 двухканальные записи, полученные в экспериментах с тремя группами испытуемых (17 здоровых, 11 человек с органической и 17 с психогенной патологией) были проанализированы путем вычисления взаимных спектров и обобщенной взаимной информации. Подчеркнем, что взаимозависимость между качаниями тела в антерио-постериальном (вперед – назад) и латеральном (вправо – влево) направлениях была обнаружена только в патологических случаях. Другое наблюдение состоит в том, что стабилотграммы можно качественно разделить на две группы: шумового и колебательного типов. Последние встречаются значительно реже – только несколько процентов записей могут быть названы колебательными – и только в случае патологии.

Заметное на стабิโลграммах возникновение колебательных режимов наводит на мысль о возбуждении автоколебаний в системе регуляции вертикальной позы; известно, что эта система включает в себя несколько цепей запаздывающей обратной связи. Тем не менее, независимость качаний в двух перпендикулярных направлениях у здоровых испытуемых и во многих патологических случаях заставляет предположить, что в поддержании вертикальной позы задействованы две отдельные подсистемы. Разумно предположить, что, если в обеих системах возбуждаются автоколебания, то может возникнуть синхронизация. Чтобы выяснить, не является ли зависимость между двумя компонентами стабิโลграммы следствием соотношения между фазами, мы проанализировали разности фаз.

Здесь мы приводим результаты одного эксперимента (женщина 39 лет, функциональная атаксия). Можно видеть, что при ОГ- и ЗГ-тестах стабิโลграмма имеет ярко выраженный колебательный

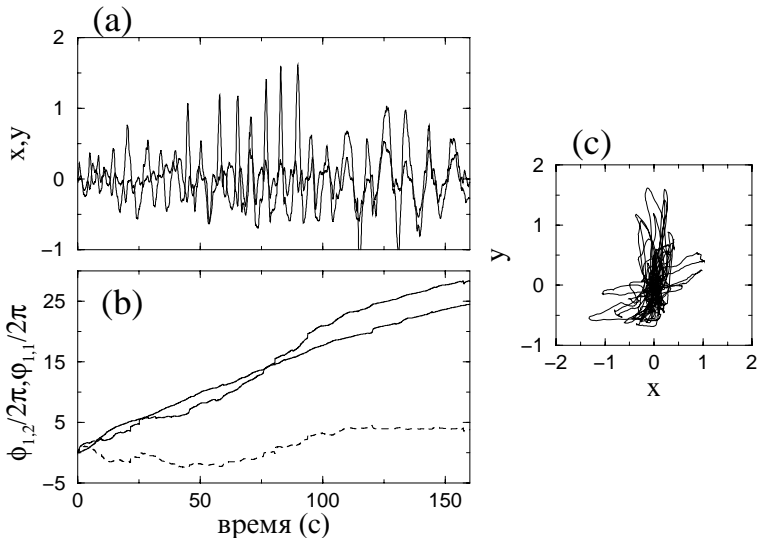


Рис. 6.3. (а) Стабิโลграмма пациента с неврологической патологией. x (жирная линия) и y (сплошная линия) представляют соответственно качания тела при спокойном стоянии с открытыми глазами в антерио-постериальном и латеральном направлениях. Фазы сигналов и разность фаз показаны на (b) соответственно жирной, сплошной и пунктирной линиями. Переход к режиму, в котором разность фаз флуктуирует около постоянного значения, четко виден при ≈ 110 с. Типичная зависимость y от x не демонстрирует какой-либо структуры, которая указывала бы на зависимость между сигналами (с). Из [Pikovsky *et al.* 2000].

характер (рис. 6.3 и 6.4). Разница между двумя записями состоит в том, что при открытых глазах колебания в двух направлениях асинхронны в течение первых ≈ 110 с, но демонстрируют сильную взаимосвязь между фазами в течение последних 50 с. При закрытых глазах, фазы колебаний почти совпадают в течение всего теста. Поведение существенно отличается при ОС-тесте; стабิโลграмма становится шумового типа, и никаких фазовых соотношений не наблюдается. Подчеркнем, что традиционные методы мало эффективны в определении взаимной зависимости этих сигналов из-за их нестационарности и недостаточной продолжительности.

Комментарии к методу

Важным преимуществом непосредственного анализа фаз является то, что с помощью зависимости $\varphi_{n,m}(t)$ можно проследить переходы между качественно разными режимами, происходящие из-за нестационарности параметров взаимодействующих систем и/или связи (рис. 6.3); это оказывается возможным даже для весьма коротких записей. Действительно, два режима, которые можно различить на

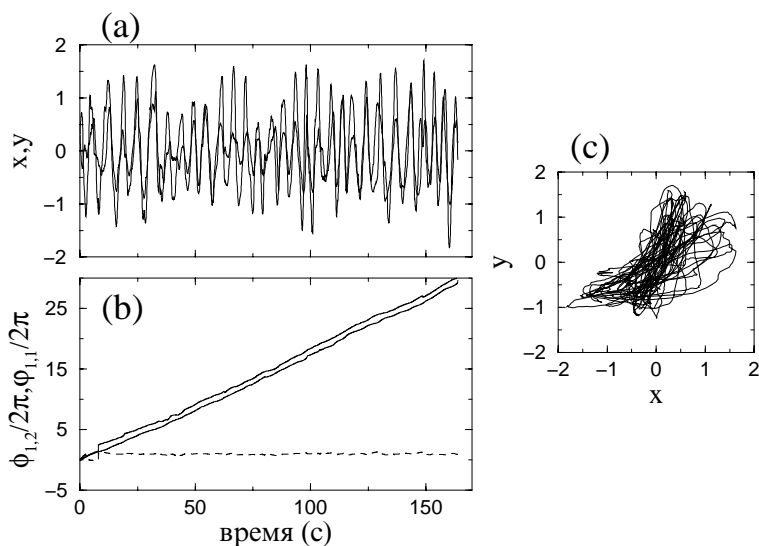


Рис. 6.4. Стабิโลграмма того же пациента, что и на рис. 6.3, полученная при тесте с закрытыми глазами. Все обозначения такие же, как и на рис. 6.3. По графику разности фаз видно, что фазы качаний тела в двух направлениях близки в течение всего теста, в то время как амплитуды остаются нерегулярными и существенно различными. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

рис. 6.3, содержат только порядка десяти характерных периодов, т.е. эти эпизоды слишком коротки для надежного использования традиционных методов анализа данных.

Недостатком метода является то, что синхронные режимы порядка, отличного от $n : m$, например, синхронизация порядка $n : (m + 1)$, выглядят в таком представлении как несинхронные эпизоды. Кроме того, не существует регулярных методов для нахождения целых чисел n и m , поэтому они должны искажаться методом проб и ошибок. Соответственно, чтобы выявить все синхронные режимы, необходимо проанализировать большое число графиков. Практически, возможные значения n и m могут быть оценены по спектрам мощности сигналов или путем вычисления частот в соответствии с рекомендациями предыдущего раздела; выбор значений n и m часто ограничен благодаря дополнительным сведениям об исследуемой системе.

Другой недостаток описанного метода состоит в том, что, если шум достаточно велик, то метод становится неэффективным и даже может ввести в заблуждение. Действительно, частые скачки фазы маскируют наличие горизонтальных участков на графике (ср. с рис. 4.11), и синхронизация может быть выявлена только с помощью статистического подхода, т.е. путем анализа распределения циклической разности фаз, обсуждаемого ниже.

6.3.2 Высокий уровень шума

Сильный шум вызывает частые скачки фазы, в результате чего график разности фаз $\varphi_{n,m}(t)$ демонстрирует перемежаемость коротких горизонтальных участков и быстрых скачков вверх и вниз. Пример такого поведения дан на рис. 4.11. В этом случае полезно вычислить распределение разности фаз $\Psi_{n,m} = \varphi_{n,m} \bmod 2\pi$. Действительно, операция деления по модулю делает эквивалентными состояния до и после скачка фазы, и взаимодействие между осцилляторами проявляется возникновением максимума этого распределения.

Визуальный анализ рис. 4.11 показывает, что изображенные данные нестационарны: степень взаимодействия изменяется во времени. (Конечно же, мы не можем выяснить, почему это так; возможно, что сила связи медленно изменяется во времени, или частоты взаимодействующих систем, или и то, и другое.) В этом случае имеет смысл выполнить анализ *методом скользящего окна*, последовательно вычисляя распределение во временном окне $[t - \tau/2, t + \tau/2]$, где τ – длина окна, для различных t . Временная зависимость силы взаимодействия может быть охарактеризована показателем, который

описывает отклонение распределения от равномерного. Вычисление таких показателей (индексов) рассмотрено в [Tass *et al.* 1998; Rosenblum *et al.* 2001].

В заключение повторим, что в случае систем с сильным (или неограниченным) шумом невозможно однозначно определить, является ли данное состояние синхронным или нет. В связи с этим определение по данным количественной оценки степени взаимодействия имеет смысл только для сравнения различных состояний одной и той же системы. В частности, это оказалось полезным в двух следующих случаях.

- Вычисление индекса синхронизации как функции времени может выявить изменение взаимодействия во времени. При анализе мозговой и мышечной активности (см. [Tass *et al.* 1998; Tass 1999] и раздел 4.1.7) эта зависимость соответствовала интенсивности тремора; этот факт позволил нам сделать вывод, что процесс синхронизации в мозге является причиной тремора.
- При анализе многоканальных данных, т.е. при взаимодействии многих осцилляторов, вычисление индекса синхронизации для различных пар сигналов помогает в определении относительной степени взаимосвязи между различными сигналами. Так, в вышеупомянутом примере, этот подход позволил установить, какие отделы мозга вовлечены в генерацию патологической активности (тремора).

6.3.3 Стробоскопический метод

Здесь мы иллюстрируем применения стробоскопического метода, который был уже использован нами в разделе 3.2 при рассмотрении осцилляторов, подвергаемых периодическому импульсному воздействию. При использовании этого метода фаза возмущенного осциллятора наблюдается с периодом внешней силы, $\phi_k = \phi(t_0 + k \cdot T)$, где $k = 1, 2, \dots$, а t_0 – (произвольное) время первого наблюдения. Если периодический осциллятор захвачен силой, то распределение ϕ_k есть δ -функция; если сила захватывает зашумленный или хаотический осциллятор, то это распределение будет узким. В случае же асинхронного состояния стробоскопически наблюдаемая фаза принимает произвольные значения и, следовательно, ее распределение будет широким.

Простое обобщение делает этот метод очень эффективным инструментом в анализе данных. Для этой цели рассмотрим два связанных

осциллятора и будем наблюдать фазу одного из них не периодически во времени, а периодически по отношению к фазе второго осциллятора. Можно сказать, что второй осциллятор играет роль временного маркера, «освещая» ϕ_1 в каждый момент времени, когда ϕ_2 возросла на 2π . Другими словами, мы выделяем ϕ_{1k} в те моменты, когда $\phi_2(t) = \phi_0 + 2\pi \cdot k$. Назовем такой метод *фазовым стробоскопом*. Очевидно, что если второй осциллятор – периодический, то фазовый и временной стробоскопы эквивалентны. Конечно же, не имеет значения, какой из осцилляторов выбран в качестве задающего отсчет (второй в наших обозначениях); выбор полностью определяется удобством определения фазы.

В оставшейся части этого раздела мы объясняем и иллюстрируем примерами, как стробоскопический метод может быть использован для определения взаимодействия (конечно же, при условии, что мы знаем, что сигналы генерируются взаимодействующими автоколебательными системами) при соотношении частот сигналов вида $n\Omega_1 \approx m\Omega_2$, или, в общем случае, для выявления сложной взаимозависимости между фазами двух сигналов.

6.3.4 Фазовый стробоскоп в случае $n\Omega_1 \approx m\Omega_2$.

Пример: взаимодействие сердечно-сосудистой и дыхательной систем

Предположим для начала, что есть два $n : 1$ синхронизованных осциллятора, которые генерируют сигналы типа показанных на рис. 6.1, при этом пусть n спайков⁶ быстрого сигнала приходятся на один цикл медленного, т.е. есть захват порядка $n : 1$. Тогда мы будем наблюдать спайки при n различных значениях фазы медленного сигнала. Подобная картина наблюдается и в случае, когда синхронизации нет, но один процесс модулируется другим. Следовательно, в конкретном эксперименте мы можем использовать этот подход для выявления сложного взаимодействия, но мы не можем различить синхронизацию и модуляцию.

Представляется естественным наблюдать фазу медленного сигнала ϕ_1 в моменты появления спайков. Таким образом, построим график стробоскопически наблюдаемой циклической фазы $\psi(t_k) =$

⁶ Если бы не было спайков, то мы могли бы определить события, например, как пересечения нуля в определенном направлении. Другими словами, мы хотим найти те моменты, когда фаза быстрого осциллятора принимает некоторые определенные значения.

$\phi_1(t_k) \bmod 2\pi$ от времени и назовем такой график *синхрограммой* (рис. 6.5). Наличие взаимодействия будет отражено появлением на этом графике n полос.

Заключительный шаг в развитии стробоскопического метода состоит в обобщении на случай захвата порядка $n : t$. Предположим опять, что мы наблюдаем один осциллятор, в то время как фаза второго кратна 2π . Тогда, если взаимодействие имеет место, то мы сделаем n наблюдений за t циклов первого осциллятора. Чтобы построить синхрограмму, мы должны каким-то образом различать фазы в пределах t соседних циклов. Для этой цели снова воспользуемся тем, что фаза может быть определена как на окружности, т.е. от 0 до 2π , так и на всей действительной оси. Мы часто смешивали эти определения, и диапазон изменения фазы был ясен из контекста. Теперь мы используем следующий прием: возьмем развернутую (т.е. бесконечно растущую) фазу и свернем ее на интервале $[0, 2\pi t]$ (это означает, что фазы $\phi = 0$ и $\phi = 2\pi t$ эквивалентны). Таким образом, мы будем рассматривать t циклов в качестве одного, и, продолжая процедуру, как было описано ранее, построим зависимость $\psi_m(t_k) = \phi_1(t_k) \bmod 2\pi t$ от времени (рис. 6.5); индекс m показывает, как именно фаза была свернута. Отметим, что при таком

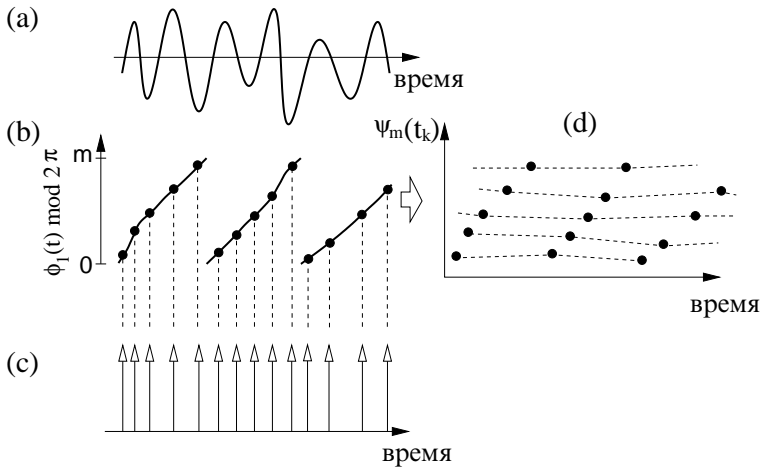


Рис. 6.5. Принцип фазового стробоскопа, или синхрограммы. Медленный сигнал (а) наблюдается в соответствии с фазой быстрого сигнала (с). Измеренная в эти моменты фаза ϕ_1 медленного сигнала, свернутая по модулю $2\pi t$ (т.е. t соседних циклов взяты в качестве одного длинного цикла), изображена в (d); здесь $t = 2$. В таком представлении синхронизация порядка $n : t$ проявляется в виде n почти горизонтальных линий в (d); сходная картина наблюдается и при модуляции.

подходе лишь значение m должно быть определено методом проб и ошибок; при этом различные эпизоды, скажем, с приблизительным соотношением частот $n : m$ и $(n + 1) : m$ будут видны на одной и той же синхрограмме.

Рассмотрим анализ фаз для случая взаимодействия сердечно-сосудистой и дыхательной систем человека. Как хорошо известно по крайней мере 150 лет [Ludwig 1847], эти системы не являются независимыми; их взаимосвязь достаточно сложна и до сих пор является предметом изучения физиологов (см., например, [Коершен 1991; Saul 1991] и ссылки там же). В результате этого взаимодействия сердцебиение здорового человека обычно ускоряется при вдохе и замедляется при выдохе, т.е. ритм сердца промодулирован ритмом, связанным с дыханием. Такая модуляция сердечного ритма по частоте (см. рис. 6.10) известна по крайней мере столетие и обычно обозначается как «дыхательная синусная аритмия», см., например, [Шмидт и Тевс 1983] и приведенные там ссылки. Модуляция, силь-

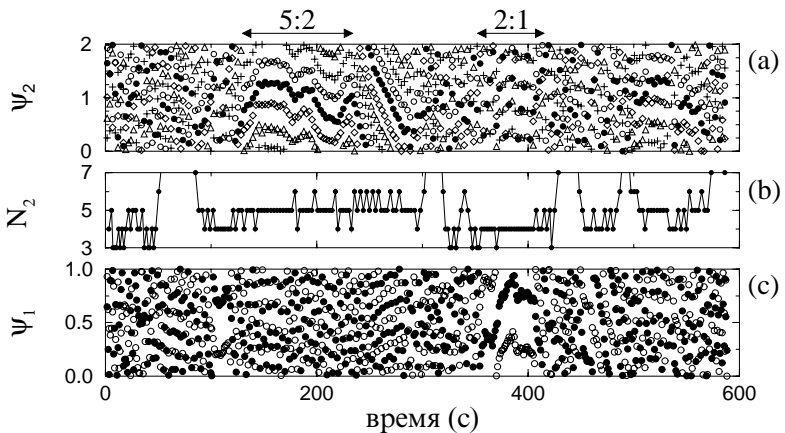


Рис. 6.6. Пример чередования взаимодействия между сердцебиением и дыханием здорового младенца с приблизительным соотношением частот 2 : 1 и 5 : 2. (а) Два соседних дыхательных цикла взяты в качестве одного цикла. Следовательно, эпизоды фазовых соотношений порядка 2 : 1 и 5 : 2 проявляются в виде структур с четырьмя или пятью линиями. (б) Зависимость числа сердцебиений за два дыхательных цикла N_2 также указывает на эпизоды взаимодействия. (с) Если фаза дыхания свернута по модулю 2π , то видны только эпизоды взаимодействия с фазовым соотношением порядка 2 : 1. Для наглядности данные показаны различными чередующимися символами (пять и два символа в (а) и (с) соответственно). Построено с использованием данных из [Mrowka *et al.* 2000].

ная нестационарность и высокий уровень шума делают взаимодействие едва заметным. Метод синхрограммы оказался наиболее полезным инструментом для такого анализа [Schäfer *et al.* 1998, 1999; Rosenblum *et al.* 2001].

Двухканальные данные, а именно электрокардиограмма (ЭКГ) и сигнал дыхания, были уже представлены на рис. 6.1. Сигналы, которые мы анализируем, измерены на здоровых новорожденных [Mrowka *et al.* 2000]. Синхрограммы выявляют короткие чередующиеся эпизоды взаимодействия с приблизительными соотношениями частот 2 : 1 и 5 : 2 (рис. 6.6).

6.3.5 Фазовые соотношения при сильной модуляции. Пример: генерация потенциалов действия электрорецепторами веслоноса

Нейман и др. [Neiman *et al.* 1999a, 2000] изучали генерацию потенциалов действия электрорецепторами веслоноса (paddlefish, *Polydon spathula* – рыба из породы осетровых), находящейся в периодическом электрическом поле. Это поле имитировало сигналы, поступающие от зоопланктона – естественной жертвы этой рыбы (см. [Wilkins *et al.* 1997; Russell *et al.* 1999]). Это типичный активный эксперимент (параметры воздействия могут варьироваться), и поэтому он должен анализироваться с помощью зависимости наблюдаемая частота – расстройка. Для этой цели достаточно просто посчитать число спайков на единицу времени и оценить частоту. Конечно, специальные методы анализа здесь не требуются, и мы используем эти данные исключительно как модельный пример для иллюстрации эффективности стробоскопического метода при анализе взаимосвязи между сигналами.

Данные были получены Д. Ф. Расселом, А. Б. Нейманом и Ф. Моссом путем измерения активности электрочувствительного нейрона. Существенной особенностью данных является модуляция генерации спайков внешним электрическим полем (рис. 6.7с).⁷ Выяснив, что $\Omega/\omega_e \approx 11$, вычислим разность фаз порядка 1 : 11 (рис. 6.7а, б). Ее удобно определять в моменты появления спайков. В результате получим $\phi_{1,11}(t_k) = 11 \cdot \omega_e t_k - 2\pi k$, где t_k – время появления k -ого спайка, а $\omega_e = 2\pi \cdot 5$; нижний индекс e относится к внешней (external)

⁷ Внешняя сила показана схематически, так как нам неизвестны ее форма и начальная фаза, а только частота. Отметим, что в отсутствие внешнего поля интервал между спайками изменяется мало.

силе. Распределение циклической разности фаз $\Psi_{11,1} = \phi_{1,11} \bmod 2\pi$ показано на рис. 6.7d. Далее воспользуемся стробоскопическим методом; результаты показаны на рис. 6.8.

Приведенный пример показывает, что в случае модуляции стробоскопический метод существенно более эффективен для определения соотношений между фазами двух сигналов, чем простой анализ разности фаз. Отметим, что флуктуации $\phi_{11,1}(t)$ очень сильны (их размах порядка $\approx 2\pi$). В результате распределение циклической разности фаз не является унимодальным и не указывает на наличие взаимодействия. Напротив, 11 полос, заметных на синхрограмме, четко указывают на сложную связь; модуляция проявляется лишь в неравном расстоянии между полосами.

Суммируя вышесказанное, мы можем сделать вывод, что нельзя предложить универсальный рецепт выбора метода анализа. Этот выбор определяется конкретным набором данных. При анализе сложных шумовых сигналов не следует полагаться только на один метод.

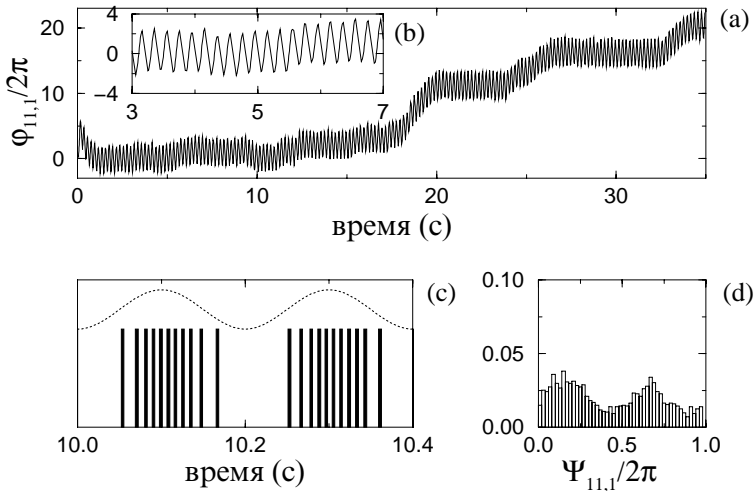


Рис. 6.7. Фазовые соотношения между нейроном, генерирующим спайки, и внешним электрическим полем. (а, б) График разности фаз подтверждает гипотезу о сложной взаимосвязи между данными. Исходные сигналы изображены в (с); показаны два периода внешней силы; в этом интервале времени видны две группы по 11 спайков. Отметим, что из-за сильной модуляции флуктуации разности фаз (а, б) очень сильны, поэтому соответствующее распределение (d) циклической фазы не является унимодальным. Из этих графиков неясно, связаны ли сигналы между собой; метод синхрограммы (рис. 6.8) оказался здесь значительно более эффективным. Данные предоставлены Д. Ф. Расселом, А. Б. Нейманом и Ф. Моссом.

Мы рекомендуем комбинировать простейшие методы, например, подсчет числа спайков на период внешней силы с вычислением распределения разности фаз и стробоскопическим методом.

6.4 Заключение и библиографические заметки

6.4.1 Несколько заметок о «пассивных» экспериментах

Мы завершаем обсуждение экспериментальных методов несколькими замечаниями. Мы хотим еще раз подчеркнуть, что обратная задача – попытка выявить взаимодействие между осцилляторами, не имея доступа к их параметрам, только на основе анализа данных – неоднозначна. Мы предостерегаем против слепого применения синхронизационного анализа двухканальных данных и неосторожной интерпретации результатов. Выскажем четыре замечания:

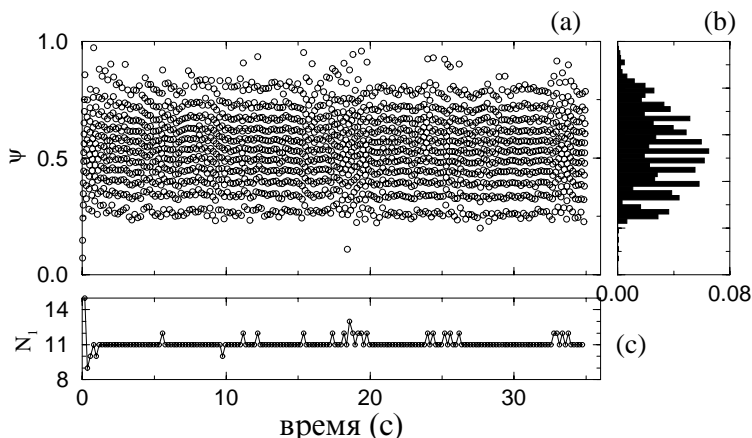


Рис. 6.8. Стробоскопический метод (синхрограмма) очень эффективен при анализе взаимосвязи в том случае, когда частота генерации электрочувствительного рецептора веслоноса значительно выше частоты внешнего поля. (а) Одиннадцатиполосная структура синхрограммы делает очевидным наличие взаимодействия (за исключением коротких эпизодов); это подтверждается соответствующим распределением в (б). (с) График зависимости числа спайков на период внешней силы также подтверждает, что частоты находятся в соотношении приблизительно 11 : 1. Данные предоставлены Д. Ф. Расселом, А. Б. Нейманом и Ф. Моссом.

- (i) **Синхронизационный анализ основан на предположении.** Не следует забывать, что синхронизационный анализ двухканальных данных основан на предположении о существовании двух колебательных систем, которые либо взаимодействуют, либо осциллируют независимо. Если это неверно, то анализ не имеет смысла; это проиллюстрировано на рис. 6.9.
- (ii) **Не все наблюдаемые хороши.** В качестве контрпримера рассмотрим два сигнала, которые действительно отражают состояние двух автоколебательных систем, а именно сердечно-сосудистой и дыхательной, но только один из сигналов годится для вычисления фазы. Данные – последовательность интервалов между сердечбиениями (RR) и дыхание – показаны на рис. 6.10. Можно сказать, что эти сигналы изменяются синхронно, но мы подчеркнем, что RR-интервалы отражают именно изменение периода сокращения сердца, а не исходный ритм. Сокращение в постоянном ритме дало бы постоянные RR-интервалы. Следовательно, оценка фазы по этому временному ряду методом преобразования Гильберта, хотя формально и возможна, но дает угловую переменную, которая не связана с

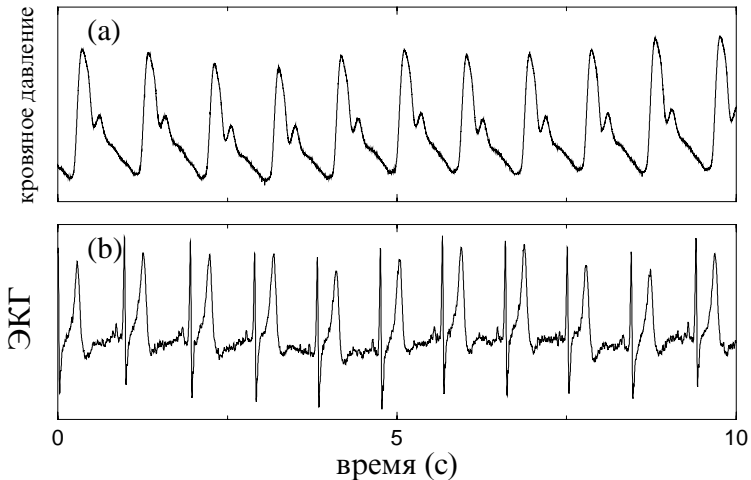


Рис. 6.9. Запись кровяного давления, измеренного с помощью системы Finapres на указательном пальце (а) и электрокардиограмма (б). Один импульс кровяного давления соответствует одному сердечному сокращению, но иначе и быть не может. Наблюдаемые отражают изменение двух переменных, относящихся к автоколебательной и пассивной системам. Это пример ситуации, когда синхронизационный анализ бессмысленен. Данные предоставлены R. Mrowka.

истинной фазой.

- (iii) **Мы определяем взаимодействие, а не синхронизацию.** Строго говоря, тот факт, что распределение циклической разности фаз $(\phi_1 - \phi_2) \bmod 2\pi$ двух автоколебательных систем имеет максимум, указывает только на наличие взаимодействия, а не синхронизации. Напомним, что для периодических осцилляторов вне языка Арнольда, но близко к его границе, разность фаз растет неравномерно (см. рис. 3.8). Для систем с шумом переход к синхронизации размыт, и на вопрос, является ли состояние синхронным, нельзя ответить однозначно. Более того, наличие максимума в распределении циклической разности фаз может появиться в результате модуляции сигнала. Следовательно, некорректно говорить о выявлении синхронизации; необходимо все время иметь в виду, что анализ пассивного эксперимента может указать только на наличие взаимодействия.
- (iv) **Анализ фазовых соотношений в сравнении с другими методами.** Интересно отметить, что анализ фазовых соотношений и взаимнокорреляционный (взаимноспектральный) анализ

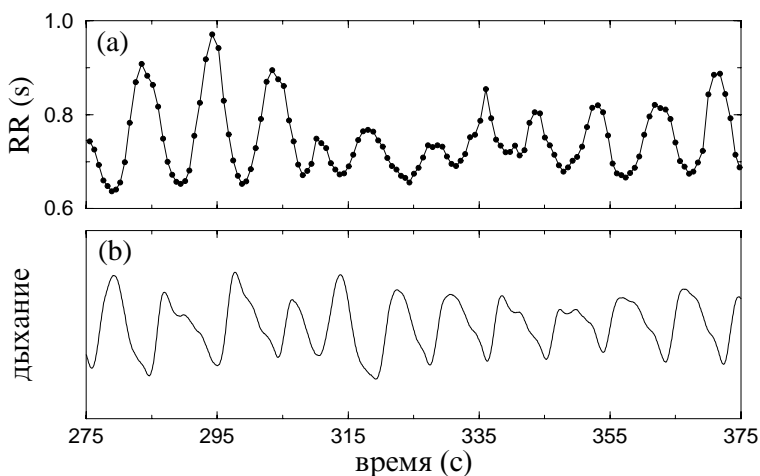


Рис. 6.10. Интервалы между сокращениями сердца (а) осциллируют в соответствии с дыханием (b), показанным в произвольных единицах. Это пример ярко выраженной дыхательной синусной аритмии у молодого спортсмена. С физической точки зрения эти колебания являются эффектом модуляции, которая может сопровождаться, а может и не сопровождаться, синхронизацией. Из Schäfer *et al.*, *Physical Review E*, Vol. 60, 1999, pp. 857–870. Copyright 1999 by the American Physical Society.

выявляют различные аспекты взаимодействия между системами. Некоторые примеры показывают, что два коррелированных (когерентных) сигнала могут генерироваться несинхронными осцилляторами [Tass *et al.* 1998]. Эта проблема пока не была изучена систематически.

6.4.2 Количественное оценивание фазовых соотношений и его статистическая значимость

Естественная проблема в анализе соотношения между фазами $\phi_{1,2}$ – это вычисление количественной характеристики этой связи. Недавно было предложено несколько таких характеристик. Palus [1997] вычислял взаимную информацию между двумя фазами. Tass *et al.* [1998] характеризовали отличие распределения разности фаз от равномерного с помощью энтропии Шеннона; другой мерой является первая Фурье-гармоника этого распределения [Rosenblum *et al.* 2001]. Еще один подход основан на вычислении условной вероятности того, что ϕ_1 принимает определенное значение при условии, что ϕ_2 является константой; это эквивалентно вычислению характеристики распределения стробоскопически наблюдаемой фазы [Tass *et al.* 1998; Rosenblum *et al.* 2001]. Toledo *et al.* [1999] характеризовали вертикальный размер полос на синхрограмме. Neiman *et al.* [1999b] и Anishchenko *et al.* [2000] использовали коэффициент диффузии фазы как меру степени синхронизации; вычисление этого коэффициента требует очень длинных временных рядов, что усложняет применение этой меры в реальном эксперименте. Кроме того, это – относительная характеристика (необходимо сравнивать диффузию несвязанных и связанных осцилляторов), так что, по-видимому, она более эффективно может использоваться в активных экспериментах наряду с вычислением кривых наблюдаемая частота – расстройка.

В настоящий момент не существует методов оценки статистической значимости фазового анализа. Было несколько попыток решить эту проблему с использованием суррогатных данных. Чтобы сконструировать такие данные, Seidel and Herzel [1998] рандомизировали фазы Фурье, что, по-видимому, является слишком слабым тестом. Tass *et al.* [1998] оценивали значимость индекса синхронизации, используя в качестве суррогатных данных белый или инструментальный шум, отфильтрованный тем же образом, что и сигнал. При исследовании взаимодействия сердечно-сосудистой и дыхательной

систем, Toledo *et al.* [1999] выполняли тест с суррогатными данными, взяв записи сердцебиения и дыхания от разных испытуемых, или же обращая во времени запись интервалов между сердцебиениями. Сложности в конструировании подходящих суррогатных данных обсуждаются в [Schäfer *et al.* 1999; Rosenblum *et al.* 2001]. Отметим, что тесты с суррогатными данными требуют количественной меры взаимосвязи.

6.4.3 Некоторые полезные ссылки

Специальный тип активного эксперимента описан Глассом и Мэки [1988]. Они изучали переустановку фазы (phase resetting) осциллятора одиночным импульсом (см. раздел 3.2.3). Прикладывая стимул в различных фазах, они экспериментально получили зависимость $\phi_{\text{new}} = \mathcal{F}(\phi_{\text{old}})$, т.е. отображение окружности. Численное итерирование этого отображения позволяет предсказать свойства синхронизации осциллятора, возмущенного периодически последовательно импульсов.

В нашем изложении синхронизационного подхода к анализу двухканальных данных мы следовали нашим предыдущим публикациям [Rosenblum *et al.* 1997a; Rosenblum and Kurths 1998; Rosenblum *et al.* 1998; Schäfer *et al.* 1998, 1999; Tass *et al.* 1998; Rosenblum *et al.* 2001]. Этот подход предполагает только оценку соотношения между фазами, в то время как нерегулярные амплитуды могут быть некоррелированы. Нерегулярность может маскировать захват фаз, поэтому традиционные методы, анализирующие не фазы, а исходные сигналы, могут быть менее чувствительны к выявлению взаимосвязи между системами. Mormann *et al.* [2000] использовали концепцию фазовой синхронизации в анализе электроэнцефалограмм, записанных у пациентов с эпилепсией височной доли. Они наблюдали пространственные и временные изменения в синхронности, связанные с патологической активностью.

Rodriguez *et al.* [1999] использовали для оценки фазы сигнала вейвлет Габора; этот метод может быть использован в случае захвата 1 : 1 (один и тот же вейвлет используется для обработки обоих сигналов). Этот метод, по-видимому, близок к методу аналитического сигнала.

Графическое представление, схожее с синхрограммами, было введено в контексте анализа взаимодействия между сердечно-сосудистой и дыхательной системами в работах [Stutte and Hildebrandt 1966; Pessenhofer and Kenner 1975; Kenner *et al.* 1976].

Вместо фазы авторы откладывали по оси y интервал времени между двумя вздохами. Поскольку сворачивания фазы не проводилось, то этот графический метод позволял обнаружить только захват порядка $1 : m$. Этот простейший вариант синхрограммы был также использован в работах [Hoyer *et al.* 1997; Schiek *et al.* 1998; Seidel and Herzel 1998]. Bračić and Stefanovska [2000] использовали метод синхрограммы для анализа взаимосвязи между сердечными и дыхательными ритмами у здоровых испытуемых (не спортсменов) в состоянии покоя. Toledo *et al.* [1998] показали, что такая взаимосвязь может наблюдаться и у больных после пересадки сердца. У этих пациентов отсутствовала непосредственная регуляция ритма сердца со стороны автономной нервной системы, поэтому в этом случае взаимосвязь возникает за счет каких-то других механизмов взаимодействия.

Отметим также, что Schiff *et al.* [1996] использовали понятие динамической взаимосвязи, введенное в [Pecora *et al.* 1997a], и вычисление взаимной информации для подтверждения предположения о том, что двухканальные данные генерируются двумя синхронизованными системами, где синхронизация понималась в смысле функционального взаимоотношения между состояниями двух систем (обобщенная синхронизация); см. также [Arnhold *et al.* 1999]. Так как режим фазовой синхронизации возникает при более слабой связи, чем режим обобщенной синхронизации, мы полагаем, что анализ, основанный на идее фазовой синхронизации, более чувствителен.

Интересно отметить, что идея, схожая с идеей фазового стробоскопа, была реализована 40 лет назад в устройстве, названном кардиосинхронизатором. Оно позволяло получать рентгеновские изображения сердца в произвольно выбранной фазе кардиоцикла [Цетлин 1969]. Конечно же, это не является синхронизацией в нашем понимании, так как сердечно-сосудистая система наблюдалась в ответствии с ее собственной фазой.

Часть II

Захват фазы и частоты

Глава 7

Синхронизация периодических автоколебаний периодическим внешним воздействием

В этой главе мы опишем синхронизацию периодических автоколебаний периодической внешней силой. Основной эффект состоит в захвате фазы колебаний, в результате чего наблюдаемая частота в точности совпадает с частотой силы.

Мы начнем с описания случая малой силы. В разделе 7.1 мы используем метод возмущений, т.е. пренебрегаем изменениями амплитуды автоколебаний и сводим описание только к фазовой динамике. Этот метод приводит к простому уравнению для фазы, допускающему аналитическое исследование. Это уравнение, однако, не универсально и зависит от конкретных свойств автоколебаний. Другой аналитический подход описан в разделе 7.2; здесь мы предполагаем малой не только силу, но и амплитуду колебаний, т.е. считаем, что они слабо нелинейны. В этом случае применим метод усреднения, приводящий к универсальным уравнениям. Исторически это был первый аналитический подход к проблеме синхронизации, восходящий к работам Эпплтона [Appleton 1922], Ван-дер-Поля [van der Pol 1927], Андронова и Витта [1930a; 1930b]. Усредненные уравнения могут быть исследованы достаточно подробно, но их применимость ограничена: количественные предсказания возможны только для автоколебаний малой амплитуды вблизи точки их возникновения (точки бифуркации Хопфа).

В общем случае, когда сила не мала и/или автоколебания сильно нелинейны, мы должны обратиться к качественной теории динамических систем. Для нашей проблемы основным математическим аппаратом являются отображения кольца и окружности, мы описываем их в разделе 7.3. Этот подход дает общую картину, вплоть до перехода к хаосу; он позволяет установить границы применимости аналитических методов и служит основой для численного исследования конкретных систем.

В разделе 7.4 обсуждается синхронизация ротаторов. Эти системы описываются угловыми переменными типа фазы; свойства синхронизации ротаторов близки к свойствам синхронизации автоколебательных систем. В заключение мы опишем техническое устройство – систему фазовой автоподстройки частоты; оно служит примером автоколебаний под воздействием внешней силы.

7.1 Фазовая динамика

В этом разделе мы рассмотрим влияние слабой периодической силы на периодические автоколебания. Основная идея состоит в том, что малая сила воздействует в основном на фазу, а не на амплитуду, и поэтому процесс можно описать с помощью фазового уравнения. При его выводе мы следуем методу, разработанному Малкиным [1956] и Курамото [Kuramoto 1984]. Хотя этот метод довольно общий, получающееся фазовое уравнение оказывается очень простым и удобным для исследования. Это позволит нам аналитически вывести многие важные свойства синхронизации.

7.1.1 Предельный цикл и фаза автоколебаний

Рассмотрим M -мерную ($M \geq 2$) диссипативную автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида:¹

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M). \quad (7.1)$$

¹ Систему с внешней силой можно записать формально как автономную, если ввести дополнительную переменную, эквивалентную времени. С физической точки зрения, такая манипуляция не делает систему истинно автономной, поскольку на новую переменную «время» нельзя воздействовать.

Будем предполагать, что имеется устойчивое решение $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0(t + T_0)$ с периодом T_0 . В *фазовом пространстве* (пространстве всех переменных \mathbf{x}) этому решению отвечает изолированная замкнутая притягивающая траектория, называемая *предельным циклом* (рис. 7.1). Движение точки в фазовом пространстве по этому циклу соответствует *автоколебаниям*.² Наиболее популярным классическим примером автоколебательной системы служит уравнение Ван-дер-Поля [van der Pol 1920, 1927]

$$\ddot{x} - 2\mu\dot{x}(1 - \beta x^2) + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.2)$$

При малых μ автоколебания в этой модели квазипериодические, а при больших μ имеют релаксационный характер.

Нашей первой целью является описание движений в терминах фазы. Мы введем фазу ϕ как координату вдоль цикла, монотонно растущую по направлению движения и возрастающую на 2π при каждом обороте. Более того, мы потребуем равномерного изменения фазы во времени, т.е. она должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0, \quad (7.3)$$

² Уместно противопоставить эту ситуацию периодическим движениям в консервативной интегрируемой системе, которые обычно не изолированные и не притягивающие. При этом иногда наблюдаются определенные соотношения между частотами движений в такой системе (например, между периодами обращения планет в Солнечной системе), но мы рассматриваем эти соотношения не как синхронизацию, а как резонанс.

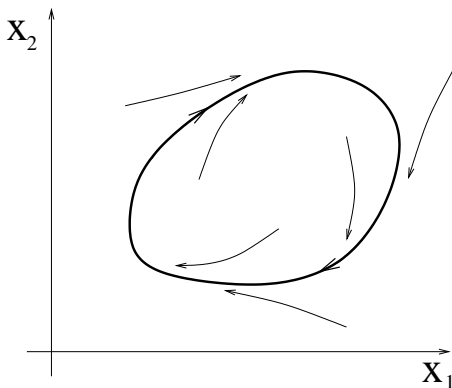


Рис. 7.1. Устойчивый предельный цикл (жирная кривая) в двумерной динамической системе. Его форма может сильно отличаться от окружности, в многомерном фазовом пространстве могут даже образовываться узлы. Соседние траектории притягиваются к циклу.

где $\omega_0 = 2\pi/T_0$ есть частота автоколебаний. В дальнейшем, когда частота колебаний будет меняться под действием силы и/или связи, нам понадобится отличать ее от частоты колебаний автономной системы. Поэтому мы будем называть ω_0 *автономной частотой*. Отметим, что равномерно вращающаяся фаза всегда существует, ее можно получить из любой неравномерно вращающейся 2π -периодической угловой переменной θ на цикле с помощью преобразования

$$\phi = \omega_0 \int_0^\theta \left[\frac{d\theta}{dt} \right]^{-1} d\theta. \quad (7.4)$$

Системные переменные \mathbf{x} , взятые на цикле, являются 2π -периодическими функциями фазы.

Из (7.3) следует очень важное свойство фазы: эта переменная нейтрально устойчива. Действительно, возмущение фазы остается постоянным, оно не растет и не убывает во времени. В терминах устойчивости траекторий это означает, что устойчивый предельный цикл имеет один нулевой ляпуновский показатель, соответствующий возмущениям вдоль цикла (другие показатели, соответствующие поперечным возмущениям, отрицательны). Этот факт отражает свойство автономных динамических систем – они инвариантны по отношению к сдвигу времени: если $\mathbf{x}(t)$ есть зависящее от времени решение, то та же самая функция времени со сдвинутым аргументом $\mathbf{x}(t + \Delta t)$ также является решением. При движении по предельному циклу сдвиг времени Δt соответствует сдвигу фазы $\Delta\phi = \omega_0\Delta t$. На математическом языке можно сказать, что фаза устойчива, но не асимптотически устойчива.

7.1.2 Малые возмущения и изохроны

Рассмотрим теперь действие малой внешней силы на автоколебания. Вынужденные движения описываются уравнениями

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \quad (7.5)$$

где сила $\varepsilon\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon\mathbf{p}(\mathbf{x}, t + T)$ имеет период T , в общем случае отличный от T_0 . Сила пропорциональна малому параметру ε ; ниже мы рассматриваем только эффекты первого порядка по ε .

Внешняя сила уводит траекторию с предельного цикла, но из-за того, что она мала, а цикл устойчив, траектория только слегка

отклоняется от исходной $\mathbf{x}_0(t)$, т.е. она лежит в малой окрестности устойчивого предельного цикла.³ Таким образом, возмущения в поперечном к циклу направлении малы.⁴ В противоположность этому, возмущения фазы могут быть большими: сила может легко двигать фазовую точку вдоль цикла. На этой качественной картине основывается идея описывать возмущенные движения только с помощью фазы, учитывая поперечные к предельному циклу отклонения с помощью метода возмущений. Для этого нужно определить фазу автономной системы (7.1) не только на предельном цикле, но и в его окрестности. Естественный и удобный способ такого определения был предложен Winfree [1980] и Guckenheimer [1975], см. также [Kuramoto 1984].

Основная идея состоит в нахождении такой фазовой переменной, которая бы вращалась равномерно в соответствии с (7.3) не только на цикле, но и вблизи него. С этой целью определим так называемые *изохроны* [Winfree 1967; Guckenheimer 1975]. Построение этих кривых в окрестности предельного цикла проиллюстрировано на рис. 7.2. Будем наблюдать нашу динамическую систему (7.1) стробоскопиче-

- ³ При релаксационных колебаниях, когда предельный цикл особенно устойчив, отклонения от цикла малы и при не очень малой амплитуде силы. Эти колебания хорошо описываются одной лишь фазовой переменной, мы займемся ими в разделе 7.3.
- ⁴ Переменные в поперечных к предельному циклу направлениях можно обобщенно называть амплитудой. В многомерном фазовом пространстве это определение, однако, не однозначно.

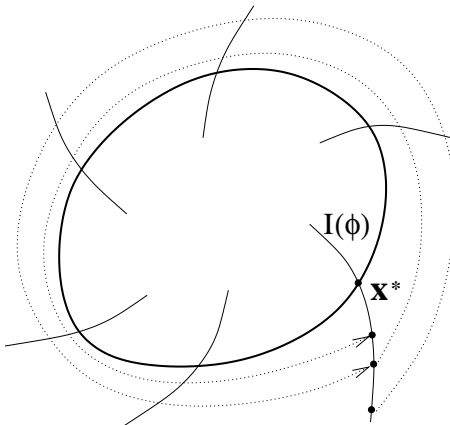


Рис. 7.2. Изохроны $I(\phi)$ в окрестности устойчивого предельного цикла. Они инвариантны при стробоскопическом (с периодом цикла T_0) отображении, траектории которого показаны пунктиром.

ски, через интервалы времени в точности равные периоду автоколебаний T_0 . Тогда из (7.1) получается отображение

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t + T_0) \equiv \Phi(\mathbf{x}).$$

Все точки на предельном цикле есть неподвижные точки этого отображения, и все соседние точки притягиваются к ним. Выберем точку на цикле \mathbf{x}^* и рассмотрим те точки в ее окрестности, которые притягиваются к ней под действием Φ . Они образуют $(M-1)$ -мерную гиперповерхность I , называемую *изохроной*, пересекающую предельный цикл в точке \mathbf{x}^* . Гиперповерхность изохроны можно провести через любую точку на цикле. Поэтому мы можем параметризовать эти поверхности в соответствии с фазой $I(\phi)$ (рис. 7.2). Теперь можно обобщить определение фазы на окрестность предельного цикла, требуя, чтобы фаза была постоянна на каждой изохроне $I(\phi)$. Таким образом фаза определяется в окрестности предельного цикла – по крайней мере в той окрестности, в которой существуют изохроны.

Смысл названия поверхностей $I(\phi)$ очевиден: поток, задаваемый динамической системой (7.1), переводит эти поверхности друг в друга. Из этой конструкции непосредственно следует, что фазы подчиняются уравнению (7.3), поскольку изохроны вращаются с той же скоростью, что и точки на цикле. Более того, при обороте за время T_0 эти гиперповерхности остаются инвариантными. Поэтому они обладают одним интересным свойством: если мы выберем такую поверхность в качестве секущей Пуанкаре, то отображение Пуанкаре будет иметь одно и то же время возврата для всех точек на секущей. Отметим также, что изохроны хорошо определены как для устойчивого, так и для полностью неустойчивого предельных циклов (в последнем случае имеется в виду неустойчивость по всем поперечным направлениям, так что цикл становится устойчивым в обратном времени, и тогда изохроны можно определить), но они не определены для седловых циклов, имеющих как устойчивые, так и неустойчивые многообразия.

7.1.3 Пример: уравнение для комплексной амплитуды

Рассмотрим один конкретный пример системы с предельным циклом и определим фазу и изохроны. Запишем систему в комплексном виде как уравнение первого порядка для комплексной переменной A . Как мы увидим ниже в разделе 7.2, это уравнение описывает

слабонелинейные автоколебания, и A есть их комплексная амплитуда, ср. с (7.41). В различных приложениях это уравнение называют уравнением Ландау–Стюарта или моделью «лямбда–омега»:

$$\frac{dA}{dt} = (1 + i\eta)A - (1 + i\alpha)|A|^2 A. \quad (7.6)$$

Записывая это уравнение в полярных координатах $A = Re^{i\theta}$, получим легко разрешимую систему второго порядка

$$\frac{dR}{dt} = R(1 - R^2), \quad (7.7)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \eta - \alpha R^2. \quad (7.8)$$

Предельный цикл есть единичная окружность $R = 1$ и решение с произвольными начальными условиями $R_0 = R(0)$, $\theta_0 = \theta(0)$ имеет вид

$$R(t) = \left[1 + \frac{1 - R_0^2}{R_0^2} e^{-2t} \right]^{-1/2}, \quad (7.9)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + (\eta - \alpha)t - \frac{\alpha}{2} \ln(R_0^2 + (1 - R_0^2)e^{-2t}).$$

На предельном цикле угловая переменная θ вращается с постоянной скоростью $\omega_0 = \eta - \alpha$ и, следовательно, совпадает с фазой ϕ . Однако, если амплитуда не равна единице, происходит дополнительный набег фазы из-за слагаемого в (7.8), пропорционального α . Из (7.9) легко видеть, что этот дополнительный набег фазы равен $-\alpha \ln R_0$. Поэтому на всей плоскости (R, θ) фазу можно определить как

$$\phi(R, \theta) = \theta - \alpha \ln R. \quad (7.10)$$

Легко проверить, что эта фаза действительно вращается равномерно:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} - \alpha \frac{\dot{R}}{R} = \eta - \alpha.$$

Изохроны есть линии постоянной фазы ϕ , на плоскости (R, θ) они представляют собой логарифмические спирали

$$\theta - \alpha \ln R = \text{constant}.$$

При $\alpha = 0$ спирали превращаются в прямые $\theta = \phi$. На этом примере удобно обсудить свойство изохронности колебаний. С физической точки зрения, под изохронными колебаниями часто понимают такие, у которых частота не зависит от амплитуды, а под неизохронными

– колебания с зависящей от амплитуды частотой (в нашем примере амплитуда – это переменная R). Это определение, однако, не однозначно, поскольку вне предельного цикла фазу и, соответственно, амплитуду, можно определить по разному. Если мы примем введенное выше определение, основанное на изохронах, то частота будет постоянной и любой осциллятор будет изохронным. С другой стороны, частота, определенная по угловой скорости угловой переменной θ в приведенном выше примере, задается уравнением (7.8) и зависит от амплитуды. Мы предпочитаем придерживаться второго подхода и называть осциллятор (7.6) изохронным, если $\alpha = 0$, и неизохронным в противном случае. В терминах изохрон, можно называть осциллятор изохронным, если изохроны перпендикулярны к предельному циклу, и неизохронным в противном случае. Отметим, что это определение все еще неоднозначно, поскольку оно не инвариантно к заменам переменных.

7.1.4 Уравнение фазовой динамики

Определив фазу в некоторой окрестности предельного цикла, мы можем записать уравнение (7.3) в этой окрестности как

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \omega_0. \quad (7.11)$$

Поскольку фаза гладко зависит от координат \mathbf{x} , можно выразить ее производную по времени в виде

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}, \quad (7.12)$$

что вместе с (7.1) приводит к соотношению

$$\sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}) = \omega_0.$$

Рассмотрим теперь возмущенную систему (7.5). Используя «невозмущенное» определение фазы и подставляя (7.5) в (7.12), получим

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} (f_k(\mathbf{x}) + \varepsilon p_k(\mathbf{x}, t)) = \omega_0 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}, t). \quad (7.13)$$

Второй член в правой части мал (пропорционален ε), и отклонения \mathbf{x} от предельного цикла \mathbf{x}_0 также малы. Поэтому в первом приближении можно этими отклонениями пренебречь и вычислить правые части на предельном цикле:

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}_0, t). \quad (7.14)$$

Поскольку точки на предельном цикле однозначно связаны с фазой ϕ , получается замкнутое уравнение, содержащее только фазу:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, t), \quad (7.15)$$

где

$$Q(\phi, t) = \sum_k \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0(\phi))}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}_0(\phi), t).$$

Отметим, что Q есть 2π -периодическая функция ϕ и T -периодическая функция t .

7.1.5 Пример: неавтономное уравнение для комплексной амплитуды

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания осциллятора, описываемого уравнением (7.6), которое мы перепишем как систему действительных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - \eta y - (x^2 + y^2)(x - \alpha y) + \varepsilon \cos \omega t, \\ \frac{dy}{dt} &= y + \eta x - (x^2 + y^2)(y + \alpha x). \end{aligned}$$

Переписывая выражение для фазы (7.10) в виде

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{\alpha}{2} \ln(x^2 + y^2),$$

получаем частный случай уравнения (7.15):

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \omega t = \eta - \alpha - \varepsilon(\alpha \cos \phi + \sin \phi) \cos \omega t,$$

из которого, если обозначить $\tan \phi_0 = 1/\alpha$, следует

$$\frac{d\phi}{dt} = \eta - \alpha - \varepsilon \sqrt{1 + \alpha^2} \cos(\phi - \phi_0) \cos \omega t. \quad (7.16)$$

Уравнение (7.15) служит базовым уравнением для описания динамики фазы автоколебаний в присутствии малой периодической внешней силы. Исследовать его можно различными способами. Если никаких приближений больше не делать, то мы придем к анализу, представленному ниже в разделе 7.3. Здесь же мы воспользуемся еще раз малостью параметра ε и упростим уравнение для фазы.

7.1.6 Медленная динамика фазы

В «нулевом» приближении, если пренебречь действием внешней силы (т.е. если $\varepsilon = 0$), решение уравнения (7.15) имеет вид

$$\phi = \omega_0 t + \phi_0. \quad (7.17)$$

Подставим это решение в функцию Q . Поскольку эта функция 2π -периодична по ϕ и T -периодична по t , ее можно представить в виде двойного ряда Фурье и записать

$$Q(\phi, t) = \sum_{l,k} a_{l,k} e^{ik\phi + il\omega t}, \quad (7.18)$$

где $\omega = 2\pi/T$ – частота внешней силы. Подставляя (7.17) в (7.18) получим

$$Q(\phi, t) = \sum_{l,k} a_{l,k} e^{ik\phi_0} e^{i(k\omega_0 + l\omega)t}. \quad (7.19)$$

Мы видим, что функция Q содержит как быстро осциллирующие (по сравнению с временным масштабом $1/\varepsilon$) члены, так и медленно меняющиеся. К последним относятся те, что удовлетворяют *резонансному условию*

$$k\omega_0 + l\omega \approx 0.$$

Будучи подставленными в (7.15), быстро осциллирующие члены приводят к отклонениям фазы порядка $O(\varepsilon)$, в то время как резонансные члены в ряде (7.19) могут привести к большим (хотя и медленным в силу малости параметра ε) изменениям фазы и поэтому особенно важны для динамики. Таким образом, наиболее существенные процессы выделяются, если усреднить силу (7.19), оставив только резонансные члены. Какие члены удовлетворяют условию резонанса, зависит от соотношения между частотой внешней силы ω и автономной частотой ω_0 . В простейшем случае эти две частоты просто близки друг к другу, $\omega \approx \omega_0$. Тогда резонансны только члены с $k = -l$. Суммируя их, получим новую, усредненную силу

$$\sum_{l=-k} a_{l,k} e^{ik\phi + il\omega t} = \sum_k a_{-k,k} e^{ik(\phi - \omega t)} = q(\phi - \omega t). \quad (7.20)$$

Усредненная сила q есть 2π -периодическая функция аргумента и содержит все резонансные члены. Подставляя ее в (7.15), получим

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon q(\phi - \omega t). \quad (7.21)$$

Введем новую переменную – разность фазы колебаний и фазы внешней силы:

$$\psi = \phi - \omega t. \quad (7.22)$$

Переменную ψ можно трактовать как медленную фазу во вращающейся системе отсчета. Введем также расстройку частот согласно

$$\nu = \omega - \omega_0 \quad (7.23)$$

и окончательно получим

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon q(\psi). \quad (7.24)$$

Прежде, чем перейти к анализу этого уравнения, покажем, что оно описывает и более общий случай, когда условие резонанса между частотой силы ω и автономной частотой ω_0 имеет вид

$$\omega \approx \frac{m}{n} \omega_0, \quad (7.25)$$

где m и n целые числа, не имеющие общего делителя. Легко видеть, что в этом случае резонансные члены в (7.19) содержат выражения типа $e^{i(jm\omega_0 - jn\omega)t}$. Тогда вместо (7.20) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l=-nj, k=mj} a_{l,k} e^{i(k\phi + l\omega t)} &= \sum_j a_{-nj, mj} e^{ij(m\phi - n\omega t)} = \\ &= \hat{q}(m\phi - n\omega t), \end{aligned} \quad (7.26)$$

где $\hat{q}(\cdot)$ есть 2π -периодическая функция. Уравнение для фазы теперь принимает вид

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \hat{q}(m\phi - n\omega t). \quad (7.27)$$

Вводя разность фаз как

$$\psi = m\phi - n\omega t,$$

получим

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon m \hat{q}(\psi), \quad (7.28)$$

где расстройка равна $\nu = n\omega - m\omega_0$. Это уравнение имеет тот же вид, что и (7.24). Простейшая 2π -периодическая функция это $\sin(\cdot)$, так что простейшая форма усредненного уравнения для фазы есть

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon \sin \psi. \quad (7.29)$$

Это уравнение иногда называют уравнением Адлера [Adler 1946].

7.1.7 Медленная динамика фазы: захват фазы и область синхронизации

Займемся исследованием основного уравнения (7.24) – нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Фазовое пространство для него можно определить двумя способами: фазу ψ можно рассматривать либо на действительной оси, от $-\infty$ до ∞ , либо, используя 2π -периодичность функции q , на окружности $0 \leq \psi < 2\pi$. Поскольку эти два представления эквивалентны, мы будем в зависимости от удобства пользоваться то одним, то другим. Уравнение (7.24) зависит от двух параметров, ε и ν . В соответствии с изначальным уравнением (7.5), ε можно интерпретировать как амплитуду внешней силы. Параметр ν , согласно (7.23), есть расстройка частот, т.е. разность между автономной частотой и частотой внешней силы. При выводе (7.24) расстройка предполагалась малой, фактически порядка ε . Отметим также, что все особенности формы предельного цикла в автономной системе (7.1) и все особенности внешней силы учтены в функции $q(\psi)$.

В уравнении (7.24) возможны два типа поведения фазы ψ , они показаны на рис. 7.3. Функция $q(\psi)$ есть 2π -периодическая функция ψ и поэтому имеет на интервале $[0, 2\pi)$ максимум q_{\max} и минимум q_{\min} ; в общем случае эти экстремумы не вырождены. Поэтому, если расстройка ν лежит в интервале

$$\varepsilon q_{\min} < \nu < \varepsilon q_{\max}, \quad (7.30)$$

то существует по крайней мере одна пара неподвижных точек (7.24), т.е. пара стационарных состояний фазы ψ . Легко видеть, что одна из этих точек устойчива (асимптотически), а другая неустойчива; в общем случае может быть несколько пар устойчивых и неустойчивых

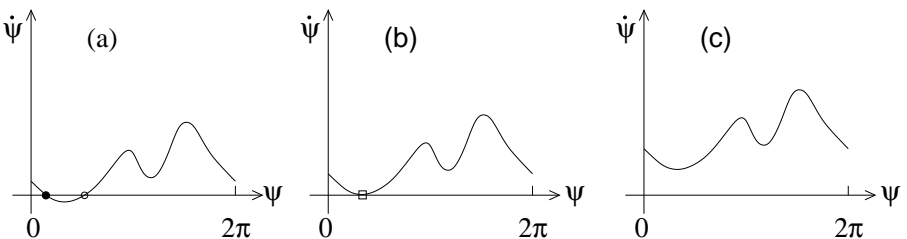


Рис. 7.3. Правая часть уравнения (7.24) внутри (а), на границе (б), и вне области синхронизации (с). Устойчивая и неустойчивая неподвижные точки обозначены символами \bullet и \circ . На рисунке (б) показан переход к синхронизации, при котором устойчивая и неустойчивая точки сливаются, образуя полустойчивую точку (квадрат \square).

точек (если функция q имеет более двух экстремумов). Поэтому при выполнении условия (7.30) система эволюционирует к одной из устойчивых неподвижных точек и остается в ней, так что вращающаяся фаза постоянна, $\psi = \psi_s$. Для исходной фазы ϕ это означает вращение с частотой внешней силы:

$$\phi = \omega t + \psi_s, \quad (7.31)$$

это как раз и есть *режим синхронизации*. Он существует внутри области (7.30) на плоскости параметров (ν, ε) , называемой *областью синхронизации* (рис. 7.4а). Часто говорят, что фаза автоколебаний ϕ следит за внешней силой ωt , и этот режим называют *захватом фазы*. Другой часто используемый термин – *захват частоты*, он означает, что частота колебаний совпадает с частотой внешней силы.

Другая ситуация наблюдается, если расстройка лежит вне интервала (7.30). Тогда производная фазы ψ по времени все время положительна (отрицательна) и частота колебаний отличается от частоты внешней силы ω . Решение уравнения (7.24) можно формально записать как

$$\int^{\psi} \frac{d\psi}{\varepsilon q(\psi) - \nu} = t,$$

оно определяет зависимость медленной фазы от времени, $\psi = \psi(t)$. Эта функция периодична с периодом T_ψ , который определяется по формуле

$$T_\psi = \left| \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\varepsilon q(\psi) - \nu} \right|. \quad (7.32)$$

Фаза ϕ вращается неравномерно,

$$\phi = \omega t + \psi(t), \quad (7.33)$$

и в общем случае зависимость переменных $\mathbf{x}(\phi)$ от времени – квазипериодическая (с двумя несоизмеримыми периодами).⁵

Важной характеристикой динамики вне области синхронизации служит средняя скорость вращения фазы, мы назовем ее *наблюдаемой частотой*. Поскольку фаза ψ испытывает приращение на $\pm 2\pi$

⁵ Любую из переменных x_i можно записать как 2π -периодическую функцию переменных $\theta_1 = \omega t$ и $\theta_2 = \Omega_\psi t$, что в случае несоизмеримых частот ω и $\Omega_\psi = 2\pi/T_\psi$ дает квазипериодическую функцию времени.

за время T_ψ , средняя частота вращений медленной фазы ψ , часто называемая *частотой биений*, равна

$$\Omega_\psi = 2\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\varepsilon q(\psi) - \nu} \right)^{-1}. \quad (7.34)$$

Соответственно, наблюдаемая частота Ω исходной фазы ϕ равна

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \Omega = \omega + \Omega_\psi.$$

(Скобки $\langle \rangle$ обозначают здесь усреднение по времени.) Частота биений есть разность между наблюдаемой частотой колебаний и частотой внешней силы.

Легко увидеть, что частота биений Ω_ψ монотонно зависит от расстройки ν . Более того, вблизи перехода к синхронизации можно оценить эту зависимость аналитически. При изменении параметра ν переход к синхронизации происходит при $\nu = \varepsilon q_{\max, \min}$, где устойчивая и неустойчивая неподвижные точки сливаются и исчезают через бифуркацию седло–узел, см. рис. 7.3. Рассмотрим для определенности переход при $\nu_{\max} = \varepsilon q_{\max}$. Если $\nu - \nu_{\max}$ мало, то выражение $|\varepsilon q(\psi) - \nu|$ очень мало в окрестности точки ψ_{\max} , так что только эта окрестность определяет значение интеграла (7.34). Раскладывая функцию $q(\psi)$ в ряд вблизи ψ_{\max} и устремляя пределы интегрирования к бесконечности, получаем корневую зависимость частоты биений (7.34)

$$\begin{aligned} |\Omega_\psi| &\approx 2\pi \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{\frac{\varepsilon}{2} q''(\psi_{\max}) \psi^2 - (\nu - \nu_{\max})} \right|^{-1} \\ &= \sqrt{\varepsilon |q''(\psi_{\max})| \cdot (\nu - \nu_{\max})} \sim \sqrt{\nu - \nu_{\max}}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Типичная зависимость частоты биений от расстройки ν показана на рис. 7.4b.

Уместно отметить, что вблизи точки перехода динамика фазы ψ очень неоднородна по времени (рис. 7.5). Действительно, в этом режиме траектория проводит долгое время (пропорциональное $(\nu - \nu_{\max})^{-1/2}$) в окрестности точки ψ_{\max} , где правая часть (7.24) близка к нулю. Эти долгие периоды почти постоянной фазы $\psi \approx \psi_{\max}$ регулярным образом перемежаются с относительно короткими интервалами времени, на которых фаза ψ увеличивается (уменьшается) на 2π ; эти события называют *проскоками фазы*. Таким образом, вращение фазы можно представить как периодическую (с периодом T_ψ (7.32)) последовательность проскоков. Между ними осциллятор

практически синхронизован внешней силой, и его фаза почти захвачена. Во время проскока фаза осциллятора совершает один дополнительный оборот по отношению к внешней силе (или отстает от нее на один оборот). Отметим, что в нашем приближении (медленная динамика фазы ψ) длительность проскока много больше периода колебаний, хотя и много меньше интервала между ними. Переход к синхронизации выглядит как увеличение интервалов времени между проскоками согласно (7.35), пока эти интервалы не обращаются в бесконечность в точке бифуркации.

7.1.8 Итоги рассмотрения фазовой динамики

В этом разделе мы подробно показали, что происходит с автоколебаниями под действием слабой периодической силы. В первом порядке по ε (амплитуде силы), сила существенно влияет на фазу колебаний, в то время как амплитуда возмущается мало. На плоскости параметров внешнего воздействия ν, ε (расстройка – амплитуда) существует область синхронизации (7.30), см. рис. 7.4а. Эта область ограничивается двумя прямыми, наклоны которых определяются экстремумами функции q (7.20). Внутри этой области медленная фаза ψ принимает устойчивое стационарное значение (или одно из возможных устойчивых значений), и фаза колебаний ϕ вращается с частотой внешней силы. При этом процесс $\mathbf{x}(t)$ периодичен с периодом внешнего воздействия. Вне области синхронизации фаза ϕ вращается с частотой, отличной от частоты внешней силы, и процесс $\mathbf{x}(t)$ в общем случае квазипериодический. Одна из фундаментальных частот – это частота

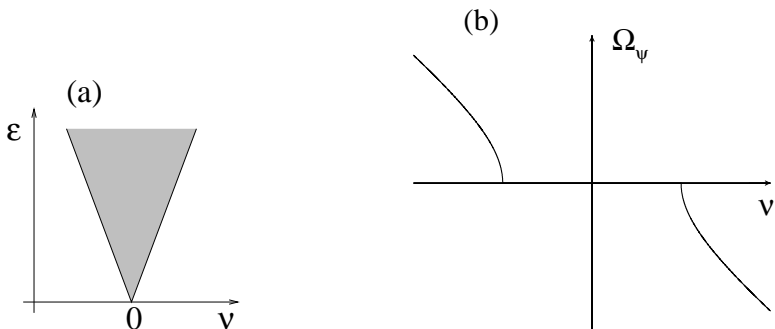


Рис. 7.4. (а) Область синхронизации на плоскости параметров ν, ε . В соответствии с (7.30) границы области синхронизации – прямые линии. (б) Зависимость частоты биений от расстройки при фиксированной амплитуде силы.

та внешней силы, другая – так называемая частота биений – задается выражением (7.34). На пороге синхронизации частота биений растет как квадратный корень параметра (см. (7.35)); эволюция во времени выглядит как периодическая последовательность синхронных участков, разделенных 2π -проскоками фазы.

Описанная выше картина основана на предположении малости амплитуды ε . Ниже мы кратко обсудим, что меняется при средней и большой амплитуде силы; более детальный анализ будет дан в разделе 7.3.

Средняя амплитуда силы

В этом случае качественные характеристики динамики не меняются: внутри области синхронизации наблюдается периодическое движение с периодом внешней силы, а вне этой области – квазипериодическое. Количественно поведение частоты биений на пороге синхронизации – корневая зависимость от параметров (7.35) – остается тем же, поскольку оно определяется типом бифуркации, а бифуркация и при средних амплитудах силы имеет тип седло–узел. Однако остальные характерные черты синхронизации меняются следующим образом.

- (i) Границы области синхронизации при средних ε – не прямые

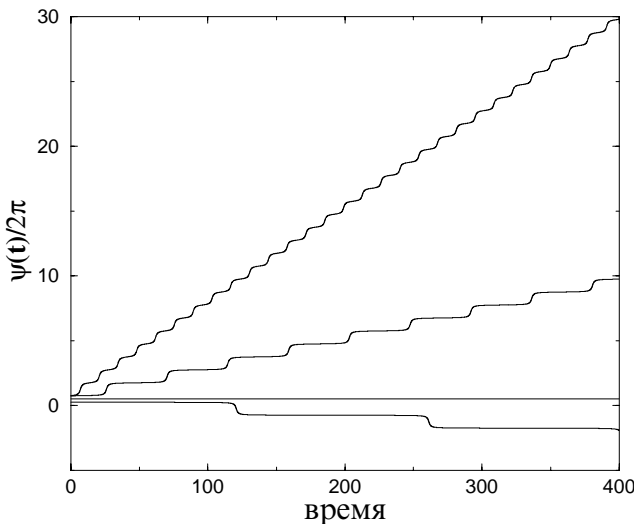


Рис. 7.5. Динамика фазы согласно (7.24) при $q(\psi) = \sin \psi$, $\varepsilon = 1$ (здесь параметр ε положен равным единице, а не малому значению, что соответствует изменению масштаба времени) и различных значениях расстройки: снизу $\nu = 1.001, 0, -1.01, -1.1$.

линии, а, вообще говоря, кривые. Если в разложении Фурье (7.18) резонансные члены отсутствуют, то они могут появиться в высших приближениях, т.е. как члены пропорциональные ε^2 , ε^3 , и т.д. В этих случаях ширина области синхронизации особенно мала при $\varepsilon \rightarrow 0$.

- (ii) В синхронном режиме разность фаз осциллятора ϕ и внешней силы более не является постоянной, как вытекает из (7.31), а становится периодической (с периодом внешней силы) функцией времени. Причиной тому нерезонансные члены в разложении (7.18).

Большая амплитуда силы

Здесь может меняться и качественная картина синхронизации. Переход к ней может происходить через другие бифуркации. Более того, могут наблюдаться сложные режимы, включая хаос – мы обсудим это в разделе 7.3.

Важно отметить, что, хотя мы и рассматривали случай малой силы, синхронизацию нельзя рассматривать в рамках *теории линейного отклика*. В самом деле, для физика, рассматривающего уравнение (7.5), естественно было бы попробовать применить метод возмущений и представить отклик в виде ряда по ε . Мы уже знаем ответ и можем сразу сказать, что этот подход будет работать только вне области синхронизации, где квазипериодическое движение можно примерно представить как комбинацию невозмущенных колебаний на частоте ω_0 и вынужденного решения с частотой ω . Внутри области синхронизации процесс имеет только частоту ω , так что, формально говоря, отклик на частоте воздействия имеет порядок $O(1)$ и его нельзя получить разложением по ε . Линейная или слабонелинейная теория возмущений не работает потому, что невозмущенные автоколебания в определенном смысле сингулярны, поскольку фаза нейтральна и может испытывать большие, порядка $O(1)$, отклонения при сколь угодно малой силе. Другим проявлением этой сингулярности служит довольно необычная для физики зависимость наблюдаемой частоты от расстройки: у нее есть идеальный горизонтальный участок с хорошо определенными конечными точками (рис. 7.4b). Во многих случаях, когда такие «ступеньки» встречаются в физических задачах, их можно объяснить проявлением синхронизации (см. обсуждение ступенек Шапиро в вольтамперной характеристике контактов Джозефсона в разделе 4.1.8).

7.2 Слабо нелинейные автоколебания

В предыдущем разделе мы использовали малость силы, чтобы получить уравнение для фазы. В общем случае внешнее воздействие влияет и на фазу, и на амплитуду, и последним эффектом пренебрегать нельзя. Во многих ситуациях, особенно когда амплитуды колебаний и силы велики, не остается ничего другого, как исследовать поведение системы численно. Здесь мы рассмотрим важный случай, когда свойства синхронизации могут быть в значительной степени исследованы аналитически: мы будем предполагать малость и силы, и амплитуды автоколебаний. Малость амплитуды будет пониматься в смысле близости автоколебаний к линейным колебаниям; безразмерным малым параметром служит отношение периода колебаний к характерному времени изменений амплитуды. Существование этого малого параметра позволяет описать задачу с помощью усредненных (по периоду колебаний) амплитудных уравнений, которые являются универсальными. Таким образом, анализ усредненных уравнений дает решение для целого класса слабонелинейных колебательных систем.

7.2.1 Амплитудное уравнение

Слабонелинейные системы подробно описаны в литературе (см., например, монографии [Боголюбов и Митропольский 1961; Minorsky 1962; Хаяси 1964; Найфэ 1979; Glendinning 1994]). Не входя в технические детали, мы дадим схему вывода амплитудных уравнений. Излагаемый метод применим к слабонелинейным колебаниям, т.е. к системам, которые можно представить как слабо возмущенный (членами в правой части) линейный осциллятор с частотой ω_0 :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}) + \varepsilon p(t). \quad (7.36)$$

Это не самая общая форма возмущения, мы предполагаем, что оно состоит из двух частей: нелинейная функция $f(x, \dot{x})$ описывает автономный осциллятор, а периодическая функция времени $p(t) = p(t + T)$ – внешнюю силу с частотой $\omega = 2\pi/T$. Мы записали внешнюю силу как член, пропорциональный малому параметру ε . Член f также должен быть мал; условие этого будет дано позже.

Поскольку (7.36) близко к уравнению линейного осциллятора, можно ожидать, что решение близко к синусоидальному с пока неизвестной амплитудой, частотой и фазой. Все эти величины должны быть в конце концов определены, но на этой стадии можно выбрать

любое представление решения, и первым важным шагом является выбор наиболее подходящего. Поскольку мы ожидаем, что частота колебаний может совпадать (по крайней мере, при некоторых значениях параметров) с частотой внешней силы ω , будем искать решение в следующем комплексном виде

$$x(t) = \frac{1}{2}(A(t)e^{i\omega t} + c.c.), \quad (7.37)$$

т.е. в виде гармонических колебаний с «базовой» частотой ω и зависящей от времени комплексной амплитудой $A(t)$. Отметим, что при этом никаких ограничений на $x(t)$ не накладывается, поскольку наблюдаемая частота может отличаться от ω , если амплитуда A вращается на комплексной плоскости.

Удобно представить уравнение (7.36) в виде линейного осциллятора с частотой ω , вводя дополнительное слагаемое в правой части:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - \omega_0^2)x + f(x, \dot{x}) + \varepsilon p(t). \quad (7.38)$$

Это слагаемое должно быть также мало, т.е. наше рассмотрение ограничивается диапазоном малых расстройок $\omega - \omega_0$.

Переписывая (7.38) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x + (\omega^2 - \omega_0^2)x + f(x, y) + \varepsilon p(t) \end{aligned}$$

и вводя следующее соотношение⁶ между y и A

$$y = \frac{1}{2}(i\omega A(t)e^{i\omega t} + c.c.), \quad (7.39)$$

получим, разрешая (7.37) и (7.39), следующее уравнение для комплексной амплитуды

$$\dot{A} = \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \cdot [(\omega^2 - \omega_0^2)x + f(x, y) + \varepsilon p(t)]. \quad (7.40)$$

Усреднение амплитудного уравнения

До сих пор все преобразования были точными, но новое уравнение ничуть не проще для решения, чем исходное (7.36). Используем теперь малость параметров и найдем аналитически разрешимое приближенное уравнение для A . Этот переход можно совершить математически строго (различные варианты известны как асимптотический метод [Боголюбов и Митропольский 1961], метод усреднения [Найфэ

⁶ Поскольку новая переменная A комплексна, для однозначного ее определения нужно еще одно соотношение между (x, y) и A .

1979], метод многих масштабов [Kahn 1990]), здесь мы изложим только основную идею. Поскольку правая часть (7.40) мала, изменения A могут быть либо медленными, если они велики, либо малыми, если они быстрые, например с частотой порядка ω . Ограничимся рассмотрением больших медленных изменений, то есть пренебрежем всеми быстрыми членами в правой части (7.40). Пренебрежение членами с быстрыми колебаниями ($e^{\pm i\omega t}$, $e^{\pm i2\omega t}$, и т.д.) можно рассматривать как усреднение по периоду колебаний $T = 2\pi/\omega$; поэтому этот метод называют методом усреднения. Усреднение проводится очень просто: нужно подставить x и y , выраженные через A , в (7.40) и пренебречь всеми осциллирующими членами. В каждом конкретном случае для заданных f и p это можно сделать явно. Мы же хотим показать, что результат получается универсальным для большого класса систем. Отметим прежде всего, что усреднение слагаемого

$$\frac{e^{-i\omega t} \varepsilon p(t)}{i\omega}$$

означает взятие первой Фурье-гармоники периодической функции $p(t)$, в общем случае она не равна нулю и этот член дает комплексную постоянную $-i\varepsilon E$.

Далее, рассмотрим вклад функции f :

$$\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} f(x, y).$$

Пусть f – полином по x, y , тогда мы имеем полином по $Ae^{i\omega t}$, $A^*e^{-i\omega t}$. Из всех степеней вида $(Ae^{i\omega t})^n (A^*e^{-i\omega t})^m$ после умножения на $e^{-i\omega t}$ и усреднения остаются только члены с $m = n - 1$. Поэтому в результате усреднения могут возникнуть только слагаемые вида $g(|A|^2) \cdot A$, где g – произвольная функция. При малых амплитудах колебаний важны только линейные ($\propto A$) и первые нелинейные ($\propto |A|^2 A$) слагаемые.

Наконец, усреднение первого члена в правой части (7.40) приводит к линейному по A слагаемому. Собирая вместе все члены, получаем амплитудное уравнение в виде

$$\dot{A} = -i \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} A + \mu A - (\gamma + i\kappa) |A|^2 A - i\varepsilon E. \quad (7.41)$$

Здесь мы полагаем параметр μ действительным, так как мнимая часть может быть объединена с первым членом в правой части. Например, для уравнения Ван-дер-Поля (7.2) получаем уравнение (7.41) с $\kappa = 0$ и $\gamma = \mu\beta/4$.

Новые параметры имеют ясный физический смысл. Параметры μ и γ описывают линейный рост и нелинейное ограничение колебаний. Чтобы автоколебания были устойчивыми, необходим рост при малых амплитудах и затухание при больших, что соответствует $\mu > 0$, $\gamma > 0$. Параметр κ описывает нелинейную зависимость частоты колебаний от амплитуды, он может быть как положительным, так и отрицательным, и обращается в нуль в изохронном случае (см. обсуждение в разделе 7.1.3).

Вернемся теперь к условию применимости метода усреднения. Для (7.41) необходима малость всех членов в правой части. Это будет выполняться, если расстройка $|\omega - \omega_0|$ и линейный инкремент μ малы по сравнению с частотой ω_0 . В результате и нелинейный член в правой части будет мал, поскольку амплитуда невозмущенных автоколебаний есть $|A_0|^2 = \mu/\gamma$, и поэтому нелинейный член – того же порядка, что и линейный член μA . Малость параметра μ означает, что неустойчивость состояния равновесия $A = 0$ слабая. Обычно это так вблизи точки бифуркации возникновения предельного цикла. Поэтому амплитудное уравнение (7.41) является универсальным уравнением (нормальной формой) вынужденных колебаний вблизи бифуркации Хопфа.

Выбирая соответствующим образом масштабы для амплитуды A и времени, можно уменьшить число параметров в (7.41). Какие из них должны остаться в результате преобразования, зависит от физической постановки задачи. Поскольку в задаче о синхронизации важна зависимость от параметров внешней силы, удобно при нормировке избавиться от параметров осциллятора. Вводя новую амплитуду и новое время согласно

$$A = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}} a, \quad t = \mu^{-1} \tau, \quad (7.42)$$

получим

$$\dot{a} = -i\nu a + a - |a|^2 a - i\alpha |a|^2 a - ie, \quad (7.43)$$

где

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega\mu} \approx (\omega - \omega_0)/\mu, \\ \alpha &= \kappa/\gamma, \quad e = \varepsilon E \gamma^{1/2} \mu^{-3/2}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Отметим нетривиальную зависимость от параметров ε (амплитуды внешней силы) и μ (квадрат амплитуды свободных автоколебаний): они появляются в «эффективной» амплитуде силы e в комбинации

$\varepsilon\mu^{-3/2}$. Ниже мы будем выделять режимы слабого ($e \lesssim 1$) и сильного ($e \gtrsim 1$) воздействия; в исходных переменных это соответствует $\varepsilon \lesssim \mu^{3/2}$ и $\varepsilon \gtrsim \mu^{3/2}$.

Прежде чем приступить к исследованию (7.43), опишем вкратце, что происходит в отсутствие силы, $e = 0$. При этом задача сводится к уравнению (7.6). В начале координат $a = 0$ находится неустойчивое состояние равновесия, а устойчивый предельный цикл $a = e^{-i(\nu-\alpha)t}$ имеет амплитуду 1 и частоту $|\nu - \alpha|$.⁷ Из общего решения (7.9) можно видеть, что угловая частота зависит от амплитуды, если $\alpha \neq 0$, и не зависит при $\alpha = 0$. Эти две ситуации мы будем называть неизохронным и изохронным случаями.

7.2.2 Свойства синхронизации: изохронный случай

Рассмотрим случай изохронных автоколебаний, т.е. положим $\alpha = 0$:

$$\dot{a} = -iva + a - |a|^2 a - ie. \tag{7.45}$$

Прежде чем исследовать уравнение (7.45), обсудим смысл различных решений в терминах исходных переменных $x \propto \text{Re}(a(t)e^{i\omega t})$, $y \propto \text{Im}(a(t)e^{i\omega t})$. Стационарному состоянию a отвечают гармонические колебания x, y с частотой ω . Это режим идеальной синхронизации (захвата фазы): в системе происходят только колебания с частотой внешней силы. Если решение $a(t)$ периодически зависит от времени, то в исходных переменных движение квазипериодическое с двумя независимыми частотами: одна – частота внешней силы, другая – частота периодического решения уравнения (7.45). Отметим, что последняя может зависеть от параметров системы.

Подчеркнем, что наличие второй (в дополнение к ω) частоты не обязательно означает десинхронизацию. Действительно, если записать $a(t) = R(t)e^{i\psi(t)}$ и $x(t) = \text{Re}(R(t)e^{i(\psi(t)+\omega t)})$, то наблюдаемую частоту колебаний можно представить в виде

$$\Omega = \langle \dot{\psi} \rangle + \omega. \tag{7.46}$$

(Отметим, что ψ есть правильная разность между фазами осциллятора и внешней силы, ср. с (7.22).) Член $\langle \dot{\psi} \rangle$ зависит от поведения траектории системы на фазовой плоскости ($\text{Re}(a), \text{Im}(a)$). Если она вращается вокруг начала координат, то $\langle \dot{\psi} \rangle \neq 0$, в противном же случае изменения ψ приводят только к модуляции колебаний, но не

⁷ Получается, что эта частота зависит от расстройки ν даже в отсутствие силы: это связано с тем, что мы выбрали систему отсчета (7.37).

к изменению частоты. Кроме того, отметим, что (7.45) инвариантно по отношению к замене $\nu \rightarrow -\nu$, $e \rightarrow -e$, $a \rightarrow a^*$ и $e \rightarrow -e$, $a \rightarrow -a$, так что достаточно рассмотреть только область $\nu > 0$, $e > 0$.

Исследования уравнения (7.45) имеют долгую историю (см., например, [Appleton 1922; van der Pol 1927]), но полная картина была установлена только недавно Холмсом и Рэндом [Holmes and Rand 1978] (см. также [Argyris *et al.* 1994]). Здесь мы опишем только основные эффекты, отсылая за подробностями к цитированным работам.

Примерная бифуркационная диаграмма уравнения (7.45) показана на рис. 7.6. Начнем с нахождения стационарных решений (состояний равновесия). Полагая $\dot{a} = 0$, получим кубическое уравнение для квадрата амплитуды $R^2 = |a|^2$:

$$R^2(1 - R^2)^2 + \nu^2 R^2 = e^2.$$

Это уравнение имеет три действительных корня, если

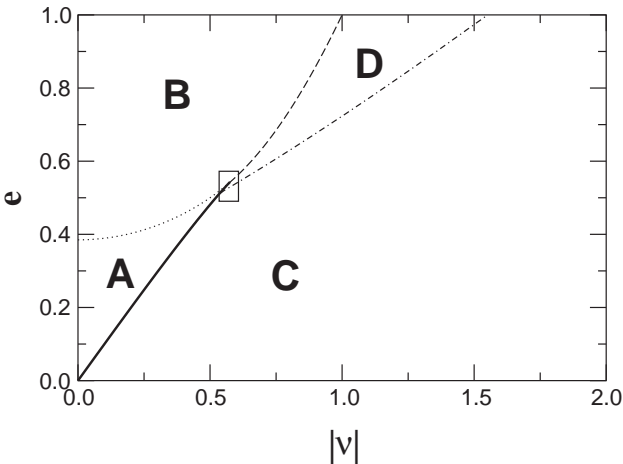


Рис. 7.6. Бифуркационная диаграмма изохронных автоколебаний под внешним воздействием (7.45), в зависимости от расстройки ν и (перенормированной) амплитуды силы e . В областях A и B есть устойчивая точка, соответствующая устойчивому синхронизованному состоянию (в A дополнительно есть пара неустойчивых точек). В областях C и D есть неустойчивая точка и предельный цикл; различие C и D обсуждается в тексте и на рис. 7.9. Переход от A к C осуществляется через бифуркацию седло-узел (жирная кривая) и показан на рис. 7.7 и 7.8. Переход $B \rightarrow D \rightarrow C$ показан на рис. 7.9 и 7.10. Линия бифуркации Хопфа ($B \rightarrow D$) показана штриховой линией; переход от захвата частоты к несинхронному состоянию ($D \rightarrow C$) показан штрихпунктирной линией. В области, обозначенной прямоугольником, наблюдаются сложные бифуркации. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

$$9\nu^2 + 1 - (1 - 3\nu^2)^{3/2} < \frac{27e^2}{2} < 9\nu^2 + 1 + (1 - 3\nu^2)^{3/2},$$

и один действительный корень, если эти неравенства не выполнены. Поэтому в (7.45) может быть либо три, либо одно состояние равновесия. Область с тремя решениями обозначена на рис. 7.6 *A*. В областях *B*, *C* и *D* есть только одно состояние равновесия.

Устойчивость состояния равновесия определяется с помощью линеаризации (7.45), что приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + (4R^2 - 2)\lambda + (1 - 3R^2)(1 - R^2) + \nu^2 = 0.$$

Видно, что устойчивость зависит от значения амплитуды *R*, и в зависимости от параметров возможны разные типы состояний равновесия (устойчивый и неустойчивый узел, седло, фокус). Наиболее важна бифуркация Хопфа при $4R^2 - 2 = 0$, ей соответствует гипербола

$$e^2 = \nu^2/2 + \frac{1}{8},$$

разделяющая области *B* и *D* на рис. 7.6.

Уже эти соотношения позволяют нарисовать «огрубленную» картину переходов.⁸ В областях *A* и *B* единственным устойчивым решением является состояние равновесия; это области идеальной синхронизации, при которой амплитуда колебаний постоянна, а фаза имеет постоянный сдвиг по отношению к фазе внешней силы (конечно, эти величины постоянны только в рамках принятого приближения). В областях *C* и *D* глобальным аттрактором (7.45) является предельный цикл; здесь вынужденные автоколебания квазипериодические.

Полезно посмотреть, как синхронизация возникает/исчезает при изменении параметров e, ν .⁹ Из рис. 7.6 ясно, что эти бифуркации различны для малых и больших значений e ; мы обсудим эти два случая по отдельности.

Переход к синхронизации при малой амплитуде внешней силы

Зафиксировав параметр e при некотором малом значении ($\lesssim 0.5$) и изменяя $|\nu|$, мы можем проследить переход из области *A* в *C*. В области *A* есть три состояния равновесия: неустойчивый фокус,

⁸ Мы не будем описывать тонкую структуру бифуркаций вблизи точки $\nu = 0.6, e = 0.5$, см. детали в [Holmes and Rand 1978; Argyris *et al.* 1994].

⁹ Эти безразмерные параметры соотносятся с параметрами исходной системы (7.41) согласно (7.44).

устойчивый узел и седло. В момент бифуркации седло и узел сливаются и рождается устойчивый цикл, как показано на рис. 7.7 и 7.8. Свойства этого перехода практически не отличаются от полученных в фазовом приближении в разделе 7.1. Это не удивительно, ведь развитая в разделе 7.1 теория должна быть универсально справедлива при очень малой силе.

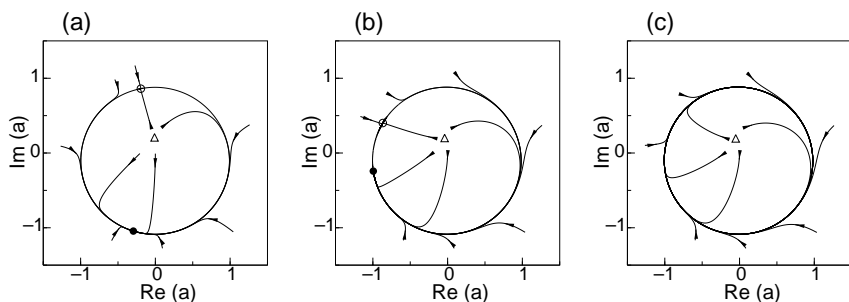


Рис. 7.7. Потеря синхронизации через бифуркацию седло–узел (переход $A \rightarrow C$ на диаграмме рис. 7.6). В центре области синхронизации реализуется ситуация с неустойчивым фокусом (треугольник), устойчивым (●) и неустойчивым (○) состояниями равновесия типа узел и седло (а). Устойчивая и неустойчивая точки подходят друг к другу при приближении к границе области (б). Вне области синхронизации появляется устойчивый цикл (с), рождающийся из инвариантной кривой, образованной неустойчивыми многообразиями седла. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

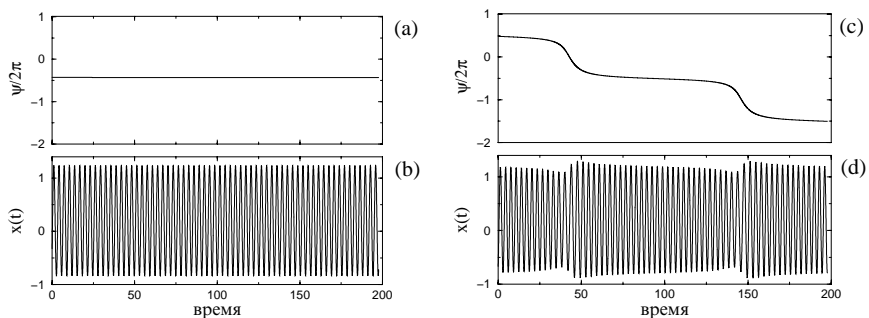


Рис. 7.8. Колебания в слабо нелинейной автоколебательной системе с внешней силой при малой амплитуде силы. Внутри области синхронизации (A на рис. 7.6) амплитуда и разность фаз постоянны (а, б). При потере синхронизации ($A \rightarrow C$ на рис. 7.6) разность фаз ψ вращается неравномерно, участки почти постоянной ψ перемежаются с 2π -проскоками (с); (d) амплитуда слегка модулирована. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

Переход к синхронизации при больших амплитудах внешней силы

Зафиксируем теперь параметр ϵ на большом уровне ($\gtrsim 0.5$) и будем менять ν . Первый переход $B \rightarrow D$ – это бифуркация Хопфа (рис. 7.9). В середине области синхронизации состояние равновесия имеет тип узел. При увеличении $|\nu|$ оно превращается в устойчивый фокус. Когда состояние равновесия теряет устойчивость, возникает устойчивый предельный цикл. Поначалу амплитуда цикла так мала, что изображающая точка при вращении не охватывает начало координат. Это означает, что процесс $x(t)$ модулирован по амплитуде и по фазе, но его частота остается такой же, как у внешней силы (см.

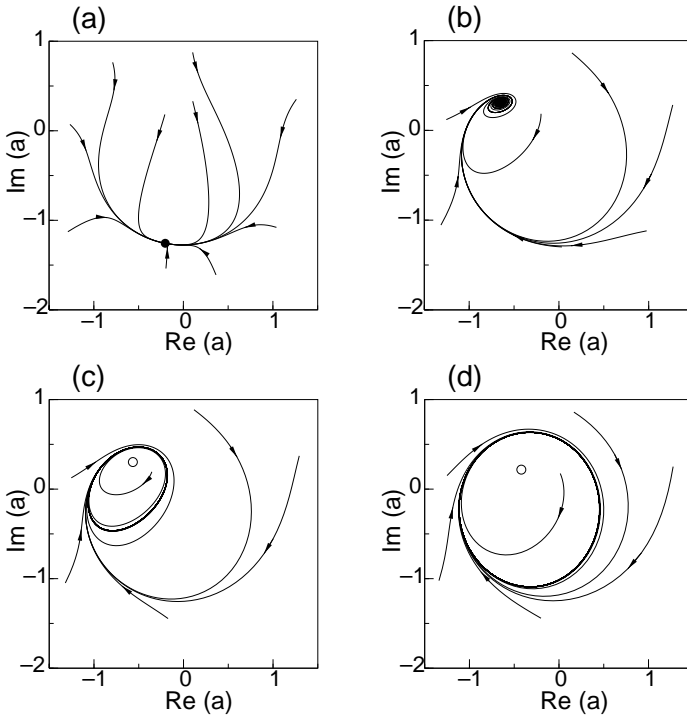


Рис. 7.9. Переход к синхронизации через бифуркацию Хопфа (путь $B \rightarrow D \rightarrow C$ на рис. 7.6). (а) Вблизи центра области синхронизации $\nu \approx 0$ все траектории притягиваются к устойчивому узлу. (б) Вблизи границы синхронизации состояние равновесия становится фокусом. (с) При бифуркации Хопфа в области D возникает предельный цикл, однако он не охватывает начало координат, и наблюдаемая частота по-прежнему совпадает с частотой внешней силы. (д) С ростом амплитуды цикла он охватывает начало координат, и синхронизация нарушается. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

рис. 7.10а). Разность фаз теперь не постоянна, но ее средний рост $\Omega_\psi = \langle \dot{\psi} \rangle$ в точности равен нулю. Ситуация меняется, когда цикл начинает охватывать начало координат (переход $D \rightarrow C$, рис. 7.10б). Теперь разность фаз ψ растет и наблюдаемая частота отличается от частоты воздействия.

Два описанных типа перехода можно физически интерпретировать следующим образом. При малой силе возмущается только фаза колебаний, а амплитуда меняется мало. Поэтому и в синхронном, и в асинхронном режиме амплитуда почти постоянна, и меняется только поведение фазы: вне области синхронизации разность фаз меняется, а внутри – нет. Поэтому переход к синхронизации естественно описывать как захват фазы.

Большая сила влияет как на фазу, так и на амплитуду, и в области синхронизации собственные автоколебания подавляются: наблюдаются только колебания с внешней частотой. При увеличении расстройки собственные колебания возникают сначала в форме малой модуляции вынужденного режима; они достигают амплитуды, сравнимой с вынужденными колебаниями, только при большой расстройке. Разница в свойствах перехода к синхронизации при малой и большой силе схематически изображена на рис. 7.11.

Режимы малой и большой силы легко различить экспериментально, по наблюдениям (или вычислениям) спектра мощности процесса (рис. 7.12 и 7.13). При синхронизации спектр мощности состоит из одного пика на частоте силы. При потере синхронизации возникают новые пики. При малой силе (рис. 7.12) эти новые компоненты

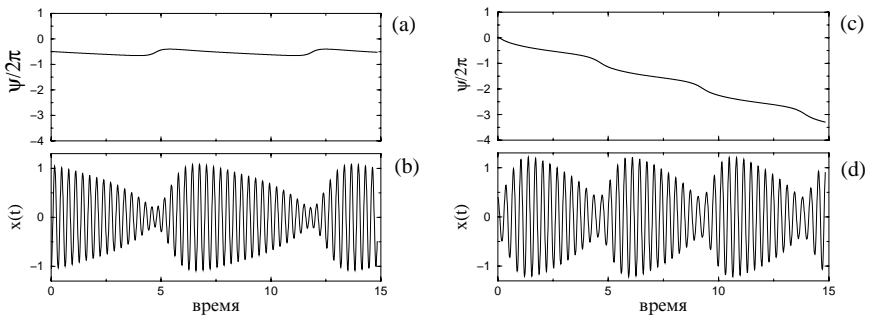


Рис. 7.10. Колебания при больших амплитудах силы. Внутри области синхронизации (D на рис. 7.6), но вблизи ее границы, разность фаз не постоянна, но ограничена (а); амплитуда также модулирована (б). После перехода (область C на рис. 7.6) разность фаз ψ растет неоднородно, но без «почти синхронных» участков (с); (ср. с рис. 7.8). Модуляция амплитуды довольно велика (d). Из [Pikovsky *et al.* 2000].

спектра имеют частоту очень близкую к частоте силы, поскольку вблизи бифуркации седло–узел период возникающего цикла стремится к бесконечности (ср. с (7.35)). При больших амплитудах силы (рис. 7.13) разность между частотой новой компоненты и частотой внешнего воздействия конечна.

7.2.3 Свойства синхронизации в случае неизохронных автоколебаний

Анализ бифуркаций в полном уравнении (7.43) довольно громоздок, он включает рассмотрение различных точек коразмерностей 2 и 3. Детальное описание приведено Левиной и Непомнящим [Levina and Nepomnyaschiy 1986] и Glendinning and Proctor [1993] (отметим, что в [Glendinning and Proctor 1993] используется отличная от нашей нормировка уравнения (7.43)). Из их анализа следует, что при малой неизохронности, $\alpha^2 < 1/3$, структура бифуркаций качественно такая же, как в изохронном случае, $\alpha = 0$; новые бифуркации наблюдаются только при больших значениях α . Мы опишем здесь только случай очень малой амплитуды внешней силы, когда справедливо

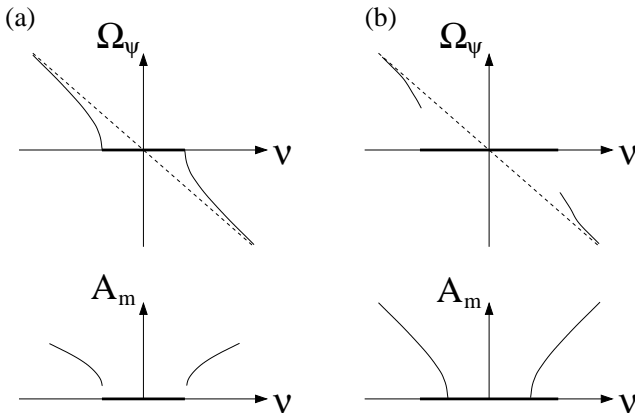


Рис. 7.11. Схематическое представление перехода к синхронизации при малой (а) и большой (б) амплитуде силы. Частота биений $\Omega_\psi = \langle \dot{\psi} \rangle$ и величина амплитудной модуляции A_m показаны в зависимости от расстройки ν . Область синхронизации показана жирной горизонтальной чертой. При слабой связи частота биений на пороге синхронизации растет по корневому закону (см. 7.35); амплитуда биений конечна и остается относительно малой. В противоположность этому, при большой силе частота биений при их появлении конечна, а модуляция амплитуды возрастает постепенно. Отметим, что модуляция есть уже в области синхронизации.

фазовое приближение, описанное в разделе 7.1. Вывод формул фазового приближения для уравнения (7.43) можно считать простым

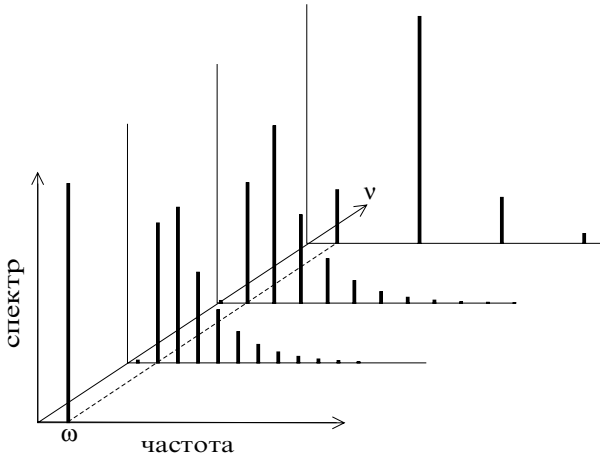


Рис. 7.12. Эволюция спектра при потере синхронизации при постоянной малой амплитуде силы и при изменении расстройки. В синхронном режиме в спектре присутствует только пик на частоте внешней силы ω . При переходе возникает новый пик (и его гармоники) с близкой частотой; при дальнейшем увеличении расстройки этот пик отходит от ω . Горизонтальная ось сдвинута (в частности, начало координат не соответствует нулевой частоте).

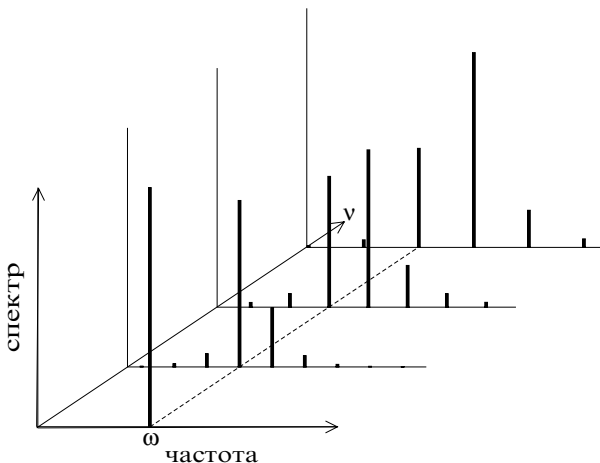


Рис. 7.13. Эволюция спектра при потере синхронизации при большой амплитуде силы при изменении расстройки. При переходе возникает новый пик на конечном расстоянии от основного на частоте ω ; с увеличением расстройки его высота растет, а высота пика на частоте ω уменьшается. Оси проведены так же, как на рис. 7.12.

упражнением, ср. с (7.16); получающееся уравнение для фазы имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= -\nu - \alpha - e(\cos \phi + \alpha \sin \phi) - \\ &= -\nu - \alpha - e\sqrt{1 + \alpha^2} \cos(\phi - \phi_0),\end{aligned}\quad (7.47)$$

где $\tan \phi_0 = \alpha$. Из этого уравнения следует область синхронизации

$$-\alpha - e\sqrt{1 + \alpha^2} < \nu < -\alpha + e\sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Мы видим, что синхронизация происходит вблизи собственной частоты предельного цикла, которая отличается от «линейной» частоты ω_0 (см. (7.36)). Собственная частота в исходных переменных равна $\omega_0 - \alpha\mu$, а в новых вращающихся координатах, в которых записано уравнение (7.43), она равна $-\alpha$. Другой интересной особенностью является то, что при неизохронных колебаниях область синхронизации больше, чем для изохронных. Это объясняется тем, что внешняя сила двояким образом воздействует на колебания. Во-первых, она действует на фазу непосредственно, и это влияние описывается α -независимым членом $e \cos \phi$ в уравнении (7.47). Во-вторых, сила меняет амплитуду, и эти изменения в силу неизохронности порождают сдвиг фазы; этот эффект описывается слагаемым, пропорциональным $e\alpha \sin \phi$ в уравнении (7.47). Эти два воздействия по разному зависят от ϕ , так что итоговый сдвиг фазы синхронизованных колебаний по отношению к фазе внешней силы зависит от параметра α .

7.3 Отображения окружности и кольца

В предыдущих разделах для описания внешнего воздействия на автоколебания использовались различные приближения. Здесь мы представим общий подход, не ограниченный малостью силы или слабой нелинейностью. Поэтому описание синхронизации будет общим, но качественным: оно не позволит, например, вычислить границы области синхронизации для данных уравнений.

Этот общий подход основан на построении **отображения кольца**, которое описывает динамику периодически возмущаемых автоколебаний в окрестности предельного цикла. Поскольку динамика в отсутствие силы известна, структура этого отображения может быть получена просто из соображений непрерывности. В некоторой области параметров, в частности при малой силе, отображение имеет

притягивающую инвариантную кривую, так что можно рассмотреть динамику на этой кривой и получить одномерное **отображение окружности**. Общие свойства отображения окружности подробно исследовались математиками, что привело к красивой и глубокой теории, имеющей большое значение и для других разделов нелинейной динамики (теория Колмогорова–Арнольда–Мозера, метод ренормализационной группы и т.д.). При большой силе инвариантная кривая разрушается, и нужно исследовать полное отображение кольца. Это разрушение обычно сопровождается появлением хаоса, но детальное рассмотрение таких режимов выходит за рамки данной книги.

В этом разделе мы опишем свойства отображения окружности, с акцентом на те, которые важны для явлений синхронизации. Затем на одном примере отображения кольца мы продемонстрируем связь между потерей синхронизации и возникновением хаоса при большой внешней силе.

7.3.1 Отображение окружности: вывод и примеры

В разделе 7.1 мы показали, что уравнения движения динамической системы с периодической силой общего вида (7.5) в окрестности предельного цикла могут быть сведены при малой амплитуде силы ε к фазовому уравнению (7.15)

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, t). \quad (7.48)$$

В отличие от предыдущего исследования, здесь мы будем изучать это уравнение без каких-либо дальнейших упрощений. Более того, мы не будем считать параметр ε малым, а будем рассматривать (7.48) в более общем контексте. Обоснование этому будет дано в разделе 7.3.3.

Правая часть (7.48) есть 2π -периодическая функция фазы ϕ и T -периодическая функция времени t . Поэтому фазовое пространство динамической системы (7.48) есть двумерный тор $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq t < T$. Эту двумерную систему с непрерывным временем можно свести к одномерному отображению. Такое сведение особенно просто для систем с явной периодической зависимостью от времени: можно использовать стробоскопическое отображение за временной интервал T . Фиксируя фазу внешней силы выбором $t = t_0$, можно определить взаимно-однозначное соответствие между точками $\phi(t_0)$ и $\phi(t_0 + T)$. Таким образом определяется гладкое инвертируемое *отображение окружности*:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \omega_0 T + \varepsilon F(\phi_n). \quad (7.49)$$

Здесь уместно сделать несколько замечаний.

- (i) Отображение называется отображением окружности, поскольку оно определено на окружности $0 \leq \phi < 2\pi$. Формально следует применять к правой части операцию взятия по модулю 2π , которую мы для простоты записи опустим.
- (ii) Отображение зависит от момента времени t_0 (т.е. от фазы внешней силы, выбранной для стробоскопического наблюдения процесса). В действительности это не важно: все отображения при разных t_0 эквивалентны, поскольку они гладко преобразуются друг в друга, $\phi(t_0) \rightarrow \phi(t'_0)$, решениями (7.48).
- (iii) Если $\varepsilon = 0$, то получается *поворот окружности*. Он описывает стробоскопическое наблюдение движения на предельном цикле. Динамика сдвига окружности, зависящая от параметра $\omega_0 T$, тривиальна. Если отношение T/T_0 рационально, т.е. $\omega_0 T = 2\pi p/q$, то каждая точка окружности периодична с периодом q . Если отношение T/T_0 иррационально, то получается квазипериодическое вращение на окружности. Отметим, что такое усложненное описание свободных периодических автоколебаний возникает из-за того, что система наблюдается стробоскопически с периодом T , который, вообще говоря, не связан с периодом колебаний T_0 . Поэтому стробоскопический подход хорош для различения несинхронных (квазипериодических) и синхронных (периодических с периодом силы и в рациональном соотношении с этим периодом) движений.
- (iv) Выбранная форма записи отображения окружности (7.49) не самая общая. Из (7.48) следует только, что отображение $\phi_{n+1} = \Phi(\phi_n)$ есть монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) + 2\pi$. В (7.49) мы разделили сдвиг и нелинейную функцию, чтобы подчеркнуть физический смысл параметров $\omega_0 T$ и ε : они соответствуют частоте и амплитуде внешней силы. Подобное разделение справедливо, строго говоря, только при малых ε , в противном случае и сдвиг и нелинейный член зависят и от амплитуды, и от частоты силы. Точное соотношение может быть установлено в каждой конкретной задаче.

Прежде чем перейти к обсуждению свойств отображения окружности, приведем простой пример, в котором оно может быть выписано явно. Кроме того, этот пример проиллюстрирует вторую возможность построения отображения окружности: не фаза колебаний наблюдается стробоскопически, а фаза внешней силы берется при определенной фазе колебаний (для исходной динамической системы это отвечает другому способу построения отображения Пуанкаре на торе).

Пример: релаксационный осциллятор «накопление – сброс»

Популярной моделью релаксационных автоколебаний служит система типа накопление – сброс. Она описывается скалярной переменной $x(t)$, динамика которой состоит из двух компонент:

- (i) накопление: x растет во времени линейно $x = (t - t_n)/T_0$, где t_n время предыдущего сброса;
- (ii) сброс: когда x достигает порога $x_{\text{up}} = 1$, значение x мгновенно уменьшается до $x_{\text{down}} = 0$.

Отметим, что мы используем безразмерные переменные, и период колебаний равен T_0 . Эту модель легко обобщить и на случай нелинейного роста x (см., например, [Mirollo and Strogatz 1990b]).

Следует также заметить, что для этой системы мы не пишем уравнения движения типа (7.5). Действительно, такие уравнения должны быть, по крайней мере, двумерными, описывающими как медленное движение (накопление), так и быстрое (сброс). Вообще говоря, это можно сделать с уравнениями (7.5) с большим параметром, равным отношению двух временных масштабов. Упрощенное описание, приведенное выше, справедливо, строго говоря, если этот параметр стремится к бесконечности, и движение в фазовом пространстве сосредотачивается на медленном многообразии (плюс скачки). Такой квазиодномерный характер динамики позволяет свести ее к одномерному отображению окружности без каких-либо приближений.

Воздействовать на релаксационные колебания можно по-разному, см рис. 7.14.

- (i) **Изменение нижнего порога.** Значение x_{down} есть периодическая функция времени, например, $x_{\text{down}} = \varepsilon \sin \omega t$, см. рис. 7.14b. Обозначим время n -го сброса через t_n . Тогда момент следующего сброса вычисляется согласно $t_{n+1} = t_n + T_0 - \varepsilon T_0 \sin \omega t_n$. Вводя фазу внешней силы $\phi^{(e)} = \omega t$, получаем отображение окружности $0 \leq \phi^{(e)} < 2\pi$:

$$\phi_{n+1}^{(e)} = \phi_n^{(e)} + \omega T_0 - \varepsilon \omega T_0 \sin \phi_n^{(e)}. \quad (7.50)$$

- (ii) **Изменение верхнего порога.** Если значение x_{up} меняется по закону $x_{\text{up}} = 1 + \varepsilon \sin \omega t$ (см. рис. 7.14c), то времена n -го и $(n+1)$ -го сброса связаны соотношением $t_{n+1} = t_n + T_0 + \varepsilon T_0 \sin \omega t_{n+1}$. К сожалению, это соотношение неявно по отношению к t_{n+1} . При малых ε мы можем приблизительно разрешить его, $t_{n+1} = t_n + T_0 + \varepsilon T_0 \sin \omega (t_n + T_0)$, что дает (7.50). Однако при больших ε соотношение между t_{n+1} и t_n становится разрывным.
- (iii) **Импульсное воздействие.** Если осциллятор типа накопление – сброс находится под воздействием другого подобного осциллятора, то сила имеет вид периодической (с периодом T) последовательности импульсов. Пусть амплитуда каждого импульса равна ε , тогда состояние после импульса есть $x + \varepsilon$. Здесь возможны два случая: если $x + \varepsilon < x_{\text{up}}$, то накопление продолжается; если $x + \varepsilon > x_{\text{up}}$, то происходит сброс и переменная x принимает значение x_{down} , см. рис. 7.14d. Обозначим интервал времени между внешним импульсом и следующим сбросом через τ_n . Тогда для τ_{n+1} получим разрывное не взаимно-однозначное отображение окружности

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 - \left\{ \frac{T - \tau_n}{T_0} \right\} < \varepsilon, \\ T_0(1 - \varepsilon) - T + \tau_n & \text{при } 1 - \left\{ \frac{T - \tau_n}{T_0} \right\} \geq \varepsilon, \end{cases}$$

где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа.

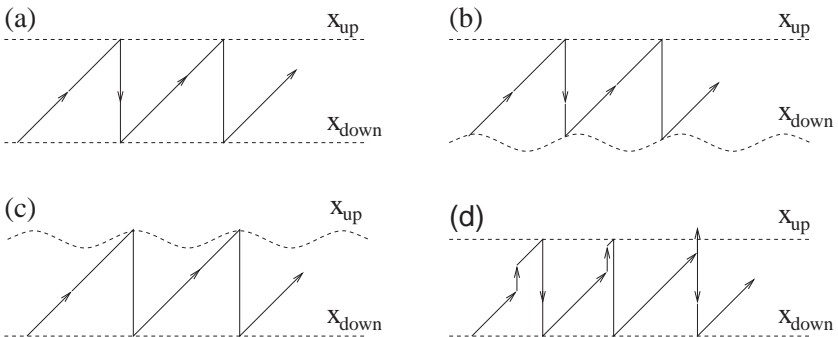


Рис. 7.14. Различные способы воздействия на релаксационные колебания. (a) Колебания в автономном осцилляторе периодические. (b) Изменение нижнего порога. (c) Изменение верхнего порога. (d) Воздействие периодической последовательностью импульсов.

Мы видим, что в зависимости от формы воздействия возможны разные типы отображения окружности. Наиболее часто рассматривается гладкое отображение окружности типа (7.50), ниже мы в основном будем ограничиваться этим случаем.

7.3.2 Свойства отображения окружности

Отображение окружности является одной из основных моделей нелинейной динамики, оно описывается в большинстве книг по нелинейным явлениям, включая математические [Каток и Хассельблат 1999] и физические [Ott 1992; Argyris *et al.* 1994; Шустер 1988; Кузнецов 2001]. Здесь мы коснемся некоторых аспектов теории, акцентируя внимание на свойствах, имеющих отношение к проблеме синхронизации. В качестве основного примера для иллюстрации этих свойств мы будем использовать отображение с синусоидальной нелинейностью

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \eta + \varepsilon \sin \phi_n. \quad (7.51)$$

Это отображение зависит от двух параметров, физический смысл которых вытекает непосредственно из (7.49). Параметр $\eta = \omega_0 T = 2\pi T/T_0$ пропорционален отношению периодов силы и автоколебаний. Он меняется с частотой силы. Параметр ε пропорционален амплитуде внешней силы. При $\varepsilon = 0$ происходит линейное вращение (поворот окружности), и ε определяет уровень нелинейности¹⁰ в отображении (7.51). Нашей целью является описание динамики (7.51) на плоскости параметров (η, ε) ; мы сделаем это в форме следующих утверждений.

1. Поскольку мы рассматриваем фазу по модулю 2π , т.е. на окружности $0 \leq \phi < 2\pi$, она не меняется, если к параметру η добавить $\pm 2\pi$. Это означает, что диаграмма режимов периодична по η с периодом 2π . Поэтому в литературе обычно рассматривается интервал значений $0 \leq \eta < 2\pi$. Для наших же целей более важен случай резонанса $\eta \approx 2\pi$ (что означает $T \approx T_0$). Отметим также, что $2\pi(\eta - 1) = 2\pi(T - T_0)/T_0$ эквивалентно параметру ν , характеризующему расстройку (см. выше (7.23)).
2. Отображение (7.51) обратимо при $|\varepsilon| \leq 1$ и необратимо при $|\varepsilon| > 1$. (В общем случае (7.49) обратимость нарушается, если

¹⁰ Строго говоря, исходные автоколебания нелинейны и при $\varepsilon = 0$, но в контексте отображения окружности удобно считать автономный случай линейным. Это есть следствие линейности фазового уравнения (7.3).

$\varepsilon F'(\phi) = -1$ при некотором ϕ .) Линия $\varepsilon = 1$ называется критической: выше нее возможен хаос. В окрестности критической линии отображение окружности уже не описывает настоящую динамику исходной системы (7.5), здесь нужно рассматривать полное M -мерное отображение кольца. Мы обсудим границы применимости отображения окружности в разделе 7.3.4. Здесь же мы будем полагать $\varepsilon < 1$.

3. При $\varepsilon = 0$ динамика (7.51) сводится к тривиальному повороту окружности, он периодический или квазипериодический в зависимости от того, рационален или иррационален параметр $\eta/2\pi$. При $\varepsilon > 0$ динамику можно характеризовать одним параметром, называемым *числом вращения*. При заданной начальной точке ϕ_0 число вращения определяется как средний поворот фазы за одну итерацию:

$$\rho(\phi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_n - \phi_0}{2\pi n}. \tag{7.52}$$

Известно (см., например, [Каток и Хассельблат 1999]), что число вращения не зависит от начальной точки ϕ_0 и одно и то же для итераций вперед ($n \rightarrow \infty$) и назад ($n \rightarrow -\infty$) во времени. Это следует просто из монотонности отображения: итерации разных точек не могут отличаться более, чем на 2π , так что ρ не зависит от ϕ_0 . Поэтому ρ зависит только от параметров отображения окружности. Ясно, что при $\varepsilon = 0$ число вращения есть $\rho = \eta/2\pi$.

Возможны только два типа движений: с рациональным и иррациональным числом вращения. Прежде чем углубляться в детали, обсудим интерпретацию числа вращения в терминах колебаний исходной системы (7.5). Поскольку n измеряет время в единицах внешнего периода T , число вращения можно переписать как

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T(\phi(t) - \phi(0))}{2\pi t} = \frac{\Omega}{\omega}, \tag{7.53}$$

где мы ввели наблюдаемую частоту Ω как среднюю скорость вращения фазы

$$\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t}.$$

Соотношение (7.53) показывает, что число вращения есть отношение наблюдаемой частоты колебаний к частоте внешней силы. (Отметим, что, если отображение окружности записано для

фазы внешней силы, как это было сделано для релаксационного осциллятора, то отношение должно быть обращено.)

4. Иррациональному числу вращения отвечает квазипериодическая динамика фазы. В соответствии с теоремой Данжуа [Denjoy 1932; Каток и Хассельблат 1999], при иррациональном числе вращения ρ нелинейное отображение окружности (7.51) можно с помощью подходящей замены переменной $\phi = g(\theta)$ (с очевидным свойством $g(\theta + 2\pi) = 2\pi + g(\theta)$) привести к сдвигу окружности

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\rho. \quad (7.54)$$

Решение (7.54) тривиально, так что траектория исходного отображения окружности задается формулой

$$\phi_n = g(\theta_0 + n2\pi\rho). \quad (7.55)$$

Произвольная 2π -периодическая функция от ϕ (например, любая из переменных x_k исходной системы) есть квазипериодическая функция дискретного времени n .

В соответствии с (7.53) иррациональное значение ρ означает, что наблюдаемая частота и частота силы несоизмеримы, они и являются базовыми частотами квазипериодического движения.

5. Если отображение окружности имеет периодическую траекторию, то число вращения рационально. В самом деле, на самой этой траектории число вращения очевидным образом рационально и не зависит от начальных условий. При линейном вращении, $\varepsilon = 0$, периодичны все точки на окружности, но в нелинейном случае, $\varepsilon \neq 0$, это вырождение снимается. В общем случае периодические точки нелинейного отображения изолированы. Если период такой точки равен q , и за q итераций фаза ϕ делает p оборотов (так что $\phi_{n+q} = \phi_n + 2\pi p$), то число вращения есть $\rho = p/q$.

Рассмотрим теперь периодические точки, начиная с единичного периода, т.е. с неподвижных точек. Они соответствуют основному резонансу $T \approx T_0$, поэтому положим $\rho = 1$ и будем искать траекторию с $q = p = 1$. Такая траектория должна удовлетворять соотношению

$$\phi + 2\pi = \phi + \omega_0 T + \varepsilon F(\phi),$$

она есть решение уравнения

$$\omega_0 T - 2\pi + \varepsilon F(\phi) = 0.$$

Решение существует, если

$$-\varepsilon F_{\min} \leq \omega_0 T - 2\pi \leq \varepsilon F_{\max}, \tag{7.56}$$

в этой области параметров есть, как минимум, два решения. Легко проверить, что одно из них устойчиво (с $d\phi_{n+1}/d\phi_n < 1$), а другое неустойчиво (с $d\phi_{n+1}/d\phi_n > 1$). Для общей функции F , имеющей более одного минимума и максимума, число решений с одним и тем же периодом может быть более двух, но они всегда появляются парами: устойчивое и неустойчивое. Подчеркнем, что соотношение (7.56) задает область синхронизации с числом вращения 1 на плоскости параметров (η, ε) (ср. с рис. 7.4а и 7.15).

6. Свойства периодических траекторий с большими периодами качественно такие же, как у неподвижной точки. Действительно, итерируя (7.49) q раз, получаем снова отображение окружности типа (7.49), с некоторой более сложной зависимостью от параметров η, ε . Неподвижная точка этого итерированного отображения, удовлетворяющая

$$\phi_q = \phi_0 + 2\pi p, \tag{7.57}$$

принадлежит периодической траектории отображения (7.49) с числом вращения $\rho = p/q$.

Область синхронизации, соответствующую числу вращения p/q , нетрудно найти в первом приближении по ε . Подставляя $\omega_0 T = 2\pi p/q + \varepsilon \kappa$ в (7.49) и сохраняя (при итерациях отображения) только члены порядка $O(\varepsilon)$, получим

$$\phi_{n+q} = \phi_n + \varepsilon q \kappa + 2\pi p q \cdot \varepsilon \tilde{F}(\phi_n) \tag{7.58}$$

с нелинейной функцией

$$\tilde{F}(\phi_n) = \frac{F(\phi_n) + F(\phi_n + 2\pi \frac{p}{q}) + \dots + F(\phi_n + (q-1)2\pi \frac{p}{q})}{q}. \tag{7.59}$$

Если представить $F(\phi)$ в виде ряда Фурье

$$F(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\phi},$$

то функция \tilde{F} выражается в виде

$$\tilde{F}(\phi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{lq} e^{ilq\phi}, \quad (7.60)$$

т.е. она состоит только из гармоник $0, \pm q, \pm 2q, \dots$ исходной 2π -периодической функции F . Используя (7.58) и (7.57), получим область синхронизации (ср. с (7.56))

$$-\varepsilon \tilde{F}_{\min} < \omega_0 T - 2\pi \frac{p}{q} < \varepsilon \tilde{F}_{\max}. \quad (7.61)$$

Поскольку функция \tilde{F} получается из F эффективным усреднением (7.59), ее амплитуда уменьшается с q , и поэтому при больших q области синхронизации малы. Более того, как можно видеть из (7.60), если исходная нелинейная функция F не содержит гармоник $\pm lq$, то область синхронизации с числом вращения p/q в первом приближении по ε исчезает. Именно это имеет место для синус-отображения окружности (7.51). В этой ситуации нужно учитывать члены высших порядков, что приводит к следующей оценке ширины области синхронизации [Арнольд 1983]

$$\Delta\eta \sim \varepsilon^q. \quad (7.62)$$

7. Поскольку в отображении окружности возможны только два режима – периодический и квазипериодический, можно построить диаграмму режимов, как на рис. 7.15. Все области синхронизации имеют вид вертикальных языков [Арнольд 1961], называемых языками Арнольда. Острые языки с числом вращения

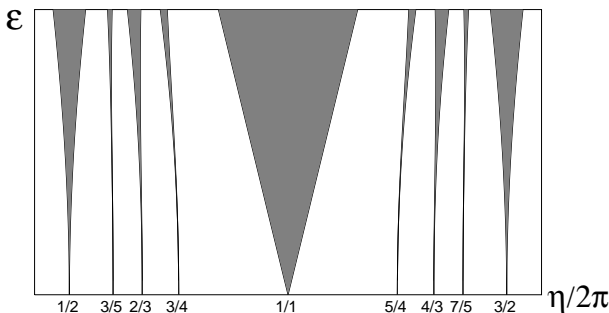


Рис. 7.15. Основные языки Арнольда в синус-отображении окружности (7.51). Острые языков с рациональными числами вращения касаются оси $\varepsilon = 0$ в рациональных точках $\eta/2\pi$. Отметим симметрию $\eta \rightarrow 2\pi - \eta$.

$\rho = p/q$ подходит к точке $\varepsilon = 0$, $\eta = 2\pi p/q$. Все пространство на плоскости параметров между языками соответствует квазипериодическим движениям с иррациональными числами вращения.

Языки Арнольда образуют вертикальные полосы на плоскости параметров, так что порядок рациональных чисел на линии $\varepsilon = 0$ распространяется на всю область $0 < \varepsilon < 1$. Это означает, что при каждом ε имеется упорядоченная последовательность интервалов синхронизации со всеми возможными рациональными числами вращения. В частности, эти интервалы всюду плотны: между любыми двумя квазипериодическими режимами с различными числами вращения есть область синхронизации.

С топологической точки зрения квазипериодические режимы неустойчивы, а синхронные устойчивы: при фиксированном ε и изменении η синхронные режимы наблюдаются на интервалах η , а квазипериодические – в отдельных точках. Это означает, что квазипериодическое движение можно разрушить сколь угодно малым возмущением. Однако с вероятностной точки зрения квазипериодические режимы преобладают,¹¹ поскольку, как было доказано Арнольдом [1961], при малых ε мера Лебега всех интервалов синхронизации стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$; это означает, что возмущения, разрушающие квазипериодичность, довольно маловероятны.

8. При фиксированной амплитуде ε число вращения ρ как функция параметра η принимает постоянные значения в каждой области синхронизации, т.е. эта функция принимает различные постоянные значения на плотном множестве подинтервалов. Эта функция также монотонна и непрерывна [Каток и Хассельблат 1999], она называется *чертовой лестницей* (рис. 7.16). Мера всех рациональных подинтервалов стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, но она равна полной мере на критической линии $\varepsilon = 1$. Чертова лестница с положительной мерой точек между интервалами постоянства называется неполной, а случай, когда мера всех интервалов постоянства полна (т.е. равна мере Лебега), называют полной чертовой лестницей. Множество канторовского типа всех иррациональных чисел вращения можно охарактеризовать его фрактальными размерностями, см. детали в работе [Jensen *et al.* 1983].

¹¹ Точно так же, как иррациональные числа преобладают среди действительных.

9. Переход к синхронизации и выход из нее осуществляются через бифуркацию седло–узел. Это тот же самый переход, что мы описывали в разделе 7.1.7, так что мы не будем повторять подробности. Основной результат (7.35) непосредственно применим к зависимости числа вращения от расстройки: вблизи границы области оно меняется по корневому закону

$$|\rho - \rho_0| \sim |\eta - \eta_c|^{1/2}. \quad (7.63)$$

Отметим, что зависимость (7.63) дает только «огibaющую» числа вращения, которое как функция η на самом деле состоит из бесконечного числа ступенек.

10. Все описанные выше результаты относились к взаимно-однозначным отображениям окружности. Как мы видели при описании релаксационных колебаний, в некоторых случаях отображение окружности необратимо и может иметь полки и разрывы. Некоторые свойства таких отображений такие же, как

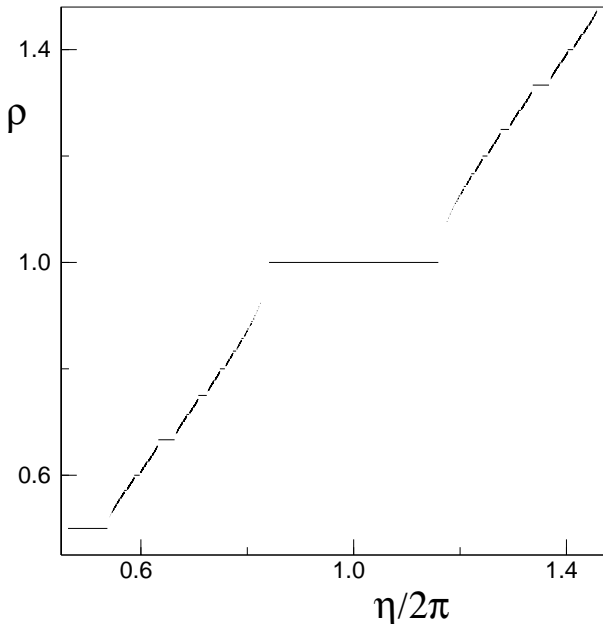


Рис. 7.16. Чертова лестница: зависимость числа вращения от параметра η для синус-отображения окружности (7.51) с $\varepsilon = 1$. Основные ступеньки соответствуют рациональным числам $1, 1/2, 2/3, \dots$. Не все рациональные числа показаны, поэтому области вблизи концов больших ступенек выглядят пустыми.

в гладком случае. Число вращения можно определить для монотонных отображений с разрывами, оно может быть либо рациональным, либо иррациональным. Основное отличие состоит в том, что теперь режимы с устойчивыми периодическими траекториями могут преобладать, например, в отображениях с конечными горизонтальными участками и без скачков квазипериодические режимы могут в принципе существовать, но они обычно занимают область нулевой меры в пространстве параметров [Boyd 1985; Veerman 1989]. Здесь переход к синхронизации происходит не через гладкую бифуркацию седло–узел, а может быть жестким.

11. Если на автоколебания действует квазипериодическая сила, то вместо (7.48) можно записать

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, \omega_1 t, \omega_2 t),$$

где $Q(\cdot, \cdot, \cdot)$ есть 2π -периодическая функция по каждому из аргументов. Теперь есть две внешние частоты ω_1, ω_2 , которые предполагаются несоизмеримыми. Это уравнение описывает движение на трехмерном торе, и в качестве отображения Пуанкаре получаем, вместо (7.51), отображение окружности с квазипериодической силой вида

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \eta + \varepsilon_1 \sin \phi_n + \varepsilon_2 \sin \left(2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} n + \alpha \right)$$

(см. детали в работах [Ding *et al.* 1989; Glendinning *et al.* 2000]). Как следует из теории [Herman 1983], число вращения (7.52) существует и для этого отображения. Процесс синхронизован, если

$$\rho = \frac{p_2 \omega_2}{q_2 \omega_1} + \frac{p_1}{q_1},$$

и несинхронизован в противном случае. В синхронизованном режиме наблюдаемая частота есть рациональная комбинация двух внешних частот; в несинхронизованном режиме наблюдается движение с тремя несоизмеримыми частотами. Квазипериодическую внешнюю силу можно также рассматривать в контексте слабонелинейных автоколебаний (см. детали в работах [Ланда и Таранкова 1976; Ланда 1980, 1996]).

Теория отображения окружности непосредственно применима к описанию синхронизации автоколебаний внешней силой. Прежде

всего, она дает полную качественную картину динамики при малой и средней силе. Основной результат (по сравнению с теорией разделов 7.1 и 7.2, где мы ограничивались первым приближением по амплитуде силы) состоит в том, что существует не только основная область синхронизации, где частота колебаний в точности равна частоте силы, но также и области синхронизации высших порядков вида

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{p}{q},$$

где наблюдаемая частота находится в рациональном отношении к частоте воздействия. Практически, при больших p и q область захвата фазы уменьшается, и даже в численных экспериментах удается наблюдать только синхронные состояния с малыми p и q .

7.3.3 Отображение кольца

В нашем выводе отображения окружности (раздел 7.3.1) мы использовали фазовое уравнение (7.48), справедливое только при малых ε . Здесь мы покажем, что отображение окружности имеет существенно бóльшую область применимости и правильно описывает ситуацию при средней и большой силе. Теперь мы не можем пренебрегать изменениями амплитуды (т.е. переменных, перпендикулярных к предельному циклу, см. раздел 7.1) в полной системе (7.5). Для простоты рассмотрения (и особенно графического представления) будем считать систему двумерной, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Тогда при стробоскопическом наблюдении с периодом силы получается двумерное отображение

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t + T).$$

Вблизи предельного цикла невозмущенной системы это отображение имеет простой вид: сжатие в поперечном направлении и поворот фазы согласно отображению окружности. Сжатие по амплитуде означает, что можно ограничиться полосой вокруг предельного цикла, т.е. рассматривать *отображение кольца*.

Динамика отображения окружности может быть периодической или квазипериодической, соответствующие два режима в отображении кольца показаны на рис. 7.17. В обоих случаях точки кольца притягиваются к замкнутой инвариантной кривой, выделенной жирным на рис. 7.17. При нулевой силе – это сам предельный цикл, при малой силе кривая слегка искажается, но остается инвариантной

(т.е. отображается в себя).¹² В квазипериодическом случае вращение точки по инвариантной кривой топологически эквивалентно повороту окружности: все траектории плотны и динамика эргодична. В периодическом случае на инвариантной кривой есть устойчивая и неустойчивая периодические траектории (на рис. 7.17 это неподвижные точки), и устойчивая орбита есть окончательный минимальный аттрактор. Инвариантная кривая образуется неустойчивыми многообразиями (сепаратрисами) неустойчивой периодической орбиты. Существование инвариантной кривой в стробоскопическом отображении кольца означает, что в фазовом пространстве исходной системы с непрерывным временем есть двумерная инвариантная поверхность, называемая инвариантным тором (поскольку динамика периодична по отношению к фазам системы и внешней силы).

Существование устойчивой (в поперечном направлении) инвариантной кривой есть условие справедливости отображения окружности. Действительно, асимптотически на больших временах важна только динамика на этой притягивающей кривой, и на ней как раз и получается отображение окружности в себя. При большой силе инвариантная кривая разрушается, но прежде чем перейти к описанию ее метаморфоз, приведем пример отображения кольца.

¹² Отметим, что инвариантность не означает квазипериодичность динамики. В квазипериодическом случае на кривой нет инвариантных подмножеств, в то время как в периодическом случае устойчивая и неустойчивая периодические траектории на кривой также инвариантны.

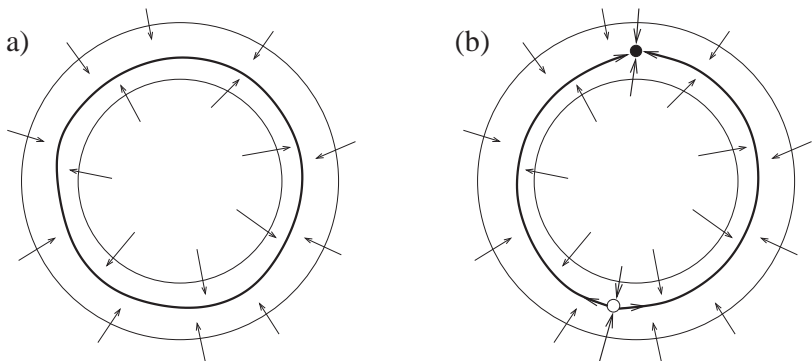


Рис. 7.17. Структура отображения кольца при квазипериодическом вращении (а) и при периодическом режиме (б). Стрелки показывают направление сжатия отображения (ср. с рис. 7.1); устойчивая и неустойчивая неподвижные точки показаны соответственно символами ● и ○.

Пример: автоколебания с импульсной силой

Один из простых способов аналитически получить стробоскопическое отображение кольца – это рассмотреть кусочно-решаемую модель. Можно приблизить силу кусочно-постоянными функциями, решить уравнения на каждом интервале постоянства и потом сшить решения. Мы рассмотрим один особенно простой случай, когда сила есть T -периодическая последовательность δ -импульсов:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (7.64)$$

Между импульсами мы имеем дело с автономными автоколебаниями, так что полная задача может быть разделена на две: решение автономных уравнений между импульсами и нахождение эффекта от δ -импульса. Обе задачи решаемы, если сила (7.64) действует на простой нелинейный осциллятор (7.6). Уравнение имеет вид

$$\frac{dA}{dt} = (1 + i\eta) - (1 + i\alpha)|A|^2 A + i\varepsilon p(t). \quad (7.65)$$

Здесь сила введена таким образом, что под ее воздействием меняется переменная $\text{Im}(A)$, а переменная $\text{Re}(A)$ не меняется: $\text{Im}(A_+) = \text{Im}(A_-) + \varepsilon$, $\text{Re}(A_+) = \text{Re}(A_-)$. Решение уравнения (7.65) между импульсами задается формулами (7.9) и эволюция за время T (начиная с точки θ_0, R_0) записывается в виде

$$R(T) = \left(1 + \frac{1 - R_0^2}{R_0^2} e^{-2T}\right)^{-1/2}, \quad (7.66)$$

$$\theta(T) = \theta_0 + (\eta - \alpha)T - \frac{\alpha}{2} \ln(R_0^2 + (1 - R_0^2)e^{-2T}).$$

Представляя изменение полярных координат R, θ во время импульса как

$$R_+ = \sqrt{R_-^2 + 2R_- \varepsilon \sin \phi_- + \varepsilon^2}, \quad (7.67)$$

$$\theta_+ = \tan^{-1} \left(\tan \theta_- + \frac{\varepsilon}{R_- \cos \theta_-} \right),$$

получим окончательное отображение. Формулы (7.66) и (7.67) можно еще упростить, если считать силу малой, $\varepsilon \ll 1$, так что и отклонения амплитуды R от единицы (амплитуды предельного цикла) тоже малы.

Обозначим переменные непосредственно перед n -м импульсом через R_n, ϕ_n . Тогда для переменных после импульса получим из (7.67)

$$R_+ \approx R_n + \varepsilon \sin \phi_n, \quad \phi_+ \approx \phi_n + \varepsilon \cos \phi_n.$$

Подставляя это выражение в решение (7.66) получаем отображение кольца (ср. с [Zaslavsky1978])

$$R_{n+1} = 1 + (R_n - 1 + \varepsilon \sin \phi_n)e^{-2T},$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + (\eta - \alpha)T + \varepsilon \cos \phi_n - \alpha(R_n - 1 + \varepsilon \sin \phi_n)(1 - e^{-2T}).$$

Если период силы велик, $T \gg 1$, то отображение кольца в направлении R — сильно сжимающее. Если пренебречь изменениями R , то получится отображение окружности:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + (\omega_0 - \alpha)T + \varepsilon \cos \phi_n - \alpha \varepsilon \sin \phi_n. \quad (7.68)$$

Отметим, что два нелинейных члена в (7.68) дают разный вклад в сдвиг фазы. Член $\varepsilon \cos \phi_n$ описывает непосредственное влияние силы на фазу, в то время как член $\alpha \varepsilon \sin \phi_n$ описывает амплитудные возмущения: сила меняет амплитуду, а из-за неизохронности колебаний возникает дополнительный сдвиг фазы, пропорциональный α (ср. с обсуждением в разделе 7.2.3).

7.3.4 Большая сила и переход к хаосу

Как мы видели, при малой силе динамика отображения кольца проста (фактически, она эквивалентна динамике отображения окружности): либо квазипериодическая с иррациональным числом вращения, либо синхронизованная с рациональным числом вращения. В обоих случаях есть притягивающая инвариантная кривая. При иррациональных числах вращения эта кривая заполняется траекториями и является эргодической; при рациональном числе вращения на кривой есть устойчивая (узел) и неустойчивая (седло) периодические орбиты (или несколько пар устойчивых и неустойчивых орбит), и кривая состоит из неустойчивых многообразий седла. Если сила мала, единственной возможностью выхода из синхронизации является бифуркация седло–узел.

При больших амплитудах силы возможны и другие сценарии выхода из синхронизации, в типичных случаях они приводят к хаотическим режимам. Эти переходы описаны в работах [Aronson *et al.* 1982; Афраймович и Шильников 1983], и мы отсылаем читателя к этим статьям за подробностями. Можно выделить три основных сценария перехода к хаосу.

Сценарий I

В первом сценарии переход к хаосу происходит через удвоения периода устойчивой периодической орбиты (рис. 7.18). Здесь странный аттрактор возникает непрерывным образом из устойчивого узла и он остается отделенным от седла. Движение становится хаотическим, но число вращения хорошо определено и остается рациональным, так что возникающий режим можно характеризовать как синхронный, но с хаотической модуляцией. Отметим, что в этом сценарии инвариантная кривая становится негладкой перед первым удвоением периода и не существует как гладкая кривая при следующих бифуркациях. Причина состоит в том, что при удвоении периода мультипликатор периодической орбиты должен быть равен -1 , а для этого он сначала должен стать комплексным. При этом узел превращается в фокус, и

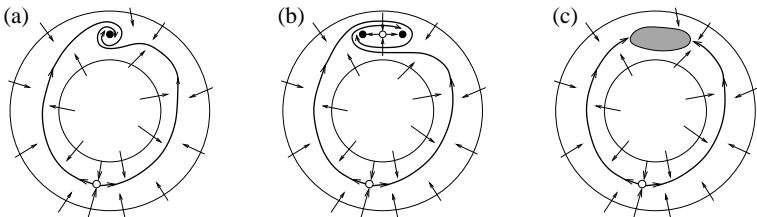


Рис. 7.18. Разрушение инвариантной кривой и переход к хаосу через удвоения периода (сценарий I). (a) Если собственные значения устойчивой неподвижной точки комплексны или отрицательны, то гладкой инвариантной кривой нет. (b) После первого удвоения неустойчивое многообразие седла наматывается на орбиту периода два. (c) После каскада удвоений периода возникает странный аттрактор. Число вращения при этом не меняется.

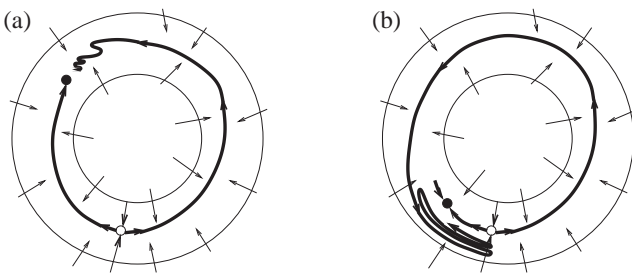


Рис. 7.19. Два других сценария разрушения инвариантной кривой. (a) сценарий II: неустойчивое многообразие седла делает складку и не образует гладкую кривую. (b) сценарий III: неустойчивое многообразие седла пересекает устойчивое, образуя гомоклиническую структуру. В противоположность сценарию II, здесь существует непритягивающее инвариантное хаотическое множество.

инвариантная кривая выглядит как на рис. 7.18а.

Сценарии II, III

При втором и третьем сценариях инвариантная кривая теряет гладкость и превращается в довольно сложное множество, как показано на рис. 7.19. Пока еще нет притягивающего хаоса, но существуют его предвестники, в частности области с локальной неустойчивостью траекторий. Эти области остаются переходными и сосуществуют с устойчивым узлом, но после бифуркации седло-узел они могут принадлежать аттрактору (если нет других устойчивых периодических орбит). Обычно при этом наблюдается переход к хаосу через перемежаемость. Картина динамики близка к показанной на рис. 7.5; она характеризуется длинными ламинарными синхронизованными участками и проскоками фазы; единственное отличие состоит в том, что интервалы между проскоками теперь хаотические.

Сценарий I типичен для середины области синхронизации, где устойчивая и неустойчивая орбиты отделены друг от друга. Здесь при увеличении амплитуды силы может осуществиться описанный переход к хаосу через удвоения периода. Сценарии II и III осуществляются на границах области синхронизации, обычно при изменении расстройки (как правило, сценарий II соответствует меньшим значениям амплитуды силы).

Кроме возможности хаотического поведения есть и другие черты, отличающие синхронизацию при больших амплитудах воздействия по сравнению с малыми. Во-первых, динамика не определяется однозначно числом вращения. Различные области синхронизации могут перекрываться, приводя к мультистабильности, так что при некоторых значениях параметров могут сосуществовать периодические движения с разными числами вращения (т.е. с разными отношениями наблюдаемой частоты и частоты силы). Это явление наблюдалось экспериментально Ван-дер-Полем и Ван-дер-Марком [van der Pol and van der Mark 1927], см. рис. 3.29.¹³ Другое свойство, иногда наблюдаемое при большой силе, заключается в возможности гладкого исчезновения области синхронизации без перехода к хаосу, подробнее см. [Aronson *et al.* 1986].

¹³ Интересно заметить, что пытаясь понять мультистабильность при синхронизации, Картв赖т и Литтлвуд [Cartwright and Littlewood 1945] обнаружили некоторые странные особенности динамики, позже позволившие Смейлу [Smale 1980] построить его знаменитую хаотическую подкову.

7.4 Синхронизация роторов и контактов Джозефсона

В этой главе мы рассматривали автоколебания и влияние на них периодической силы. На первый взгляд, роторы не принадлежат к этому классу моделей, поскольку они не являются автоколебательными системами. Тем не менее, если ротор приводится в движение постоянной силой, то возникающее движение похоже на автоколебания: в фазовом пространстве есть предельный цикл, и один из ляпуновских показателей равен нулю. Поэтому вращения роторов также могут быть синхронизованы периодической внешней силой. Сначала мы опишем примеры роторов, а потом обсудим свойства их синхронизации.

7.4.1 Динамика роторов и контактов Джозефсона

В качестве простейшего примера рассмотрим маятник под действием постоянного момента K , см. рис. 7.20а. Он описывается уравнениями

$$\frac{d^2 \Psi}{dt^2} + \gamma \frac{d\Psi}{dt} + \kappa^2 \sin \Psi = \frac{K}{I}. \quad (7.69)$$

Здесь κ – частота малых колебаний (в режиме вращения она никакой роли не играет, так что мы даже и не используем наше обычное обозначение для частоты ω), $\gamma > 0$ – декремент затухания, K – момент силы и I – момент инерции. Уравнение (7.69) диссипативно, в нем возможны асимптотически устойчивые режимы двух типов: состояние равновесия (при малом моменте силы) или вращения (при

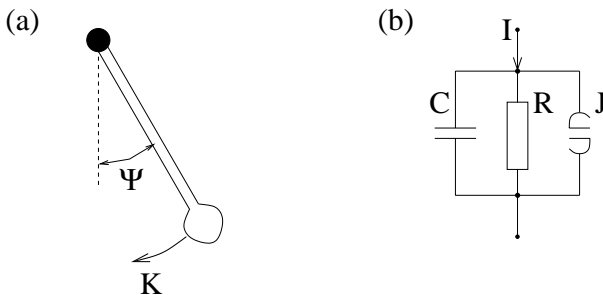


Рис. 7.20. (а) Простейший ротор – это маятник. (б) Модель шунтированного контакта Джозефсона – «электрического ротора». Обе системы описываются одними и теми же уравнениями (7.69) и (7.71).

больших K).¹⁴ Фазовое пространство динамической системы (7.69) представляет собой цилиндр $0 \leq \Psi < 2\pi$, $-\infty < \dot{\Psi} < \infty$ (мы считаем положения маятника, отличающиеся на 2π , эквивалентными). Состояние равновесия – это неподвижная точка на цилиндре, а вращениям отвечает замкнутая притягивающая траектория. Хотя физические предпосылки автоколебаний отсутствуют, предельный цикл возникает из-за особой структуры фазового пространства – из-за периодичности по угловой переменной Ψ .

Поскольку вращения описываются предельным циклом, сохраняются все свойства предельного цикла в автономных системах: это изолированная периодическая траектория с одним отрицательным и одним нулевым ляпуновским показателем. Поэтому мы можем рассматривать вращения под действием постоянной силы как автоколебания. Однако не вся развитая для колебаний теория применима в этом случае: цилиндрическая структура фазового пространства накладывает определенные ограничения (например, цикл не может родиться в результате бифуркации Хопфа).

Уравнение (7.69) имеет и другое замечательное применение: оно описывает контакт Джозефсона. Мы дадим здесь краткий его вывод, отсылая за подробностями к книгам [Barone and Paterno 1982] и [Likharev 1991]. В широко применяемой модели шунтированного контакта (рис. 7.20b) предполагается, что ток через контакт состоит из трех компонент: сверхпроводящий ток $I_c \sin \Psi$, ток через сопротивление V/R и ток через емкость $\dot{V}C$. Динамической переменной $\Psi(t)$ служит разность фаз между макроскопическими волновыми функциями сверхпроводников по обе стороны контакта. В контексте динамики контактов Джозефсона эту переменную обычно называют «фазой», мы же предпочтем называть ее «углом», т.к. термин «фаза» мы резервируем за переменной на предельном цикле. Параметр I_c называют критическим током через контакт. Сопротивление R и емкость C характеризуют обычные составляющие тока. Наконец, напряжение V связано с углом Ψ формулой Джозефсона

$$\dot{\Psi} = \frac{2e}{\hbar} V, \quad (7.70)$$

где заряд электрона e и постоянная Планка указывают на квантовый характер эффекта. Собирая все члены, получаем уравнение контакта, питаемого внешним током I ,

¹⁴ На самом деле может существовать и область бистабильности, где оба этих режима устойчивы.

$$I = I_c \sin \Psi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\Psi}{dt} + \frac{C\hbar}{2e} \frac{d^2\Psi}{dt^2}, \quad (7.71)$$

совпадающее с уравнением (7.69) для маятника. Средняя частота вращений имеет простой физический смысл: согласно (7.70) она пропорциональна постоянному напряжению на контакте. Стационарное состояние ротатора (т.е. $\dot{\Psi} = 0$) соответствует нулевому напряжению, а при вращении напряжение не равно нулю. Синхронизованному вращению соответствуют, как будет показано ниже, ступеньки на вольт-амперной характеристике контакта.

7.4.2 Передемпфированный ротатор во внешнем поле

Как обсуждалось выше, вращениям отвечает предельный цикл в фазовом пространстве, так что общие результаты разделов 7.1 и 7.3 применимы и здесь. Более того, многие эффекты синхронизации можно рассматривать и в более простой постановке задачи, вследствие специфического устройства фазового пространства. Действительно, обычно периодические колебания невозможны в одномерных системах (для предельного цикла нужны, по крайней мере, две переменные). Но для вращений этого ограничения нет: если фазовое пространство – окружность, то вращения возможны.

Для ротатора и контакта Джозефсона одномерная система получается в ультрадиссипативном пределе, когда коэффициент при второй производной стремится к нулю. Для контакта Джозефсона это соответствует нулевой емкости. Уравнение движения принимает вид

$$\frac{d\Psi}{dt} = \alpha(-\sin \Psi + \mathcal{I}), \quad (7.72)$$

где $\alpha = 2eRI_c/\hbar$ и $\mathcal{I} = I/I_c$. Это уравнение совпадает с (7.29): усредненное фазовое уравнение для автоколебаний под действием силы совпадает с уравнением передемпфированного ротатора с постоянным моментом силы. Этот момент \mathcal{I} соответствует расстройке; зависимость частоты вращений $\Omega = \langle \dot{\Psi} \rangle$ от этого параметра была показана на рис. 7.4б. Для контакта Джозефсона Ω пропорциональна напряжению V , а \mathcal{I} – току, поэтому рис. 7.4б дает вольт-амперную характеристику контакта.

Рассмотрим теперь, что происходит с вращениями под действием периодической силы. Если добавить переменный ток, уравнение (7.72) примет вид

$$\frac{d\Psi}{dt} = \alpha(-\sin \Psi + \mathcal{I} + \mathcal{J} \cos(\omega t)). \quad (7.73)$$

Это частный случай уравнения (7.15), поэтому вся теория может быть применена к нашему случаю. Отображение Пуанкаре для этого уравнения есть отображение окружности.

Мы приведем здесь аналитический подход, позволяющий найти области синхронизации при больших амплитудах переменного тока: $\mathcal{J} \gg 1$ (напомним, что внешний ток отнормирован на критический сверхпроводящий ток через контакт). В этом случае сначала можно пренебречь нелинейным членом в (7.73), а потом рассматривать его как возмущение. Чтобы найти синхронизованное решение, будем считать \mathcal{J}^{-1} малым параметром и разложим решение по степеням \mathcal{J}^{-1} :

$$\Psi = n\omega t + \mathcal{J}\Psi_{-1}(t) + \Psi_0(t) + \dots, \quad \langle \dot{\Psi}_{-1} \rangle = \langle \dot{\Psi}_0 \rangle = 0. \quad (7.74)$$

В (7.74) предполагается, что вращения происходят с частотой, кратной частоте силы. Подставляя (7.74) в (7.73), получим для членов $\sim \mathcal{J}$

$$\Psi_{-1}(t) = \alpha\omega^{-1} \sin(n\omega t) + \Psi_{-1}^0, \quad \Psi_{-1}^0 = \text{constant}.$$

Подставляя это в (7.73) и собирая вместе члены $\sim \mathcal{J}^0$, получим

$$\frac{d\Psi_0}{dt} = \alpha\mathcal{I} - n\omega - \alpha \sin[n\omega t + \alpha\mathcal{J}\omega^{-1} \sin(\omega t) + \mathcal{J}\Psi_{-1}^0].$$

Теперь, используя условие $\langle \dot{\Psi}_0 \rangle = 0$ и интегрируя по периоду $2\pi/\omega$, получим

$$0 = \alpha\mathcal{I} - n\omega - \alpha \sin \Psi_{-1}^0 J_n(-\alpha\mathcal{J}\omega^{-1}),$$

где J_n – функция Бесселя первого рода. Поскольку $\sin \Psi_{-1}^0$ лежит между -1 и 1 , находим ширину области синхронизации:

$$\left| \mathcal{I} - n\frac{\omega}{\alpha} \right| < \left| J_n \left(-\frac{\alpha\mathcal{J}}{\omega} \right) \right|. \quad (7.75)$$

В экспериментах с контактом Джозефсона области (7.75) проявляются как ступеньки на вольт-амперной характеристике при $V_n = n\omega\hbar/2e$, они называются ступеньками Шапиро (см. раздел 4.1.8).

Изложенная выше теория показывает, что синхронизация ротаторов полностью аналогична синхронизации автоколебаний. Фаза ротатора может быть введена с использованием угловой переменной, и это приводит к простым определениям периода и частоты. Более того, ротаторы еще проще, чем осцилляторы – здесь нет таких связанных с амплитудой эффектов как подавление колебаний.

7.5 Системы фазовой автоподстройки

Идея систем фазовой автоподстройки (по-английски: phase-locked loops, PLL) состоит в использовании синхронизации для эффективной и устойчивой модуляции/демодуляции сигналов в электронных системах передачи информации. Информация (например, звук) в частотно-модулированном радиосигнале зашифрована в изменениях (модуляции) частоты. В приемнике необходимо выделить эти изменения, т.е. произвести демодуляцию. В наши дни системы фазовой автоподстройки используются в большинстве радиоприемников. Здесь мы изложим общие принципы их работы, проводя аналогию с описанным выше физическим пониманием синхронизации.

В системе фазовой автоподстройки требуется синхронизовать автоколебания внешним сигналом, но вместо того, чтобы использовать сигнал просто как внешнюю силу (как в (7.5)), конструируется схема, призванная обеспечить синхронизацию. Преимущество такого метода состоит в возможности управлять различными аспектами динамики фазы по отдельности; фактически, конструируется электронное устройство, которое моделирует заданные уравнения для фазы с желаемыми свойствами синхронизации.

Простая блок-схема системы фазовой автоподстройки приведена на рис. 7.21. На вход поступает узкополосный сигнал $x(t)$, который можно представить как синусоидальный процесс с медленно меняющейся фазой и амплитудой:

$$x(t) = A(t) \sin \phi_e(t). \quad (7.76)$$

Поскольку нужная информация содержится в изменениях фазы, выходной сигнал должен быть пропорционален $\dot{\phi}_e$.

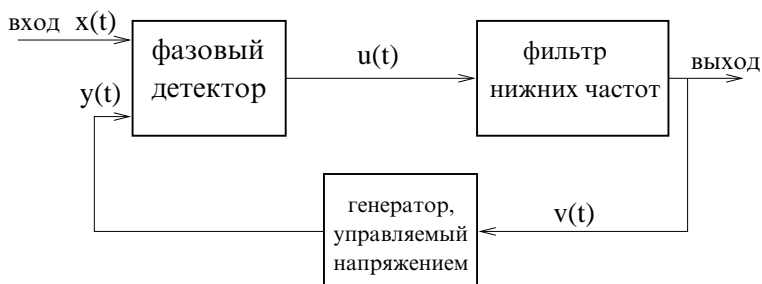


Рис. 7.21. Блок-схема системы фазовой автоподстройки, состоящей из фазового детектора, фильтра нижних частот, и генератора, управляемого напряжением.

Синхронизуемым автогенератором служит генератор, управляемый напряжением (ГУН), его частота зависит от управляющего сигнала $v(t)$. Можно считать, что на выходе ГУН генерируется синусоидальный сигнал с постоянной амплитудой и мгновенной частотой $\dot{\phi}$, линейно зависящей от $v(t)$:

$$y(t) = 2B \cos \phi(t), \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + Kv(t). \quad (7.77)$$

Следующая цель – сделать сигнал $v(t)$ пропорциональным разности фаз между выходом ГУНа $y(t)$ и входным сигналом $x(t)$. Это достигается в два этапа. На первом этапе с помощью фазового детектора формируется сигнал, пропорциональный некоторой функции от разности фаз между x и y . В простейшем случае эти сигналы просто перемножаются:

$$u(t) = x(t)y(t) = AB[\sin(\phi_e + \phi) + \sin(\phi_e - \phi)]. \quad (7.78)$$

Теперь необходимо выделить компоненту u , пропорциональную разности фаз, это делается с помощью простейшего фильтра нижних частот. Он подавляет в (7.78) слагаемое, пропорциональное сумме фаз (этот член имеет удвоенную частоту). Оставляя только слагаемое, пропорциональное разности фаз, запишем

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = AB \sin(\phi_e - \phi), \quad (7.79)$$

где τ – постоянная времени фильтра.

Вводя разность фаз $\psi = \phi - \phi_e$, из (7.77) и (7.79) получаем:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\psi}{dt} + KAB \sin \psi = -\frac{d^2\phi_e}{dt^2} - \frac{1}{\tau} \left(\frac{d\phi_e}{dt} - \omega_0 \right). \quad (7.80)$$

Это уравнение аналогично (7.69) и (7.71). В простейшем случае, когда частота входного сигнала $\dot{\phi}_e = \omega$ постоянна, правая часть (7.80) тоже постоянна, и в (7.80) есть устойчивое состояние равновесия (если, конечно, мы находимся в области синхронизации, т.е. $\omega \approx \omega_0$). Выходной сигнал v пропорционален разности фаз, $v \propto \sin \psi$. Если входная фаза ϕ_e медленно модулирована, то выходной сигнал изменится в соответствии с этой модуляцией. Таким образом, система фазовой автоподстройки генерирует сигнал $y(t)$, имеющий такую же (зависящую от времени) фазу, что и входной сигнал $x(t)$; искомый выходной сигнал есть $v(t)$. На физическом языке, автогенератор (ГУН) синхронизован входным сигналом $x(t)$.

Преимущество системы фазовой автоподстройки состоит в том, что синхронизованный сигнал $y(t)$ гораздо чище исходного $x(t)$: весь

амплитудный шум $A(t)$, равно как и высокочастотный, подавляются в результате детектирования фазы и фильтрации (см. рис. 7.22). О практических аспектах применения систем фазовой автоподстройки, в частности о дискретных схемах, можно прочитать в [Best 1984; Lindsey and Chie 1985; Afraimovich *et al.* 1994] и приведенной там литературе.

7.6 Библиографические заметки

Синхронизация автоколебаний периодическим сигналом относится к классическим задачам теории нелинейных колебаний. В наше время внимание исследователей обращено на необычные эффекты, такие как, например, переход к хаосу. Различные примеры изучались численно [Zaslavsky 1978; Gonzalez and Piro 1985; Aronson *et al.* 1986; Parlitz and Lauterborn 1987; Mettin *et al.* 1993; Coombes 1999; Coombes and Bressloff 1999] и экспериментально [Martin and Martienssen 1986; Bryant and Jeffries 1987; Benford *et al.* 1989; Peinke *et al.* 1993]. В частности, Гласс [Glass 1991] дает обзор синхронизации вынужденных релаксационных колебаний с приложениями к сердечной аритмии, эта работа содержит обширную библиографию. В том же выпуске помещена оригинальная статья Арнольда [Arnold 1991]. Несколько работ посвящены свойствам подобия и скейлинга языков Арнольда и описанию чертовой лестницы [Ostlund *et al.* 1983; Jensen *et al.* 1984; Alstrøm *et al.* 1990; Christiansen *et al.* 1990; Reichhardt and Nori 1999].

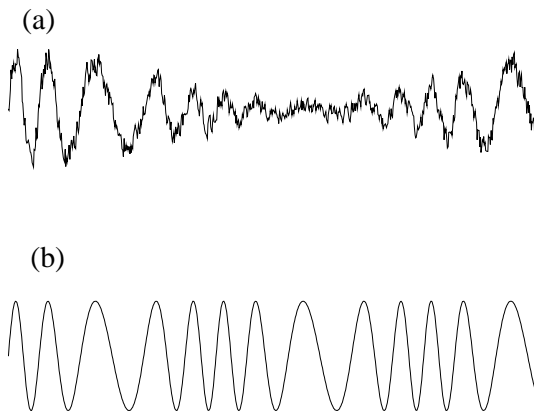


Рис. 7.22. Система фазовой автоподстройки позволяет подавить шум входного сигнала $x(t)$ (а). Изменения амплитуды и высокочастотные шумовые компоненты не проявляются в колебаниях ГУН $y(t)$ (б). По Best [1984].

Глава 8

Взаимная синхронизация двух взаимодействующих периодических осцилляторов

В этой главе мы рассматриваем эффект синхронизации двух автоколебательных систем за счет их взаимодействия. Этот случай является промежуточным по сравнению с рассмотренным в главе 7, когда один осциллятор подвержен внешнему периодическому воздействию, и случаем многих взаимодействующих осцилляторов, который будет рассматриваться ниже в главах 11 и 12. Действительно, случай периодической внешней силы может рассматриваться как частный случай взаимодействия двух осцилляторов при однонаправленной связи. Два осциллятора образуют элементарный блок, который используется при описании случая многих (более, чем двух) взаимосвязанных систем. Проблема может быть сформулирована следующим образом: есть две нелинейные системы, демонстрирующие периодические автоколебания, в общем случае с различными амплитудами и частотами. Эти системы взаимодействуют, и интенсивность взаимодействия есть основной параметр. Нас интересует динамика связанной системы, главным образом захват фаз и частот.

В разделе 8.1 мы развиваем метод фазовой динамики, который справедлив в случае малой связи – в этом случае задача сводится к связанным уравнениям, в которые входят только фазы. Другое приближение используется в разделе 8.2, где обсуждается динамика слабонелинейных осцилляторов. Наконец, в разделе 8.3 мы описываем

синхронизацию релаксационных систем «накопление – сброс». Связанные ротаторы не рассматриваются отдельно: их свойства очень близки к свойствам осцилляторов.

8.1 Фазовая динамика

Если связь между двумя автоколебательными системами мала, то, следуя работам Малкина [1956] и Курамото [Kuramoto 1984], можно вывести замкнутые уравнения для фаз. Этот подход по сути совпадает с использованным в разделе 7.1; здесь мы используем многие изложенные там идеи. Наша основная модель – это система двух связанных осцилляторов

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{dt} &= \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}) + \varepsilon \mathbf{p}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}), \\ \frac{d\mathbf{x}^{(2)}}{dt} &= \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}) + \varepsilon \mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(1)}).\end{aligned}\tag{8.1}$$

Отметим, что мы не предполагаем какой-либо схожести осцилляторов: они могут быть различной природы и иметь различную размерность. Связь может быть асимметричной. Мы предполагаем только, что автономная динамика (определяемая функциями $\mathbf{f}^{(1),(2)}$) может быть отделена от взаимодействия (описываемого в общем случае различными членами $\mathbf{p}^{(1),(2)}$), пропорционального параметру связи ε . Это предположение мотивировано физической формулировкой проблемы: есть два независимых осциллятора, которые могут функционировать раздельно, но могут и взаимодействовать. Таким образом, мы исключаем ситуацию, когда две колебательные моды наблюдаются в сложной системе, которая не может быть разделена на две составляющие.¹ Другой случай, не учитываемый системой (8.1), – это случай более сложной связи, требующей для своего описания дополнительных динамических переменных.²

При стремлении параметра связи ε к нулю в каждой системе имеется устойчивый предельный цикл, автономные частоты колебаний

¹ Тем не менее, в некоторых системах высокой размерности (например, в лазерах) возможна генерация двух независимых автоколебательных мод, которые можно рассматривать в рамках модели (8.1)

² В электронике это различие соответствует разнице между резистивной связью (нет дополнительных уравнений) и реактивной – емкостной или индуктивной – связью (необходимы дополнительные уравнения). Один такой пример будет рассмотрен в разделе 12.3.

систем равны ω_1 и ω_2 . Тогда, как описано в разделе 7.1, мы можем определить две фазы на циклах и в окрестностях³ (ср. с уравнением (7.3)),

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1, \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2.\end{aligned}\tag{8.2}$$

В общем случае, частоты ω_1, ω_2 находятся в иррациональном соотношении, и, следовательно, движение в системе несвязанных осцилляторов квазипериодическое.

В первом приближении мы можем написать уравнения для фаз связанных систем аналогично уравнению (7.14):

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1(\mathbf{x}^{(1)})}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial \phi_1}{\partial x_k^{(1)}} p_k^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}), \\ \frac{d\phi_2(\mathbf{x}^{(2)})}{dt} &= \omega_2 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial \phi_2}{\partial x_k^{(2)}} p_k^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(1)}).\end{aligned}\tag{8.3}$$

Предполагая, что при малой связи возмущения амплитуд малы, подставим в правую часть значения переменных $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ на циклах, где каждая из этих переменных есть некая функция от соответствующей фазы. Таким образом, мы получаем замкнутую систему уравнений для фаз

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon Q_1(\phi_1, \phi_2), \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2 + \varepsilon Q_2(\phi_2, \phi_1),\end{aligned}\tag{8.4}$$

с 2π -периодическими (по обоим аргументам) функциями $Q_{1,2}$.

Возможность записать замкнутые уравнения для фазовых переменных означает, что в многомерном фазовом пространстве переменных $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$ существует двумерная инвариантная поверхность, параметризованная фазами ϕ_1, ϕ_2 . Более того, эта поверхность – тор, так как сдвиг любой из фаз на 2π дает ту же самую точку в фазовом пространстве. Этот двумерный тор есть полный аналог инвариантного тора неавтономной системы, описанного в разделе 7.3. Есть две возможности characterize динамику на инвариантном торе.

³ По сравнению с разделом 7.1 мы опускаем нижний индекс «0» при обозначении автономных частот; вместо этого мы используем нижний индекс, соответствующий номеру осциллятора.

Первая состоит в использовании малости параметра ε и усреднении уравнения (8.4). Второй подход основан на конструировании отображения окружности.

8.1.1 Усредненные фазовые уравнения

2π -периодические функции $Q_{1,2}$ в уравнениях (8.4) могут быть представлены в виде двойного ряда Фурье

$$Q_1(\phi_1, \phi_2) = \sum_{k,l} a_1^{k,l} e^{ik\phi_1 + il\phi_2}, \quad Q_2(\phi_2, \phi_1) = \sum_{k,l} a_2^{l,k} e^{ik\phi_1 + il\phi_2}.$$

В нулевом приближении фазы вращаются равномерно с невозмущенными (автономными) частотами

$$\phi_1 = \omega_1 t, \quad \phi_2 = \omega_2 t,$$

и в функциях $Q_{1,2}$ все слагаемые соответствуют быстрым вращениям, кроме членов, удовлетворяющих резонансному условию

$$k\omega_1 + l\omega_2 \approx 0.$$

Предположим, что автономные частоты $\omega_{1,2}$ находятся почти в резонансе:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \approx \frac{m}{n}.$$

Тогда все члены ряда Фурье с индексами $k = nj$, $l = -mj$ являются резонансными и вносят вклад в усредненные уравнения. В результате мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon q_1(n\phi_1 - m\phi_2), \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2 + \varepsilon q_2(m\phi_2 - n\phi_1), \end{aligned} \tag{8.5}$$

где

$$\begin{aligned} q_1(n\phi_1 - m\phi_2) &= \sum_j a_1^{nj, -mj} e^{ij(n\phi_1 - m\phi_2)}, \\ q_2(m\phi_2 - n\phi_1) &= \sum_j a_2^{mj, -nj} e^{ij(m\phi_2 - n\phi_1)}. \end{aligned}$$

Для разности фаз $\psi = n\phi_1 - m\phi_2$ двух осцилляторов мы получаем из (8.5)

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon q(\psi), \tag{8.6}$$

где

$$\nu = m\omega_2 - n\omega_1, \quad q(\psi) = nq_1(\psi) - mq_2(-\psi). \quad (8.7)$$

Отметим, что уравнение (8.6) имеет точно такой же вид, как уравнение (7.24) раздела 7.1.6, и нам не надо повторять его анализ. В случае синхронизации уравнение (8.6) имеет устойчивое состояние равновесия ψ_0 и наблюдаемые частоты колебаний равны

$$\Omega_{1,2} = \langle \dot{\phi}_{1,2} \rangle = \omega_{1,2} + \varepsilon q_{1,2}(\pm\psi_0).$$

Легко видеть, что отношение частот остается постоянным внутри области синхронизации:

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{m}{n}.$$

Рассмотрим более подробно простейший случай резонанса 1 : 1, т.е. случай, когда автономные частоты осцилляторов почти совпадают: $\omega_1 \approx \omega_2$. Тогда в вышеприведенных формулах $m = n = 1$. Далее, предположим, что связь симметрична, т.е. $q_1(\psi) = q_2(\psi)$; тогда, в соответствии с (8.7), получим антисимметричную функцию связи в (8.6), $q(\psi) = -q(-\psi)$. Простейшая и наиболее естественная антисимметричная 2π -периодическая функция есть синус, и соответствующая модель взаимодействия двух осцилляторов выглядит как

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon \sin \psi. \quad (8.8)$$

В зависимости от знака ε возможны два случая – притягивающее или отталкивающее взаимодействие.⁴ Если $\varepsilon < 0$, то устойчивое состояние разности фаз ψ лежит в интервале $-\pi/2 < \psi < \pi/2$, и, в частности, при нулевой расстройке ν устойчивое значение разности фаз равно нулю. Можно сказать, что фазы «притягиваются» друг к другу. Если $\varepsilon > 0$, то устойчивое значение разности фаз лежит в интервале $\pi/2 < \psi < 3\pi/2$, и для совпадающих автономных частот равно π ; это случай «отталкивания». Эти два типа синхронного движения называют синфазным («in-phase») и противофазным («anti-phase» или «out-of-phase») режимам.⁵ Примечательно, что количественные характеристики синхронизации (в частности, ширина области синхронизации) одинаковы для обоих случаев. Стоит

⁴ Или же, что эквивалентно, можно сказать, что ε положительно, но функция связи меняет знак, $\sin \psi \rightarrow -\sin \psi$.

⁵ Напомним читателю, что Гюйгенс в своем первом наблюдении явления синхронизации обнаружил именно противофазный режим синхронизации маятниковых часов.

отметить, что, если форма изохрон в окрестности предельного цикла нетривиальна, то притяжение или отталкивание фаз может не соответствовать притяжению или отталкиванию между исходными переменными $x_k^{(1,2)}$ (см. примеры в [Han *et al.* 1995, 1997; Postnov *et al.* 1999a]).

В усредненном описании синхронизация возникает как идеальный захват фаз: существование устойчивой особой точки ψ_0 в уравнении (8.8) означает не только то, что осцилляторы имеют одинаковые частоты, но и постоянство фазового сдвига, $\phi_1 = \phi_2 + \psi_0$. Последнее свойство не выполняется, если мы рассматриваем полную систему (8.4): за счет нерезонансных членов фазы не захвачены идеально, а осциллируют вокруг траектории усредненной системы (8.5). Эти осцилляции могут быть особенно велики, если колебания близки к релаксационным, т.е., если функция связи $Q_{1,2}$ содержит много гармоник.

8.1.2 Отображение окружности

Правая часть уравнений (8.4) 2π -периодична по обоим переменным; следовательно поток на двумерной фазовой плоскости (ϕ_1, ϕ_2) эквивалентен потоку на двумерном торе $0 \leq \phi_1 < 2\pi$, $0 \leq \phi_2 < 2\pi$. Этот двухмерный поток может быть сведен к обратимому отображению окружности.

Выберем прямую $\phi_2 = 0$ в качестве секущей. Выпуская траекторию из $\phi_1(0)$, $\phi_2(0) = 0$ и следуя вдоль нее до точки $\phi_1(t)$, $\phi_2(t) = 2\pi$, получим отображение $\phi_1(0) \rightarrow \phi_1(t)$. Вводя дискретное время n , запишем отображение в виде

$$\phi_1(n+1) = F(\phi_1(n)), \quad (8.9)$$

где функция F такова, что $F(x+2\pi) = 2\pi + F(x)$.⁶ Для невзаимодействующих систем это отображение сводится к линейному повороту

$$\phi_1(n+1) = \phi_1(n) + 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

⁶ Фактически, мы используем здесь малость взаимодействия: поток на торе не произволен, а близок к вращениям по обоим координатам. Это обеспечивает как отсутствие состояний равновесия, так и замкнутых траекторий, не охватывающих тор, и, следовательно, существование отображения Пуанкаре.

Для отображения окружности (8.9) можно определить число вращения ρ в соответствии с уравнением (7.52), что дает отношение двух наблюдаемых частот

$$\rho = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}.$$

Отметим, что возможен эквивалентный способ получения отображения окружности: можно выбрать в качестве секущей $\phi_1 = 0$ и получить отображение $\phi_2 \rightarrow \tilde{F}(\phi_2)$; новое число вращения будет обратно старому.

Вся теория отображения окружности (раздел 7.3) может быть применена к данному случаю. В частности, выход из синхронизации происходит через бифуркацию седло-узел, как описано в разделах 7.1 и 7.3.

8.2 Слабонелинейные осцилляторы

Если связь между осцилляторами относительно велика, то она воздействует не только на фазы, но и на амплитуды. Вообще говоря, свойства сильных взаимодействий неуниверсальны, но в случае слабонелинейных автоколебательных систем можно использовать метод усреднения и получить универсальные уравнения, зависящие только от нескольких существенных параметров. Мы будем следовать подходу Aronson *et al.* [1990]. Так как метод усреднения был уже кратко изложен в разделе 7.2, то здесь мы просто модифицируем уравнения, чтобы учесть взаимную связь.

8.2.1 Общие уравнения

Возьмем два, в общем случае различных, осциллятора и свяжем их линейно

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = f_1(x_1, \dot{x}_1) + D_1(x_2 - x_1) + B_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \quad (8.10)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = f_2(x_2, \dot{x}_2) + D_2(x_1 - x_2) + B_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \quad (8.11)$$

Здесь $\omega_{1,2}$ – частоты линейных несвязанных систем. При интерпретации этих уравнений следует иметь в виду:

- (i) Мы рассматриваем линейную по переменным $x_{1,2}$, $\dot{x}_{1,2}$ связь. Это оправдано, если автономные частоты ω_1 и ω_2 близки, что соответствует резонансу 1 : 1. Действительно, в правой части

основными являются члены, имеющие частоты $\omega_{1,2}$, а эти члены линейны. Если линейные члены отсутствуют, то необходимо рассмотреть члены высших порядков; синхронизация в этом случае будет слабее.

- (ii) Члены, описывающие связь, выбраны пропорциональными разности переменных и их производных. Такая связь исчезает при совпадении состояний двух систем, $x_1 = x_2$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$. [Aronson *et al.* 1990] называют такую связь «диффузионной». Другая возможность – это «непосредственная» связь, когда, например, уравнение (8.10) модифицируется в

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = f_1(x_1, \dot{x}_1) + D_1 x_2 + B_1 \dot{x}_2.$$

Различие между «непосредственной» и «диффузионной» связью станет важным при рассмотрении явления «вымирания колебаний» (гашения), в остальном же свойства синхронизации при двух типах связи близки.⁷

Как обычно в методе усреднения, мы ищем колебательное решение с общей (пока неизвестной) частотой ω и медленно меняющимися комплексными амплитудами $A_{1,2}$. Используя подстановку

$$x_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(A_{1,2}(t)e^{i\omega t} + c.c.), \quad y_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(i\omega A_{1,2}(t)e^{i\omega t} + c.c.),$$

получим общие уравнения для медленно меняющихся комплексных амплитуд $A_{1,2}$ (ср. с уравнением (7.41))

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= -i\Delta_1 A_1 + \mu_1 A_1 - (\gamma_1 + i\alpha_1)|A_1|^2 A_1 + (\beta_1 + i\delta_1)(A_2 - A_1), \\ \dot{A}_2 &= -i\Delta_2 A_2 + \mu_2 A_2 - (\gamma_2 + i\alpha_2)|A_2|^2 A_2 + (\beta_2 + i\delta_2)(A_1 - A_2). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Расстройка может быть в первом приближении записана как

$$\Delta_{1,2} = \omega_{1,2} - \omega.$$

Параметры связи $\beta_{1,2}, \delta_{1,2}$ пропорциональны константам связи $B_{1,2}, D_{1,2}$. Другие параметры – $\mu_{1,2}, \gamma_{1,2}, \alpha_{1,2}$ – те же самые, что и в уравнении (7.41). Вводя действительные амплитуду и фазу в

⁷ В разделе 8.2.3 мы обсуждаем различие между описывающими связь членами, пропорциональными $B_{1,2}$ и $D_{1,2}$.

соответствии с $A_{1,2} = R_{1,2}e^{i\phi_{1,2}}$, получим систему из четырех действительных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= \mu_1 R_1 (1 - \gamma_1 R_1^2) + \beta_1 (R_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) - R_1) - \\ &\quad - \delta_1 R_2 \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \dot{\phi}_1 &= -\Delta_1 - \mu_1 \alpha_1 R_1^2 + \delta_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \cos(\phi_2 - \phi_1) - 1 \right) + \\ &\quad + \beta_1 \frac{R_2}{R_1} \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \dot{R}_2 &= \mu_2 R_2 (1 - \gamma_2 R_2^2) + \beta_2 (R_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) - R_2) - \\ &\quad - \delta_2 R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2), \\ \dot{\phi}_2 &= -\Delta_2 - \mu_2 \alpha_2 R_2^2 + \delta_2 \left(\frac{R_1}{R_2} \cos(\phi_1 - \phi_2) - 1 \right) + \\ &\quad + \beta_2 \frac{R_1}{R_2} \sin(\phi_1 - \phi_2). \end{aligned} \tag{8.13}$$

Примечательно, что члены, описывающие связь, зависят только от разности фаз, поэтому мы можем сократить число уравнений, введя разность фаз $\psi = \phi_2 - \phi_1$. С этой переменной система (8.13) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= \mu_1 R_1 (1 - \gamma_1 R_1^2) + \beta_1 (R_2 \cos \psi - R_1) - \delta_1 R_2 \sin \psi, \\ \dot{R}_2 &= \mu_2 R_2 (1 - \gamma_2 R_2^2) + \beta_2 (R_1 \cos \psi - R_2) + \delta_2 R_1 \sin \psi, \\ \dot{\psi} &= -\nu + \mu_1 \alpha_1 R_1^2 - \mu_2 \alpha_2 R_2^2 + \left(-\delta_1 \frac{R_2}{R_1} + \delta_2 \frac{R_1}{R_2} \right) \cos \psi + \\ &\quad + \delta_1 - \delta_2 - \left(\beta_1 \frac{R_2}{R_1} + \beta_2 \frac{R_1}{R_2} \right) \sin \psi. \end{aligned}$$

Здесь $\nu = \omega_2 - \omega_1$ — это расстройка автономных частот.

Приведенные уравнения достаточно общие, и анализ всех возможных случаев весьма затруднителен. Мы можем уменьшить число параметров, предположив, что осцилляторы различаются только линейными частотами, т.е. $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, и так далее. В дополнение, нормализуем время на μ и амплитуды на $\sqrt{\gamma/\mu}$, избавившись тем самым от двух параметров. Тогда оставшиеся коэффициенты β, δ должны рассматриваться как нормализованные на μ , а α — как

нормализованный на γ/μ . Тем не менее, для простоты мы будем использовать те же обозначения и перепишем систему в виде

$$\dot{R}_1 = R_1(1 - R_1^2) + \beta(R_2 \cos \psi - R_1) - \delta R_2 \sin \psi, \quad (8.14)$$

$$\dot{R}_2 = R_2(1 - R_2^2) + \beta(R_1 \cos \psi - R_2) + \delta R_1 \sin \psi, \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = & -\nu + \alpha(R_1^2 - R_2^2) + \delta \left(-\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2} \right) \cos \psi - \\ & - \beta \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2} \right) \sin \psi. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Эти уравнения были детально исследованы Aronson *et al.* [1990]. Здесь мы не приводим все их результаты, а лишь обсуждаем наиболее важные физические эффекты.

Прежде чем продолжить, напомним физический смысл параметров в уравнениях (8.14)–(8.16). Параметр α описывает нелинейную зависимость частоты одиночного осциллятора; изохронные колебания соответствуют $\alpha = 0$. Параметр ν – это расстройка автономных частот; когда частоты совпадают, то $\nu = 0$. Параметры δ и β – это константы связи, они будут обсуждены ниже.

Если осцилляторы изохронны ($\alpha = 0$), то переход к синхронизации происходит через бифуркацию седло-узел, при которой возникает предельный цикл, аналогично сценарию, описанному в разделе 8.1. Для неизохронного случая $\alpha \neq 0$ наблюдается более сложная бифуркационная картина.

8.2.2 Вымирание (гашение) колебаний

Интересное явление – вымирание, или гашение, колебаний – наблюдается в случае диффузионной связи. Оно не имеет аналога в случае осциллятора под воздействием внешней силы или в случае непосредственной связи. При достаточно большой диффузионной связи β и расстройке ν начало координат $R_1 = R_2 = 0$ становится устойчивым и колебания в обеих системах вымирают из-за связи.

Продемонстрируем это, линеаризовав уравнения (8.12). Для простоты, возьмем все параметры (кроме частот) одинаковыми. Более того, предположим, что связь чисто диссипативная (см. обсуждение ниже), $\delta = 0$. Окончательно, вводя частоту $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, запишем $\Delta_1 = -\Delta_2 = \Delta$ и получим

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= (i\Delta + \mu)A_1 + \beta(A_2 - A_1), \\ \dot{A}_2 &= (-i\Delta + \mu)A_2 + \beta(A_1 - A_2). \end{aligned}$$

Линейный анализ устойчивости дает собственные значения

$$\lambda = \mu - \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \Delta^2}.$$

Стационарное состояние $A_1 = A_2 = 0$ является, следовательно, устойчивым, если $\mu < \beta < (\mu^2 + \Delta^2)/2\mu$. Физический смысл возникновения устойчивости за счет связи понятен: диффузионная связь вносит дополнительную диссипацию в каждую из систем, и эта диссипация не может быть скомпенсирована воздействием другого осциллятора, если расстройка велика.

8.2.3 Притягивающее и отталкивающее взаимодействие

Сведем систему (8.14)–(8.16) к одному уравнению для разности фаз. Мы можем сделать это при слабой связи, т.е. если параметры β и δ могут считаться малыми. Конечно, мы можем получить это уравнение с помощью фазового приближения, как описано в разделе 8.1, но, поскольку у нас уже есть усредненные уравнения (8.14)–(8.16), то нам проще вывести фазовое уравнение непосредственно из них. В первом приближении амплитуды $R_{1,2}$ мало отличаются от невозмущенных значений $R_{1,2} = 1$:

$$R_{1,2} \approx 1 + r_{1,2}, \quad r_{1,2} \ll 1.$$

Подстановка этого выражения в уравнения (8.14) и (8.15) дает в первом приближении

$$\dot{r}_{1,2} = -2r_{1,2} + \beta(\cos \psi - 1) \mp \delta \sin \psi.$$

Видно, что возмущения амплитуды сильно демпфированы, поэтому мы можем принять $\dot{r}_{1,2} \approx 0$ и получить

$$R_{1,2} = 1 + \frac{\beta}{2}(\cos \psi - 1) \mp \frac{\delta}{2} \sin \psi.$$

Подставляя это в (8.16), получим

$$\dot{\psi} = -\nu - 2(\beta + \alpha\delta) \sin \psi. \tag{8.17}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (8.8) с константой связи $\varepsilon = -2(\beta + \alpha\delta)$.

Рассмотрим сначала идентичные осцилляторы, $\nu = 0$. Из уравнения (8.17) ясно, что устойчивое значение разности фаз между двумя осцилляторами зависит от знака коэффициента $\beta + \alpha\delta$. Если он положителен, то устойчивая разность фаз равна 0, т.е. фазы притягиваются; если он отрицателен, то наблюдается отталкивающее взаимодействие и устойчивая разность фаз равна π . Представляется важным обсудить физический смысл этих двух типов взаимодействия.

Прежде всего, будем различать диссипативную и реактивную связь. В системе (8.10) и (8.11) члены, пропорциональные $D_{1,2}$, – реактивные, а члены, пропорциональные $B_{1,2}$, – диссипативные. Действительно, пренебрежем на время нелинейными и диссипативными членами (т.е. положим $f_{1,2} = 0$) и рассмотрим линейные консервативные осцилляторы. Тогда эффект взаимодействия легко понять: описывающие связь члены, пропорциональные $D_{1,2}$, только сдвигают автономные частоты, в то время как члены, пропорциональные $B_{1,2}$, вносят диссипацию.⁸ Эти эффекты проявляются и в нелинейном случае. В терминах, используемых [Aronson *et al.* 1990], два описывающих связь члена соответствуют скалярной (B) и нескалярной (D) связи. Чтобы объяснить происхождение этих понятий, перепишем уравнение (8.10) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= -\omega_1^2 x_1 + f_1(x_1, y_1) + D_1(x_2 - x_1) + B_1(y_2 - y_1).\end{aligned}$$

Мы видим, что члены, пропорциональные B_1 , описывают линейную связь по переменной y в уравнении для y , в то время как члены, пропорциональные D_1 , описывают линейную связь по переменной x в уравнении для y . В общем случае, когда уравнение колебательной системы записано в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, скалярные члены связывают одну и ту же переменную, а нескалярные – описывают перекрестную связь.

Физически, диссипативная связь, пропорциональная β , стремится привести две взаимодействующие системы к более однородному режиму, при котором их состояния совпадают (конечно, если $\beta > 0$). В результате, такая связь непосредственно ведет к синфазной синхронизации осцилляторов в соответствии с уравнением (8.17). В противоположность этому, влияние реактивной связи *a priori* не ясно. Чтобы описать влияние различных типов связи на фазовую

⁸ Можно показать, что дивергенция фазового объема дается выражением $-(B_1 + B_2)$, ср. с [Schmidt and Chernikov 1999].

динамику, рассмотрим схематическое представление взаимодействия на рис. 8.1 и 8.2.

На рис. 8.1 мы иллюстрируем случай изохронных осцилляторов ($\alpha = 0$). На схеме (а) показано взаимодействие за счет диссипативной (скалярной) связи: в уравнениях (8.10) и (8.11) отличны от нуля только коэффициенты B . Связь проявляется как сила, действующая в направлении y , и эта сила пропорциональна разности переменных y на предельных циклах. Таким образом, взаимодействие фаз – притя-

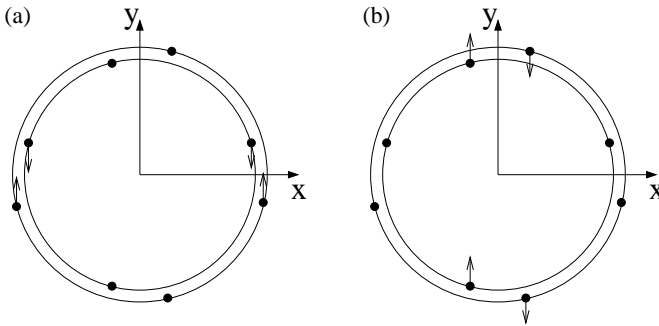


Рис. 8.1. Схематическое представление сил взаимодействия двух изохронных осцилляторов для случая диссипативной (а) и реактивной (б) связи. Для наглядности амплитуды двух предельных циклов изображены как различные.

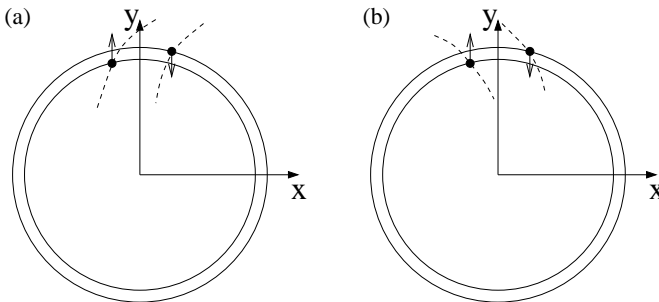


Рис. 8.2. Схематическое представление реактивной связи между неизохронными осцилляторами. Изохроны (линии постоянной фазы) показаны пунктирными линиями, их форма зависит от знака α . Соответственно, связь является отталкивающей (а) или притягивающей (б) в зависимости от знака произведения $\delta\alpha$.

гивающее.⁹ Если фазы близки, то эта сила действует не весь период колебаний, а только когда переменные y отличаются существенно, т.е. когда x близко к минимуму или максимуму. На схеме (b) показан случай реактивной (нескалярной) связи, здесь мы предполагаем, что отсутствуют коэффициенты B . Теперь сила действует также в направлении y , но она пропорциональна разности переменных x . Следовательно, сила действует, когда x близко к нулю, и она не стремится ни сблизить фазы, ни удалить их друг от друга. Таким образом, реактивная связь меняет только амплитуды осцилляторов, а не их фазы. Фазы могут быть изменены только косвенно, если они зависят от амплитуд, т.е., если колебания неизохронны (в изохронном случае фазы не зависят от амплитуд; изохронами являются радиальные линии фазовой плоскости). Итак, реактивная связь не влияет на изохронные осцилляторы. Это соответствует тому, что коэффициент реактивной связи δ появляется в уравнении (8.17) умноженным на параметр изохронности α .

Ситуация меняется при реактивной связи между неизохронным осцилляторами, т.е., если $\alpha \neq 0$. Этот случай показан на рис. 8.2. Взаимодействие увеличивает амплитуду одного осциллятора и уменьшает амплитуду другого, и из-за неизохронности колебаний это приводит к появлению фазового сдвига, т.к. частота зависит от амплитуды. В зависимости от знака произведения $\alpha\delta$ взаимодействие может быть как притягивающим, так и отталкивающим. В результате, устойчивый фазовый сдвиг может быть между 0 и π . Это следует также из (8.17). Тот же самый механизм вызывает фазовую неустойчивость в колебательной среде, что обсуждается позже в главе 11.

Сделаем одно замечание. Мы проиллюстрировали роль только основных членов в фазовой динамике. Если эти члены исчезают, то уравнение (8.17) перестает выполняться. Тогда, чтобы описать приводящее к синхронизации фазовое взаимодействие, необходимо учесть члены более высокого порядка.

8.3 Релаксационные колебания

Универсальной модели релаксационных колебаний не существует, поэтому мы хотим привести здесь только один пример: так назы-

⁹ Строго говоря, этот вывод верен только для слабонелинейных колебаний. В случае сильной нелинейности даже диффузионная связь переменных состояния может привести к отталкиванию фаз [Han *et al.* 1995, 1997; Postnov *et al.* 1999a].

ваемый осциллятор типа накопление – сброс. Он не задается системой дифференциальных уравнений: в нем отдельно описываются быстрые и медленные движения. Осциллятор характеризуется единственной переменной x , которая растет от 0 до 1 (состояние «накопление») в соответствии с заданным динамическим законом, который может быть описан обыкновенным дифференциальным уравнением или же функцией времени. Как только достигается порог $x = 1$, осциллятор мгновенно сбрасывается в $x = 0$ («стреляет»). Предполагается, что взаимодействие двух таких осцилляторов происходит только во время «сброса». Когда первый осциллятор x_1 стреляет, он действует на второй, увеличивая его переменную x_2 на величину ε . Если $x_2 + \varepsilon$ превышает порог (т.е. $x_2 + \varepsilon > 1$), второй осциллятор также стреляет, но при этом ответного воздействия на первый осциллятор не происходит (осциллятор в момент сброса не чувствителен к внешнему воздействию).

Динамика данного вида связи сильно диссипативна. Действительно, если фазы двух осцилляторов оказываются близки друг к другу, то осциллятор, который стреляет первым, заставляет стрелять и второй, так что они стреляют одновременно. После этого события фазы осцилляторов совпадают. Если автономные частоты осцилляторов близки, то они продолжают стрелять одновременно. Итак, будет наблюдаться идеальная синхронизация, при которой события «сброса» совпадают, и период будет наименьшим из двух автономных.

Перейдем к аналитическому рассмотрению проблемы, следуя подходу Миролло и Строгатца [Mirolo and Strogatz 1990b]. Предположим вначале, что осцилляторы идентичны и имеют автономную частоту ω_0 . Медленное движение определяется функцией $x = f(\phi)$, где ϕ – фаза, удовлетворяющая $\dot{\phi} = \omega_0$. Оно соответствует росту фазы от 0 до 2π , и при $\phi = 2\pi$ происходит сброс.

Два осциллятора описываются потоком на двумерном торе (рис. 8.3); это описание может быть сведено к одномерному отображению Пуанкаре. Выберем линию $\phi_1 = 0$ в качестве секущей; это означает, что мы наблюдаем за фазой второго осциллятора в тот момент времени, когда первый стреляет. Такое построение отображения Пуанкаре $\phi_2^{(0)} \rightarrow F(\phi_2^{(0)})$ проиллюстрировано на рис. 8.3. Начнем с точки 0 с координатами $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \phi_2^{(0)}$. На первой стадии медленного движения достигается точка 1 с $\phi_2^{(1)} = 2\pi$, $\phi_1^{(1)} = 2\pi - \phi_2^{(0)}$. В этот момент осциллятор 2 стреляет, и фаза первого тоже изменяется. Если мы предположим, что переменная x меняется на ε , то новая фаза первого осциллятора дается выражением $\phi_1^{(2)} = f^{-1}(f(\phi_1^{(1)}) + \varepsilon)$,

где f^{-1} есть функция, обратная f . Теперь возможны два случая. Если $\phi_1^{(2)} \geq 2\pi$, то первый осциллятор стреляет, и оба осциллятора сбрасываются в ноль (рис. 8.3b), так что $F(\phi_2^{(0)}) = 0$. В другом случае, наблюдается другой интервал медленного движения к точке $\phi_1^{(3)} = 2\pi$, $\phi_2^{(3)} = 2\pi - \phi_1^{(2)}$, за которым следует сброс осциллятора 1. При сбросе фаза ϕ_2 изменяется, и, опять, либо вызывается сброс осциллятора 2 (рис. 8.3c), и фаза ϕ_2 скачком изменяется до 2π ,¹⁰ либо сброса не возникает, и конечная точка отображения Пуанкаре есть $\phi_2^{(4)} = f^{-1}(f(\phi_2^{(3)}) + \varepsilon)$, см. рис. 8.3a.

Легко видеть, что, в силу симметрии, отображение Пуанкаре $\phi_2^4 = F(\phi_2^0)$ может быть записано как двойная итерация отображения h :

$$F(\phi) = h(h(\phi)), \quad h(\phi) = f^{-1}(f(2\pi - \phi) + \varepsilon). \quad (8.18)$$

Это отображение h называется **отображение сброса** (firing map). Окончательное отображение Пуанкаре имеет два плато, где $F(\phi) = 0$ или $F(\phi) = 2\pi$, и гладкую область между ними, см. рис. 8.4. Гладкая область задается уравнением (8.18) и зависит от формы колебаний f . Mirollo and Strogatz [1990b] показали, что, если f монотонна и вогнута вниз (т.е. $f' > 0$, $f'' < 0$), то гладкая часть отображения F строго растягивающая (т.е. производная больше единицы). Это означает, что невозможны другие аттракторы отображения Пуанкаре, кроме $\phi = 0$. Притягивающая точка $\phi = 0$ в точности соответствует

¹⁰ Мы пишем здесь 2π , а не ноль, чтобы показать, что два сброса осциллятора 2 приходятся на один сброс осциллятора 1.

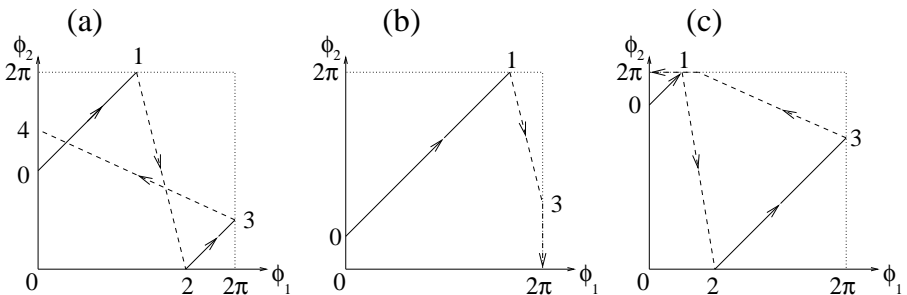


Рис. 8.3. Построение отображения Пуанкаре для связанных осцилляторов типа накопление – сброс. Сплошные линии изображают медленные движения (накопление); пунктирные линии – быстрые движения (сброс). Показаны три возможных типа траекторий, начинающихся в $\phi_1 = 0$. В (a) осцилляторы стреляют не одновременно. В (b) сброс осциллятора 2 вызывает сброс осциллятора 1. В (c) сброс осциллятора 1 вызывает сброс осциллятора 2.

идеально синхронному состоянию, когда оба осциллятора стреляют одновременно.

Описанное выше построение может быть легко обобщено на случай различных (в частности, имеющих различные автономные частоты) осцилляторов. Тогда медленное движение в уравнении 8.3 будет описываться прямой линией, не параллельной диагонали, а имеющей наклон ω_1/ω_2 . Отображение Пуанкаре будет иметь теперь гладкую часть (которая, как и в (8.18), представлена суперпозицией теперь уже различных отображений сброса) и часть, где новая фаза (modulo 2π) равна нулю, см. рис. 8.4b. Устойчивая периодическая орбита этого отображения обязательно проходит через точку $\phi_1 = \phi_2 = 0$, т.е. существует в точности одно событие совпадающих сбросов. В качестве примера, на рис. 8.5 показана синхронизация порядка 2 : 3

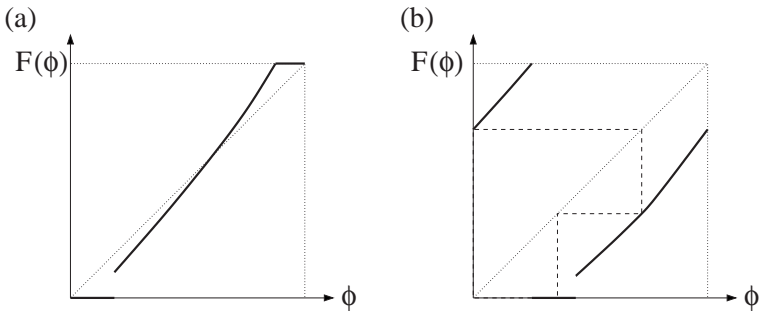


Рис. 8.4. Негладкое отображение окружности, описывающее синхронизацию релаксационных осцилляторов. (a) Осцилляторы идентичны; единственный аттрактор – устойчивая точка $\phi = 0$. (b) Осцилляторы имеют различные автономные частоты. На притягивающей периодической орбите (пунктирная линия) только один сброс происходит одновременно в обоих осцилляторах; другие сбросы не совпадают.

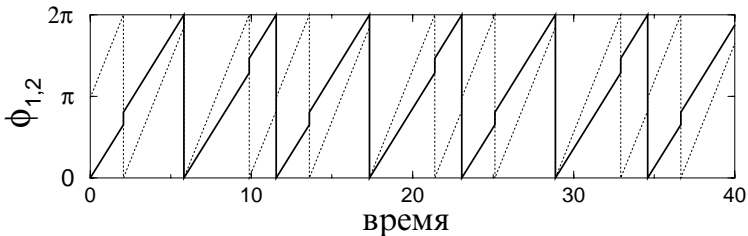


Рис. 8.5. Захват фазы неидентичных релаксационных осцилляторов с соотношением автономных частот $\omega_1/\omega_2 = 1.55$. Наблюдается синхронизация порядка 2 : 3; соответствующая этому режиму периодическая траектория отображения показана на рис. 8.4b.

для систем с соотношением автономных частот $\omega_1/\omega_2 = 1.55$.

Свойства такого негладкого отображения Пуанкаре сходны со свойствами гладкого (см. раздел 7.3). Основное отличие состоит в структуре «чертовой лестницы» и языков Арнольда. Как и в гладком случае, возможны все рациональные и иррациональные числа вращения, но мера иррациональных чисел (в пространстве параметров) теперь нулевая: ситуации с квазипериодическими режимами в отображении на рис. 8.4 исключительны; типичными являются периодические орбиты [Boyd 1985; Veerman 1989]. Это следует из сильной диссипации рассмотренной модели «накопление – сброс».

8.4 Библиографические заметки

Динамике связанных систем посвящена обширная литература. В последнее время основное внимание привлекает сложное поведение и возникновение хаоса за счет связи. В теоретических [Waller and Kapral 1984; Pastor-Díaz *et al.* 1993; Volkov and Romanov 1994; Pastor-Díaz and López-Fraguas 1995; Tass 1995; Kurrer 1997; Lopez-Ruiz and Pomeau 1997; Reddy *et al.* 1999] и экспериментальных [Бондаренко и др. 1989; Thornburg *et al.* 1997] работах заинтересованный читатель найдет дальнейшие ссылки. Связанные ротаторы интенсивно рассматривались в связи с изучением цепочки контактов Джозефсона [Jain *et al.* 1984; Saitoh and Nishino 1991; Valkering *et al.* 2000]. В заключение, упомянем несколько недавних работ, где были рассмотрены различные обобщения модели «накопление – сброс» [Kirk and Stone 1997; Ernst *et al.* 1998; Coombes and Bressloff 1999; S. H. Park *et al.* 1999b].

Глава 9

Синхронизация в системах с шумом

В предыдущих главах мы рассматривали синхронизацию в чисто детерминированных системах, пренебрегая всеми случайностями и флуктуациями. Здесь мы обсудим, как эти явления могут быть включены в картину синхронизации. Мы начнем с описания влияния шума на автоколебания и покажем, что шум приводит к диффузии фазы, тем самым разрушая периодичность. Затем мы рассмотрим синхронизацию периодической внешней силой в присутствии шума. Наконец, мы обсудим взаимную синхронизацию двух зашумленных автогенераторов.

9.1 Автоколебания в присутствии шума

Ни один осциллятор не совершенен: любые часы нужно время от времени подводить, некоторые даже довольно часто. Нерегулярность автоколебаний может быть обусловлена различными факторами, для простоты мы их все будем обозначать как шум. Для детального анализа автоколебаний с шумом нужно позаботиться о правильной математической модели, которая включала бы флуктуации различной природы (технические, тепловые и т.д.). Для многих типов автоколебаний такие детальные модели существуют (см., например, [Малахов 1968]); здесь же мы остановимся только на основных эффектах.

Начнем с описания автоколебаний в присутствии внешнего шума.

Если вернуться к основным уравнениям, описывающим вынужденные колебания (см. главу 7), то легко увидеть, что приближение фазовой динамики можно использовать и при случайной силе, поскольку при выводе уравнения (7.15) никакой регулярности силы не предполагалось. Поэтому мы можем использовать это уравнение и для внешнего шума:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, t), \quad (9.1)$$

где Q – это 2π -периодическая функция ϕ и произвольная функция времени.

В простейшем случае стохастический член в фазовом уравнении (9.1) вообще не зависит от фазы, так что можно записать

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \xi(t), \quad (9.2)$$

где $\xi(t)$ есть стационарный случайный сигнал. Поскольку мгновенная частота $\dot{\phi}$ (скорость изменения фазы) есть случайная функция времени, фаза совершает случайные блуждания, т.е. имеет место диффузионный процесс. Решение (9.2) записывается как

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \int_0^t \xi(\tau) d\tau, \quad (9.3)$$

и из него можно легко найти статистические характеристики диффузии фазы. В предположении, что среднее значение шума равно нулю (если нет, то его можно объединить с частотой ω_0), усредненная по ансамблю фаза в момент времени t есть $\phi_0 + \omega_0 t$. Дисперсию можно получить усреднением квадрата от (9.3), при больших временах справедлива обычная формула Грина–Кубо для диффузионных процессов (см, например, [van Kampen 1992])

$$\langle (\phi(t) - \phi_0 - \omega_0 t)^2 \rangle \propto tD, \quad D = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) dt, \quad (9.4)$$

где $K(t) = \langle \xi(\tau)\xi(\tau+t) \rangle$ есть корреляционная функция шума.

Диффузия фазы означает, что колебания не являются более строго периодическими. Качество автоколебаний измеряется постоянной диффузии D , оно служит важной характеристикой часов и электронных автогенераторов. В случае δ -коррелированного гауссовского шума

$$K(t) = \langle \xi(\tau)\xi(\tau+t) \rangle = 2\sigma^2\delta(t), \quad (9.5)$$

распределение фазы также гауссовское с дисперсией $2\sigma^2 t$ (так что постоянная диффузии равна интенсивности шума $D = 2\sigma^2$). Это

позволяет вычислить автокорреляционную функцию естественной наблюдаемой $x(t) = \cos \phi$. Простые вычисления приводят к экспоненциально затухающим корреляциям

$$\langle x(t)x(t + \tau) \rangle = \frac{1}{2} \exp[-\frac{1}{2}\tau\sigma^2] \cos \omega_0 \tau,$$

которым соответствует лоренцевский пик в спектре мощности, максимум которого приходится на среднюю частоту ω_0 . Ширина пика в спектре равна σ^2 , т.е. пропорциональна постоянной диффузии фазы.

9.2 Синхронизация в присутствии шума

9.2.1 Качественная картина ланжевеновской динамики

Как мы видели в разделе 7.1, основные свойства динамики фазы могут быть описаны усредненным уравнением (ср. с (7.24) и (8.6)):

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon q(\psi), \quad (9.6)$$

где ψ – разность между фазой автоколебаний и фазой внешней силы. Чтобы учесть шум, представляется естественным включить флуктуационный член в правую часть уравнения, т.е. записать его в форме уравнения Ланжевена

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon q(\psi) + \xi(t) \quad (9.7)$$

с аддитивным шумом $\xi(t)$. Уравнение (9.7) описывает таким образом автоколебания в присутствии двух сил – периодической и стохастической.

Физически удобно интерпретировать ланжевеновскую динамику (9.7) как случайные блуждания «частицы» в одномерном потенциале (см. рис. 9.2 ниже). Действительно, детерминированную часть силы в правой части (9.7) можно записать как

$$-\nu + \varepsilon q(\psi) = -\frac{dV}{d\psi}, \quad V(\psi) = \nu\psi - \varepsilon \int^{\psi} q(x) dx. \quad (9.8)$$

Более того, движение частицы передемпфировано, поскольку у фазы ψ нет инерции.¹ В отсутствие шума частица либо сидит в минимуме

¹ Движение частицы в среде с трением обычно подчиняется уравнению $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + dV/dx = 0$ (ср. с (7.69) и (7.71)), но, если затухание очень велико ($\gamma \rightarrow \infty$), то второй производной можно пренебречь и получить уравнение вида (9.6). То же самое уравнение получается в пределе $m \rightarrow 0$.

потенциала, либо скатывается вниз (рис. 9.1). Потенциал с минимумами означает существование состояний равновесия² и соответствует синхронизации, в то время как монотонный потенциал отвечает квазипериодическому движению с вращающейся фазой (см. также обсуждение этой ситуации на качественном уровне в разделе 3.4).

Шум слабо влияет на квазипериодический режим: здесь средняя скорость частицы не равна нулю, и она слабо меняется в присутствии шума. Влияние же шума на синхронное состояние может быть весьма сильным. Действительно, шум может выбить частицу из устойчивого состояния; если он достаточно велик, то он может перевести «частицу» в соседнее устойчивое положение. При этом фаза меняется на $\pm 2\pi$, это явление называют **проскоком фазы** (phase slip), оно показано на рис. 9.2. Чтобы произошел проскок, частица должна преодолеть потенциальный барьер ΔV_{\pm} , так что вероятность проскока может быть мала. В общем случае вероятность проскока растет с интенсивностью шума и убывает с высотой барьера, поэтому, если $\nu \neq 0$, то вероятности проскоков $+2\pi$ и -2π различны, и частица в среднем движется в одну сторону. Наблюдаемая при этом разность частот $\Omega_{\psi} = \langle \dot{\psi} \rangle$ не равна нулю.³ Изменение фазы во времени напоминает случай чисто детерминированной системы вблизи порога синхронизации (ср. рис. 9.2 с рис. 7.5), только теперь проскоки фазы

² Для простоты мы рассматриваем случай только одного минимума на периоде $[0, 2\pi)$.

³ Для удобства здесь через $\Omega_{\psi} = \langle \dot{\psi} \rangle$ обозначена разность между наблюдаемой частотой колебаний и частотой внешней силы или между наблюдаемыми частотами связанных осцилляторов.

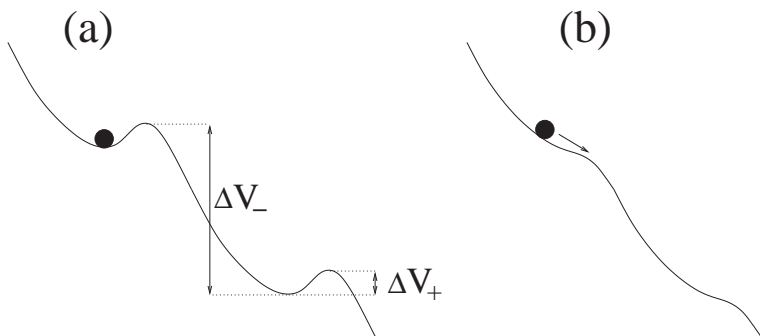


Рис. 9.1. Фаза как частица в наклонном потенциале $V(\psi)$. (a) Случай синхронизации: частица сидит в минимумах потенциала. (b) Вне области синхронизации частица скатывается вниз. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

происходят нерегулярно.

При качественном описании процессов необходимо различать случаи ограниченного и неограниченного шума. При неограниченном (например, гауссовском) шуме возможны очень большие флуктуации, способные вызвать проскок, даже если барьер ΔV велик. В этой ситуации проскоки возникают при сколь угодно малой интенсивности шума, и при любом ненулевом ν вероятности проскока вправо и влево различны. Поэтому разность частот Ω_ψ есть монотонно убывающая функция ν и область синхронизации (область, где $\Omega_\psi = 0$) исчезает. При ограниченном шуме наблюдается другой сценарий. Теперь при малом (по сравнению с высотой барьера) шуме проскоки невозможны, и наблюдаемая разность частот в точности равна нулю. Только если барьеры малы, то наблюдаются проскоки и синхронизация в общем случае разрушается. Эти две возможности показаны на рис. 9.3.

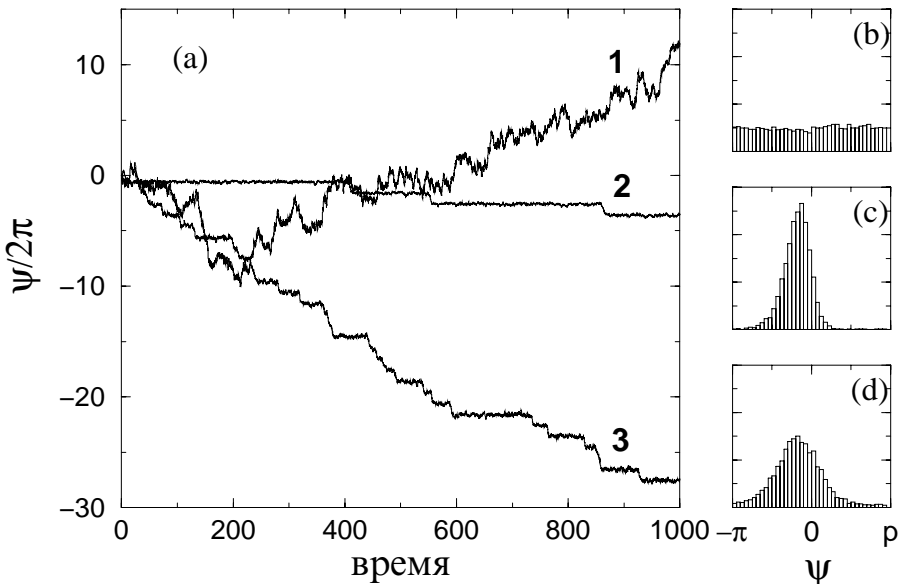


Рис. 9.2. (а) Картина ланжевеновской динамики при различных амплитуде шума σ^2 и расстройке ν . Кривая 1: диффузия фазы в «свободных» автоколебаниях ($\varepsilon = 0$). Кривая 2: малый шум и небольшая расстройка. Кривая 3: та же расстройка, что и в случае 2, но при большем шуме; проскоки происходят чаще и фаза вращается быстрее. На (b)–(d) показаны гистограммы фазы, взятой по модулю 2π для кривых 1–3. При свободной диффузии получается равномерное распределение. В остальных случаях имеет максимум вблизи устойчивого значения фазы для системы без шума. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

Ввиду сказанного выше уместно обсудить определение понятия синхронизации в системах с шумом. Если определять синхронизацию как строгое совпадение частот и отсутствие проскоки фазы, то случай, показанный на рис. 9.3b, этому определению удовлетворять не будет. Нам представляется разумным несколько ослабить условие строгого совпадения частот, если приходится иметь дело с системами с флуктуациями, и считать ситуацию как на рис. 9.2 и 9.3b, при которой частоты очень близки, синхронной или почти синхронной.

К рассмотрению ланжевеновской динамики можно подойти и с другой стороны, задавшись вопросом: как периодическая сила влияет на флуктуации фазы. Из качественной картины рис. 9.1 ясно, что сила подавляет не только среднюю скорость частицы, но и диффузию. Постоянная диффузии может обращаться в ноль при ограниченном шуме, но даже при неограниченном гауссовском шуме она будет экспоненциально мала в центре области синхронизации — ниже мы покажем это для случая белого шума.

9.2.2 Количественное описание в случае белого шума

В этом разделе мы дадим количественное описание синхронизации в присутствии флуктуаций. Для этого необходимо рассмотреть шум с хорошими статистическими свойствами. Если он гауссовский и δ -коррелированный, то можно применить мощный метод, основанный на теории Фоккера–Планка [Стратонович 1963; Risken 1989; Gardiner 1990], поэтому мы будем во всем этом разделе предполагать шум именно таким. Среднее значение шума ξ предполагается равным нулю (иначе его можно включить в расстройку частоты

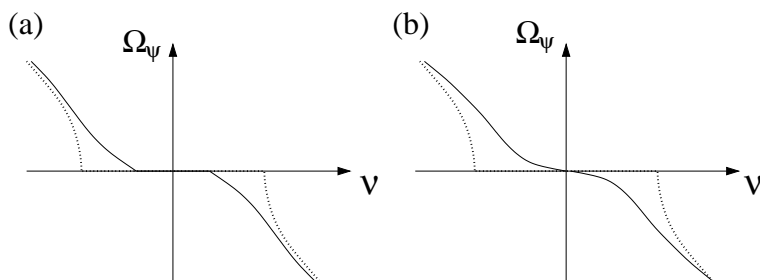


Рис. 9.3. Зависимость разности частот от расстройки для ограниченного (а) и неограниченного (б) шума. Горизонтальный участок (область синхронизации) сохраняется при малом ограниченном шуме, но исчезает при неограниченном шуме.

ν : $\nu \rightarrow \nu - \langle \dot{\xi} \rangle$, его интенсивность характеризуется единственным параметром σ^2 , см. (9.5). Мы будем рассматривать стохастическое дифференциальное уравнение (9.7) в смысле Стратоновича. Тогда плотность распределения вероятности фазы $P(\psi, t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка (УФП) [Стратонович 1963; Risken 1989; Gardiner 1990]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial[(-\nu + \varepsilon q(\psi))P]}{\partial \psi} + \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2}. \quad (9.9)$$

Эквивалентная форма записи

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \psi} = 0$$

получается, если ввести поток S как

$$S = -P \frac{dV}{d\psi} - \sigma^2 \frac{\partial P}{\partial \psi}, \quad (9.10)$$

здесь V – потенциал, определенный согласно (9.8).

Будем искать стационарную (не зависящую от времени) плотность вероятности. Стационарное решение УФП (9.9) должно быть 2π -периодично по ψ , и легко проверить, что следующее выражение удовлетворяет и уравнению (9.9), и этому условию:

$$\bar{P}(\psi) = \frac{1}{C} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} \exp\left(\frac{V(\psi') - V(\psi)}{\sigma^2}\right) d\psi'. \quad (9.11)$$

Постоянная C находится из условия нормировки $\int_0^{2\pi} \bar{P}(\psi) d\psi = 1$. Используя решение (9.11), можно найти постоянный поток вероятности S

$$S = \frac{\sigma^2}{C} (1 - e^{2\pi\nu\sigma^{-2}}),$$

который непосредственно связан со средней разностью частот Ω_ψ . Действительно, вычисляя $\langle \dot{\psi} \rangle$ по уравнению Ланжевена (9.7) и используя (9.10), получаем

$$\Omega_\psi = \langle \dot{\psi} \rangle = \langle -\nu + \varepsilon q(\psi) \rangle = \int_0^{2\pi} -\frac{dV}{d\psi} \bar{P}(\psi) d\psi = 2\pi S.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать простейший вид взаимодействия $q(\psi) = \sin \psi$. Тогда постоянные S, C выражаются через функции Бесселя комплексного порядка [Стратонович 1963], но для практических численных расчетов намного удобнее представление

решения в виде цепной дроби [Малахов 1968; Risken 1989]. Представляя $\bar{P}(\psi)$ в виде ряда Фурье

$$\bar{P} = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_n e^{in\psi}$$

и подставляя это выражение в (9.10), получим систему бесконечного числа уравнений

$$-(in\sigma^2 + \nu)P_n + \frac{\varepsilon}{2i}(P_{n-1} - P_{n+1}) = S\delta_{n,0}. \quad (9.12)$$

Из условия нормировки следует $P_0 = 1/2\pi$, а то, что \bar{P} — действительно, означает, что $P_{-n} = P_n^*$. Переписывая (9.12) при $n > 0$ как

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{1}{(\nu + in\sigma^2)\frac{2i}{\varepsilon} + \frac{P_{n+1}}{P_n}}$$

и итерируя это соотношение, начиная с $n = 1$, получаем решение в виде быстро сходящейся (и поэтому очень удобной при численном анализе) цепной дроби

$$P_1 = \frac{(2\pi)^{-1}}{2\frac{i\nu - \sigma^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2\frac{i\nu - 2\sigma^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2\frac{i\nu - 3\sigma^2}{\varepsilon} + \dots}}} \quad (9.13)$$

Из (9.12) при $n = 0$ получаем соотношение между первой гармоникой P_1 и потоком S :

$$S = -\frac{\nu}{2\pi} - \varepsilon \operatorname{Im}(P_1).$$

Отсюда следует выражение для средней разности частот:

$$\Omega_\psi = -\nu - 2\pi\varepsilon \operatorname{Im}(P_1).$$

Интересно отметить, что действительная часть P_1 дает ляпуновский показатель динамики фазы. Действительно, линеаризуя (9.7) при $q(\psi) = \sin \psi$, получим

$$\frac{d\delta\psi}{dt} = \varepsilon \cos \psi \cdot \delta\psi,$$

и средний логарифм возмущения растет как

$$\lambda = \left\langle \frac{d \ln \delta\psi}{dt} \right\rangle = \varepsilon \langle \cos \psi \rangle = 2\pi \operatorname{Re}(P_1).$$

Ляпуновский показатель характеризует устойчивость фазы. При нулевом шуме ($\sigma^2 = 0$) только синхронное состояние устойчиво, в то

время как в квазипериодическом состоянии ляпуновский показатель обращается в ноль. При $\sigma^2 > 0$ качественное различие между этими режимами исчезает: ляпуновский показатель отрицателен при всех расстройках ν .

Зависимость средней разности частот и ляпуновского показателя от параметров представлена на рис. 9.4. (Из выражения (9.13) видно, что величина P_1 зависит фактически только от двух параметров ν/ε и σ^2/ε , поэтому мы зафиксировали ε и показываем на рис. 9.4 однопараметрическое семейство кривых.) В пределе $\sigma^2 \rightarrow 0$ получается чисто детерминированное решение, такое же, как в главе 7. Шум размывает горизонтальный участок в зависимости разности частот Ω_ψ от расстройки ν , хотя при малой его интенсивности изменения в центре области синхронизации экспоненциально малы.

Ляпуновский показатель всегда отрицателен, как в области синхронизации вокруг $\nu = 0$, так и в области, где детерминированная динамика квазипериодическая. Таким образом, динамика фазы устойчива по отношению к возмущениям начальных условий. Это приводит к возможности синхронизовать идентичные осцилляторы, воздействуя на них общим шумом (см. раздел 15.2).

Довольно полное статистическое описание динамики фазы можно дать в случае слабого шума [Стратонович 1963]. В этом случае про-

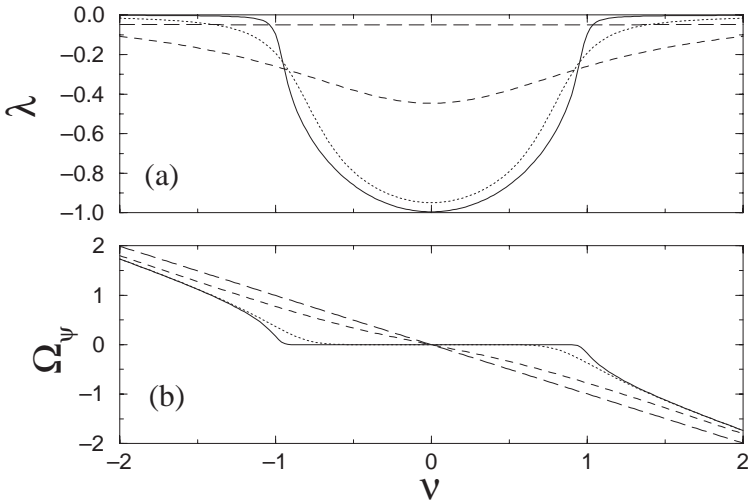


Рис. 9.4. Ляпуновский показатель (а) и средняя частота (б) автоколебаний с шумом и внешней силой при $\varepsilon = 1$ и различных амплитудах шума (сплошная линия: $\sigma^2 = 0.01$; пунктир: $\sigma^2 = 0.1$; штриховая линия: $\sigma^2 = 1$; длинные штрихи: $\sigma^2 = 10$).

скоки фазы редки и их можно рассматривать как редкие изолированные события, длительность которых много меньше интервала между ними (см. кривую 2 на рис. 9.2). Динамику фазы можно представить как последовательность независимых $+2\pi$ и -2π скачков. Поскольку предыдущий скачок быстро «забывается», весь процесс можно аппроксимировать пуассоновским и охарактеризовать единственным параметром – частотой скачков. Если расстройка ν не равна нулю, то частоты скачков в положительном и отрицательном направлениях, G_+ и G_- , различны. Средняя разность частот колебаний выражается через частоты скачков как средняя скорость дрейфа фазы

$$\Omega_\psi = 2\pi(G_+ - G_-),$$

а дисперсия распределения фазы

$$\langle(\psi - \langle\psi\rangle)^2\rangle = (2\pi)^2(G_+ + G_-)t$$

дает постоянную диффузии. Приведенные выше формулы следуют из того, что числа скачков в положительном (отрицательном) направлении в течение промежутка времени t есть случайные числа со средним $G_\pm t$ и дисперсией $G_\pm t$ (процесс пуассоновский!); поскольку положительные и отрицательные скачки статистически независимы, средние и дисперсии можно просто складывать. Точные выражения для G_\pm приведены в книге Стратоновича [1963], они получаются как средние времена, за которые броуновская частица преодолевает барьеры потенциала. Диффузия через барьер при слабом шуме задается известной формулой Крамерса [Risken 1989; Gardiner 1990], согласно которой вероятность преодолеть барьер экспоненциально зависит от его высоты (см. рис. 9.1):

$$G_\pm \propto \exp\left(\frac{-\Delta V_\pm}{\sigma^2}\right).$$

В типичном случае одна из вероятностей перехода много больше другой, при этом наблюдается последовательность проскоков фазы, для которой разность частот и постоянная диффузии случайных блужданий фазы – величины одного порядка. Только в центре области синхронизации, где потенциальные барьеры ΔV_\pm равны и средняя разность частот Ω_ψ равна нулю, наблюдаются случайные блуждания, в которых скачки в положительном и отрицательном направлениях происходят с равной вероятностью. В этом случае постоянная диффузии экспоненциально мала при стремящейся к нулю интенсивности шума.

9.2.3 Синхронизация квазигармонической флуктуирующей силой

Ниже мы обсудим автоколебания под действием квазигармонической (узкополосной) стохастической силы. Подобная задача естественным образом возникает для систем фазовой автоподстройки (раздел 7.5). Действительно, если сигнал, несущий определенную информацию, необходимо демодулировать, используя эффект синхронизации, то ясно, что этот сигнал нельзя рассматривать как чисто периодический, а необходимо считать сигналом с медленно меняющейся амплитудой и частотой. Как обычно в теории передачи информации, эти изменения можно считать случайными, но относительно медленными (по сравнению с периодом колебаний). Такой подход как раз и приводит к задаче синхронизации узкополосным случайным сигналом.

Поскольку модуляция частоты и амплитуды медленная, можно использовать основную модель для фазовой динамики (9.6), в которой расстройку ν и амплитуду ε следует считать случайными функциями времени:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu(t) + \varepsilon(t)q(\psi). \quad (9.14)$$

При дальнейшем анализе флуктуаций мы будем предполагать изменения ν и ε малыми. Тогда можно записать

$$\nu = \nu_0 + \Delta\nu(t), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon(t), \quad \psi = \psi_0 + \Delta\psi(t).$$

Предполагая далее простейшую форму нелинейного члена $q(\psi) = -\sin \psi$, получаем после линеаризации

$$\frac{d\Delta\psi}{dt} = -\sqrt{\varepsilon_0^2 - \nu_0^2}\Delta\psi + \Delta\nu(t) + \frac{\nu_0}{\varepsilon_0}\Delta\varepsilon(t).$$

Из этого линейного уравнения можно выразить спектр мощности процесса $\Delta\psi(t)$ через спектры $\nu(t)$ и $\varepsilon(t)$, если предположить статистическую независимость флуктуаций частоты и амплитуды:

$$S_\psi(\varsigma) = \frac{S_\nu(\varsigma) + \nu_0^2 \varepsilon_0^{-2} S_\varepsilon(\varsigma)}{\varepsilon_0^2 - \nu_0^2 + \varsigma^2}.$$

Эта формула (ср. с [Ланда 1980]) показывает, что флуктуации фазы остаются ограниченными в центре области синхронизации ($|\nu_0| < |\varepsilon_0|$) и расходятся на ее краях. Следовательно, при заданных статистических характеристиках модуляции существует область, где проски фазы не наблюдаются, аналогично ситуации, представленной

на рис. 9.3а. В контексте фазовой автоподстройки это означает почти идеальную демодуляцию входного сигнала. Вблизи границ области синхронизации проскоки неизбежны – здесь система работает с ошибками.

Напомним читателю, что переменная ψ есть разность фаз автоколебаний и внешней силы (см. (7.22)), поэтому захват фазы узкополосным сигналом не приводит к подавлению ее диффузии: фаза автоколебаний просто повторяет случайные изменения фазы внешней силы.

9.2.4 Взаимная синхронизация автоколебаний с шумом

Мы рассматривали влияние шума на синхронизацию автоколебаний периодическим воздействием. Как уже отмечалось в главе 8, уравнения для разности фаз двух связанных осцилляторов имеют точно такой же вид. Поэтому поведение разности фаз двух осцилляторов с шумом описывается изложенной выше теорией. Однако в случае двух осцилляторов представляет интерес не только разность фаз. Во многих приложениях (например там, где осцилляторы используются в качестве часов) важно качество колебаний, т.е. постоянные диффузии каждой из фаз.

Здесь мы покажем, как связь может подавить диффузию фаз. Рассмотрим, следуя Малахову [1968], синхронизацию двух автоколебательных систем с шумом в фазовом приближении:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \omega_1 + \varepsilon_1 \sin(\phi_2 - \phi_1) + \xi_1, \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 + \varepsilon_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + \xi_2.\end{aligned}$$

Ниже интенсивности флуктуаций

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2\sigma_i^2 \delta_{ij} \delta(t - t')$$

и параметры связи считаются различными, а частоты одинаковыми: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Для разности фаз $\psi = \phi_1 - \phi_2$ и для их «суммы» $\theta = \varepsilon_2 \phi_1 + \varepsilon_1 \phi_2$ получаем

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin \psi + \xi_1 - \xi_2, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon_2 \xi_1 + \varepsilon_1 \xi_2 + \omega(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).\end{aligned}$$

Уравнение для ψ описывает взаимную синхронизацию осцилляторов, оно эквивалентно уравнению (9.7). Это означает, что для разности фаз применима развитая выше в разделе 9.2 теория. Не

повторяя ее здесь, отметим только, что диффузия разности фаз ψ экспоненциально мала при сильной связи. В противоположность этому, для переменной θ нет возвращающей силы, и она демонстрирует случайные блуждания с постоянной диффузии

$$D_\theta = 2(\varepsilon_2^2 \sigma_1^2 + \varepsilon_1^2 \sigma_2^2),$$

в которую вносят вклад обе случайных силы.

Представляя фазы автоколебаний как

$$\phi_1 = \frac{\varepsilon_1 \psi + \theta}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad \phi_2 = \frac{-\varepsilon_2 \psi + \theta}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

и пренебрегая разностью фаз ψ по сравнению с суммой θ (это можно сделать, поскольку постоянные диффузии этих величин сильно различаются), получим для фаз осцилляторов равные постоянные диффузии

$$D_1 = D_2 = D = 2(\varepsilon_1^2 \sigma_2^2 + \varepsilon_2^2 \sigma_1^2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{-2}. \quad (9.15)$$

Эту общую постоянную диффузии нужно сравнить с величинами, характеризующими невзаимодействующие автоколебания:

$$D_1^0 = 2\sigma_1^2, \quad D_2^0 = 2\sigma_2^2.$$

Рассмотрим сначала случай однонаправленной связи: $\varepsilon_1 = 0$. Тогда $D = 2\sigma_1^2 = D_1^0$: качество синхронизованного режима такое же, как у вынуждающей системы. Флуктуации во втором осцилляторе, вызванные шумом ξ_2 , подавлены вследствие синхронизации. Поэтому, если качество первого осциллятора выше, то он может улучшить второй: этот эффект применяется для получения мощных качественных колебаний. Исследуя формулу (9.15), можно увидеть, что даже при взаимной связи возможно увеличение качества колебаний, если влияние более качественного осциллятора (т.е. осциллятора с меньшим шумом σ^2) сильнее, чем влияние менее качественного. Например, если первый осциллятор качественнее (т.е. $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$) и его влияние сильнее (т.е. $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$), то получающаяся постоянная диффузии уменьшается и качество колебаний возрастает.

9.3 Библиографические заметки

Теория синхронизации в осцилляторах с шумом была развита уже к 1960-м годам и описана в книгах [Стратонович 1963; Малахов 1968; Ланда 1980; Risken 1989]. В последние годы в основном исследовались ансамбли осцилляторов и хаотические системы, мы приводим соответствующие ссылки в главах 10 и 12.

Глава 10

Фазовая синхронизация хаотических систем

К настоящему моменту мы рассмотрели синхронизацию периодических осцилляторов, также и при наличии шума, и описали эффекты захвата фаз и частот. В этой главе мы обсудим аналогичные эффекты в хаотических системах. Основная идея состоит в том, что, по крайней мере для некоторых систем, хаотический сигнал может рассматриваться как колебания с хаотически модулированной амплитудой и более или менее равномерно вращающейся фазой. Средняя скорость этого вращения определяет характерный «период» хаотической системы, который может быть подстроен за счет воздействия слабой силы или слабого взаимодействия с другим осциллятором. Таким образом, мы ожидаем, что захват фаз и частот может наблюдаться и для систем этого класса. Важно отметить, что динамика амплитуд остается хаотической и практически неизменной воздействием/взаимодействием.

Эффекты, обсуждаемые в этой главе, были изначально названы «фазовая синхронизация», чтобы отличить их от других явлений в связанных (подверженных действию силы) хаотических системах (эти явления рассматриваются в части III). Так как содержание этой главы есть естественное развитие теории, изложенной в предыдущих разделах, то мы в дальнейшем называем описанные здесь эффекты просто синхронизацией.

В следующем разделе мы вводим понятие фазы для хаотических систем. Далее, мы представляем эффекты захвата фазы хаотических

осцилляторов и обсуждаем их со статистической и топологической точек зрения. Мы рассматриваем как захват хаотического осциллятора периодической силой, так и взаимную синхронизацию двух неидентичных хаотических систем. Наше изложение предполагает, что читатель знаком с основами теории хаоса.

10.1 Фаза хаотического осциллятора

10.1.1 Понятие фазы

Первая проблема в распространении основных идей теории синхронизации на случай хаотических автоколебательных систем состоит в том, чтобы ввести для этих систем понятие фазы. Для периодических колебаний мы определили фазу как переменную, параметризующую движение по предельному циклу и растущую пропорционально времени (см. раздел 7.1). Введенная таким способом фаза вращается равномерно и соответствует нейтрально устойчивому (т.е. имеющему нулевой ляпуновский показатель) направлению в фазовом пространстве. Наша цель – обобщить это определение таким образом, чтобы:

- (i) оно правильно давало фазу для периодических орбит (и, следовательно, удовлетворяло очевидному требованию включать в себя старый случай) и давало разумные результаты для многооборотных периодических орбит, вложенных в хаотический аттрактор;¹
- (ii) оно давало фазу, соответствующую сдвигу изображающей точки вдоль потока, а, следовательно, и нулевому ляпуновскому показателю;
- (iii) получаемая фаза имела ясный физический смысл и могла быть легко вычислена.

По-видимому, не существует общего и строгого способа удовлетворить эти требования для произвольной хаотической системы. Мы представляем здесь подход, который, по-крайней мере частично, отвечает сформулированным выше условиям.

¹ Напомним читателю, что хаотическое движение может быть представлено как последовательность движений вдоль неустойчивых периодических орбит (НПО), вложенных в странный аттрактор; обсуждение и ссылки даны в разделе 10.2. Свойства фазы в терминах НПО рассмотрены в разделе 10.2.3.

Предположим, что мы можем сконструировать отображение Пуанкаре для автономной хаотической системы с непрерывным временем, т.е. мы можем выбрать секущую поверхность так, что она трансверсально пересекается всеми траекториями хаотического (странного) аттрактора. Тогда для каждого отрезка траектории между двумя пересечениями с поверхностью мы определим фазу как линейную функцию времени, так что фаза возрастает на 2π с каждым возвращением на секущую поверхность:

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t < t_{n+1}. \quad (10.1)$$

Здесь t_n — это время n -ого пересечения секущей поверхности. Очевидно, что это определение неоднозначно, так как оно существенно зависит от выбора сечения Пуанкаре. Тем не менее, введенная таким способом фаза удовлетворяет перечисленным выше требованиям.

- (i) Для периодической траектории, которая только один раз пересекает секущую поверхность, фаза (10.1) полностью соответствует уравнению (7.3). Это не верно для периодических орбит, имеющих несколько пересечений с поверхностью: для таких траекторий фаза (10.1) есть кусочно-линейная функция времени. Для каждой конкретной периодической траектории можно выбрать малый участок секущей поверхности вокруг нее и определить фазу, удовлетворяющую уравнению (7.3), но это невозможно сделать глобально, т.е. для всех периодических орбит. Важно отметить, что для периодической орбиты с периодом T набег фазы в соответствии с уравнением (10.1) равен $\phi(T) - \phi(0) = 2\pi\mathcal{N}$, где \mathcal{N} — число пересечений орбиты с секущей поверхностью. Следовательно, приведенное определение фазы дает правильное значение для частоты (и поэтому мы считаем это определение разумным). Отметим, что \mathcal{N} есть не что иное, как период соответствующей орбиты отображения Пуанкаре; мы называем его топологическим периодом (это понятие важно для раздела 10.2).
- (ii) Локально фаза (10.1) пропорциональна времени, поэтому ее возмущения не нарастают и не убывают. Следовательно, фаза (10.1) соответствует нулевому ляпуновскому показателю.
- (iii) Фаза (10.1) учитывает «обороты» хаотического осциллятора, где обороты определяются выбором отображения Пуанкаре: каждая итерация отображения эквивалентна одному «периоду»

системы с непрерывным временем. Такую фазу легко вычислить; более того, если нас интересует только описание динамики в терминах захвата частот, то мы можем просто вычислить (среднюю) частоту как число возвратов к секущей Пуанкаре (т.е. число «периодов») за единицу времени.

Фаза является важной компонентой часто используемого в нелинейной динамике сведения системы с непрерывным временем к дискретному отображению Пуанкаре (см., например, уравнения (10.7) и (10.8) ниже). В математической литературе обычно идут другим путем: начав с отображения, переходят к непрерывному времени, используя конструкцию специального потока [Корнфельд и др. 1982].

Чтобы не быть слишком абстрактными, проиллюстрируем этот подход двумя моделями – основными прототипами нелинейной динамики, а именно, осцилляторами Рёсслера [Rössler 1976] и Лоренца [Lorenz 1963]. Оба являются трехмерными диссипативными системами со странным аттрактором.

Простой случай: система Рёсслера

Динамика системы Рёсслера

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + 0.15y, \\ \dot{z} &= 0.4 + z(x - 8.5), \end{aligned} \quad (10.2)$$

показана на рис. 10.1. Временные зависимости $x(t)$ и $y(t)$ могут рассматриваться как «почти синусоидальные» хаотически модулированные колебания, в то время как $z(t)$ есть хаотическая последовательность импульсов. Подходящим выбором секущей Пуанкаре для вычисления фазы в соответствии с уравнением (10.1) может быть, например, полуплоскость $y = 0$, $x < 0$. Проекция фазового портрета на плоскость (x, y) выглядит размытым предельным циклом с хорошо определенными вращениями вокруг начала координат. В этом и подобных случаях можно также ввести угловую переменную θ путем перехода к полярным координатам (с центром, совпадающим с центром вращения, ср. с [Goryachev and Kapral 1996; Pikovsky *et al.* 1996]):

$$\theta = \tan^{-1}(y/x). \quad (10.3)$$

Угловая переменная θ может рассматриваться как легко вычисляемая оценка фазы ϕ ; для данного примера различие между θ и ϕ пренебрежимо мало [Pikovsky *et al.* 1996].

Отметим, что хотя фаза ϕ и подобная фазе переменная θ не совпадают микроскопически (т.е. на масштабах времени меньших характерного периода колебаний, см. рис. 10.3), они дают одинаковые средние частоты: частота, определенная как среднее по времени от $\langle d\theta/dt \rangle$, совпадает с непосредственным определением средней частоты как среднего числа пересечений секущей Пуанкаре за единицу времени. Фаза может быть также определена по «колебательной» наблюдаемой (как x , так и y одинаково подходят для этой цели) и с помощью метода аналитического сигнала, основанного на преобразовании Гильберта; этот метод особенно полезен для экспериментальных приложений (см. подробнее главу 6 и приложение П2).

Нетривиальный случай: система Лоренца

Странный аттрактор системы Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= 28x - y - xz, \\ \dot{z} &= -8/3 \cdot z + xy, \end{aligned} \quad (10.4)$$

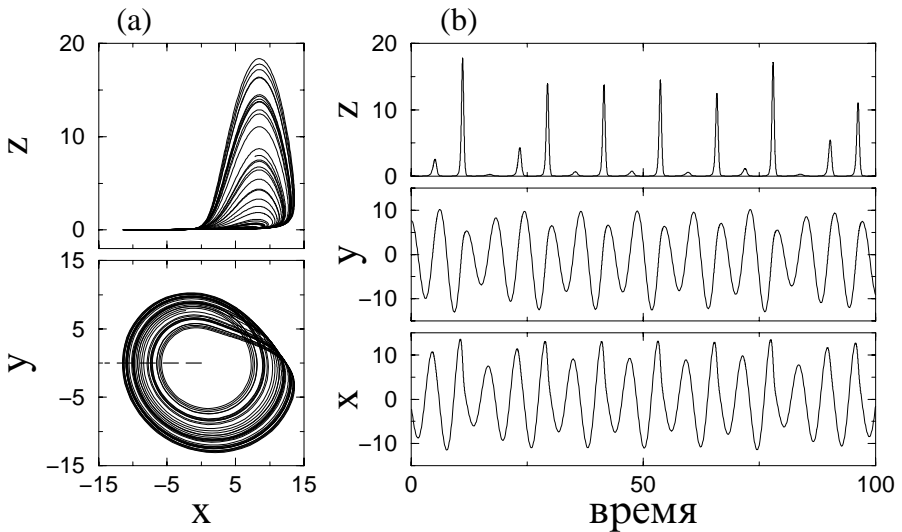


Рис. 10.1. Динамика системы Рёсслера (уравнения (10.2)). (а) Проекция странного аттрактора на плоскости (x, y) и (x, z) . Пунктирной линией показана секущая Пуанкаре, используемая далее для вычисления фазы (см. рис. 10.5). (б) Временные зависимости переменных x, y, z . Процессы $x(t)$ и $y(t)$ могут быть в хорошем приближении рассмотрены как колебания с хаотически модулированной амплитудой.

показанный на рис. 10.2, топологически отличается от аттрактора Рёсслера. Переменная $z(t)$ демонстрирует характерные хаотически модулированные колебания, в то время как $x(t)$ и $y(t)$ демонстрируют дополнительно переключения с очевидной симметрией $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ уравнений Лоренца. Колебания z достаточно регулярны, переключения же таковыми не являются. Чтобы устранить сложности, возникающие за счет наложения колебаний и переключений, введем симметризованную наблюдаемую $u(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$ и спроецируем фазовый портрет на плоскость (u, z) , рис. 10.3. В этой проекции фазовый портрет напоминает портрет аттрактора Рёсслера, и фаза может быть введена сходным образом. Возможно, например, следующее сечение Пуанкаре: $z = 27$, $u > 12$. Или же, можно ввести угловую переменную $\theta(t)$, выбрав точку $u_0 = 12$, $z_0 = 27$ на плоскости рис. 10.3 в качестве начала координат, и вычислив

$$\theta = \tan^{-1}((z - z_0)/(u - u_0)). \quad (10.5)$$

Как и прежде, угловая переменная дает ту же среднюю частоту, что и фаза, полученная из отображения Пуанкаре.

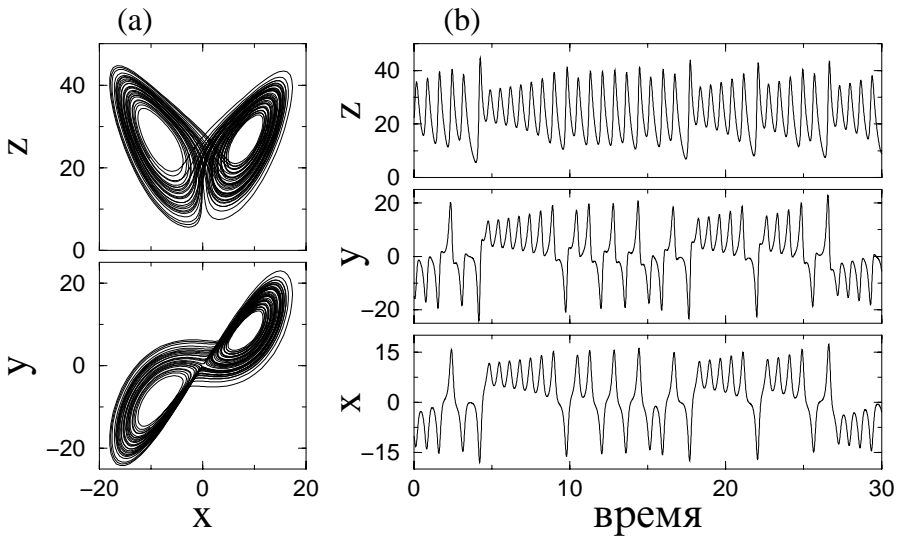


Рис. 10.2. Динамика системы Лоренца (уравнения (10.4)). (а) Проекция фазового портрета на плоскости (x, y) и (x, z) . Ни одна из этих проекций не демонстрирует вращений вокруг единого центра. (б) Временные зависимости переменных x, y, z . Только $z(t)$ выглядит как модулированные колебания; в $x(t)$ и $y(t)$ видна комбинация колебаний и скачков, сопровождаемых сменой знака.

Ограничения метода

Следует подчеркнуть, что описанный подход достаточно ограничен, и для многих хаотических систем мы не можем должным образом определить фазу или угловую переменную. Для примера мы опять рассмотрим систему Рёсслера, но на этот раз выберем значения параметров, отличные от использованных в (10.2), и рассмотрим уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + 0.3y, \\ \dot{z} &= 0.4 + z(x - 7.5).\end{aligned}\tag{10.6}$$

При таких параметрах система имеет так называемый аттрактор-воронку (funnel attractor), показанный на рис. 10.4. На плоскости (x, y) трудно найти линию, которая пересекалась бы трансверсально всеми траекториями. Другими словами, в сигналах $x(t), y(t)$ мы видим малые и большие колебания, и трудно понять, что именно может быть рассмотрено в качестве цикла, и, соответственно, какому отрезку сигнала может быть приписан набег фазы 2π . Система Рёсслера с аттрактором-воронкой является, вероятно, простейшим примером системы с плохо определенной фазой. В общем случае, мы можем ожидать, что понятие фазы едва ли может быть использовано

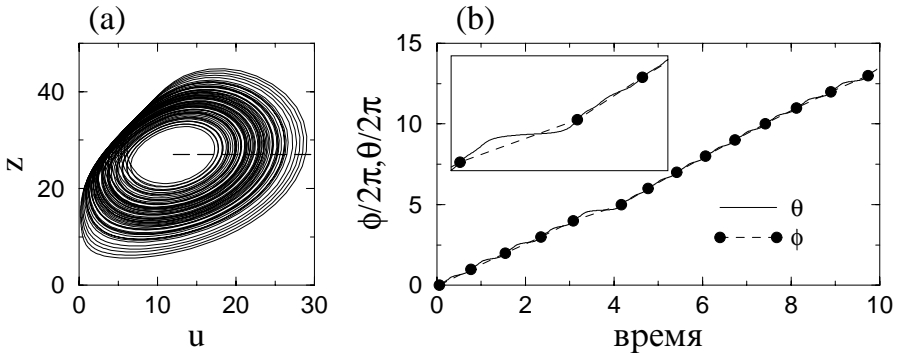


Рис. 10.3. (а) Портрет системы Лоренца в переменных u, z выглядит как размытый предельный цикл с вращениями вокруг неустойчивой особой точки системы. Пунктирная линия показывает секущую поверхность $z = 27, u > 12$. (б) Эволюция фазы ϕ , вычисленной по сечению Пуанкаре (уравнение (10.1), пунктир) и угловой переменной θ (уравнение (10.5), сплошная линия). Они совпадают в точках (символ \bullet) пересечения секущей поверхности, и слегка различаются на временах, меньших характерного периода возврата (см. врезку в (б)).

в случае высокоразмерного хаоса, когда сосуществуют колебания со многими различными характерными временами.

Сделаем еще одно замечание. Мы хотим ввести фазу как переменную, соответствующую нулевому ляпуновскому показателю системы. Нулевой показатель существует для всех автономных динамических систем с непрерывным временем (если аттрактором не является состояние равновесия), и во всех таких системах есть возможность сделать малый или большой сдвиг вдоль траектории, так что такое возмущение не будет ни возрастать, ни убывать. Именно это свойство и важно для синхронизации, так как делает возможным подстройку фаз двух систем (или же фазы одного осциллятора к фазе внешней силы). Динамические системы с дискретным временем в общем случае не имеют нулевого ляпуновского показателя, независимо от типа аттрактора (периодический или хаотический). Действительно, для орбиты с дискретным временем мы не можем совершить малый сдвиг вдоль траектории, а только большой. Следовательно, понятие фазы в этом случае неприменимо. То же самое верно для систем с непрерывным временем, но неавтономных. Так, например, хаотиче-

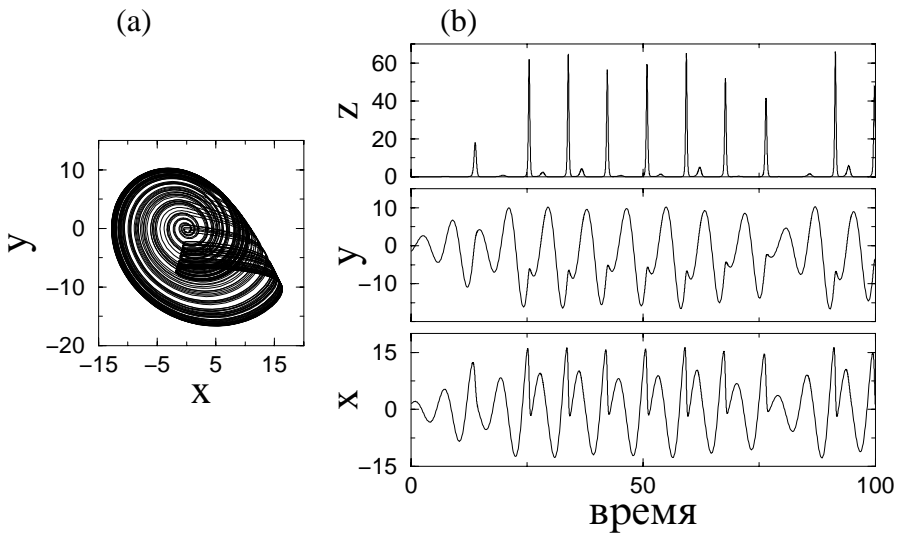


Рис. 10.4. Динамика системы Рёсслера с аттрактором-воронкой (10.6). (а) Проекция фазового портрета на плоскость (x, y) . Видны две характерные петли, соответствующие большим и малым колебаниям. (б) Временные зависимости переменных x, y, z . Колебания x и y имеют сложную форму, поэтому фаза и амплитуда не могут быть определены однозначно.

ское поведение может демонстрироваться нелинейным осциллятором под действием периодической внешней силы, т.е. системой вида

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + F(x) = \varepsilon \cos \omega t.$$

В общем случае такие системы не имеют устойчивого направления и все их ляпуновские показатели – ненулевые. Можно сказать, что вынужденные колебания $x(t)$ подстроены по фазе к внешней силе и инвариантны по отношению к малым сдвигам по времени. Следует, однако, помнить, что для случайной (шумовой) силы свойство нейтральности к возмущениям может существовать в статистическом смысле; см. обсуждение стохастического резонанса в части I (раздел 3.6.3).

10.1.2 Фазовая динамика хаотических осцилляторов

В отличие от случая периодических систем, мы не можем ожидать, что фаза хаотической системы будет возрастать равномерно. Наоборот, в общем случае мгновенная частота зависит от амплитуды. Воспользуемся определением фазы, основанном на отображении Пуанкаре (уравнение (10.1)); тогда фазовая динамика может быть описана следующим образом

$$A_{n+1} = \mathcal{M}(A_n), \quad (10.7)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega(A_n) \equiv \omega_0 + F(A_n). \quad (10.8)$$

В качестве амплитуды A_n возьмем набор координат точки на секущей поверхности; он не изменяется во время роста фазы от $2\pi n$ до $2\pi(n+1)$ и может быть рассмотрен в дискретном времени; преобразование \mathcal{M} определяет отображение Пуанкаре. Эволюция фазы подчиняется уравнению (10.1); «мгновенная» частота $\omega(A_n) = 2\pi/T_n$ определяется временем возврата Пуанкаре $T_n = t_{n+1} - t_n$ и в общем случае зависит от положения на секущей поверхности, т.е. от амплитуды. Предполагая хаотическое поведение амплитуд, мы можем рассматривать член $\omega(A_n)$ как сумму средней частоты ω_0 и некоторого эффективного «шума» $F(A)$ (хотя этот нерегулярный член имеет чисто детерминированное происхождение); в исключительных случаях $F(A)$ может исчезать.

Ключевым является наблюдение, что уравнение (10.8) сходно с уравнением (9.2), описывающим эволюцию фазы периодического осциллятора в присутствии внешнего шума. Таким образом, динамика фазы в общем случае диффузионная (ср. с (9.4)), и фаза совершает

случайные блуждания. Постоянная диффузии D (см. (9.4)) определяет фазовую когерентность хаотических колебаний. Грубо говоря, D пропорциональна ширине пика спектра мощности на частоте ω_0 для типичной наблюдаемой хаотической системы. Для аттрактора Рёсслера постоянная диффузии очень мала ($D < 10^{-4}$), что соответствует очень острому пику в спектре; этот осциллятор поэтому часто называют фазо-когерентным. Для аттрактора Лоренца спектральный пик значительно шире, и постоянная диффузии не очень мала, $D \approx 0.2$. Следовательно, можно ожидать, что фазовая динамика системы Рёсслера близка к динамике периодического осциллятора, в то время как эффективным шумом в системе Лоренца пренебречь нельзя и, следовательно, последняя ведет себя как периодическая система, возмущаемая довольно сильным шумом.

Мы иллюстрируем свойства когерентности аттракторов Рёсслера и Лоренца на рис. 10.5, где изображены времена возврата T_n , или «период» вращений. Для осциллятора Рёсслера вариация T_n сравнительно мала, в то время как для осциллятора Лоренца время возврата T_n может быть произвольно велико (это соответствует медленным движениям в окрестности седла $x = y = z = 0$). Ниже мы покажем, что это различие и определяет различие в свойствах синхронизации этих двух систем.

В заключение можно сказать, что мы ожидаем, что эффекты

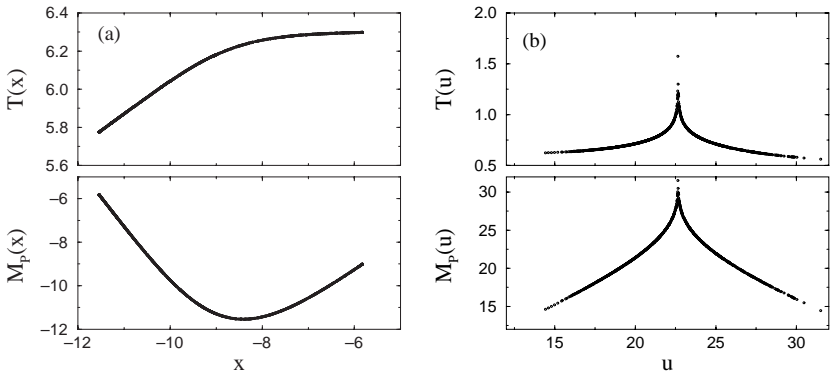


Рис. 10.5. Времена возврата и отображения Пуанкаре для аттракторов систем (а) Рёсслера (уравнения (10.2)) и (б) Лоренца (уравнения (10.4)); соответствующие секущие поверхности показаны на рис. 10.1 и 10.3. Графики выглядят как функции одной переменной, хотя на самом деле – это проекции двумерных функций (внутренняя канторовская структура очень тонка и едва заметна; поэтому мы сохраняем те же обозначения $\mathcal{M}(\cdot)$ для отображения). Время возврата для системы Лоренца имеет логарифмическую сингулярность при $u \approx 23$.

синхронизации для хаотических систем будут сходны с соответствующими эффектами в периодических осцилляторах с шумом. Тем не менее, необходимо иметь в виду, что «шумовой» член $F(A)$ вряд ли может быть вычислен в явном виде и наверняка не может быть рассмотрен как гауссовский δ -коррелированный шум, как это обычно предполагается при статистическом рассмотрении зашумленных осцилляторов (см. главу 9).

10.2 Синхронизация хаотических осцилляторов

В этом разделе мы описываем свойства синхронизации хаотических систем, для которых фаза хорошо определена и может быть непосредственно вычислена. Следовательно, синхронизация (называемая *фазовой синхронизацией*, чтобы отличать ее от других типов синхронизации в хаотических системах, рассматриваемых в части III) может прямо характеризоваться как захват фаз и частот. Средняя наблюдаемая частота осциллятора легко вычисляется как

$$\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} 2\pi \frac{N_t}{t}, \quad (10.9)$$

где N_t – число пересечений фазовой траектории с сечением Пуанкаре за время наблюдения t . Этот метод применим и к временному ряду; в простейшем случае в качестве N_t можно взять, например, число максимумов подходящей колебательной наблюдаемой ($x(t)$ для системы Рёсслера и $z(t)$ для системы Лоренца).

Аналогично случаю периодических колебаний, опишем синхронизацию периодической внешней силой и взаимную синхронизацию связанных систем. Далее мы обсудим как синхронизация внешней периодической силой может быть охарактеризована косвенно, т.е. без непосредственного вычисления фазы. Такое описание, независимое от определения фазы, годится также для изучения хаотических систем с плохо определенной фазой.

10.2.1 Фазовая синхронизация внешней силой

Система Рёсслера

Мы начнем с модели Рёсслера (10.2) и добавим периодическую внешнюю силу в уравнение для x :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -y - z + \varepsilon \cos \omega t, \\
 \dot{y} &= x + 0.15y, \\
 \dot{z} &= 0.4 + z(x - 8.5).
 \end{aligned}
 \tag{10.10}$$

Вычисляя наблюдаемую частоту Ω в зависимости от параметров внешней силы, мы получим показанное на рис. 10.6 плато, где $\Omega = \omega$. Этот график очень похож на обычный график для основной области синхронизации периодических осцилляторов. Примечательно, что довольно малая сила может захватить частоту, почти не влияя на амплитуду. Для иллюстрации этого покажем на рис. 10.7 стробоскопическое (с периодом внешней силы) изображение фазовой плоскости (x, y) . Внутри области синхронизации точки сконцентрированы по фазе и распределены по амплитуде; в асинхронном состоянии наблюдается широкое распределение, как по фазе, так и по амплитуде.

Результаты, представленные на рис. 10.6 и 10.7, показывают, что даже слабая периодическая сила может захватить фазу хаотического осциллятора точно так же, как она захватывает фазу периодического. Влияние на амплитуду относительно мало: сила не подавляет хаос. Это видно также из вычислений показателей Ляпунова.

Максимальный ляпуновский показатель остается в основном положительным (за исключением неизбежных периодических окон) во всем диапазоне параметров рисунка 10.6. Вне области синхронизации второй ляпуновский показатель является практически нулевым, в то время как внутри области он отрицателен. Следовательно, второй ляпуновский показатель имеет те же свойства, что и максимальный показатель системы с периодическими колебаниями. Это демонстрирует относительную независимость амплитудной динамики от фазо-

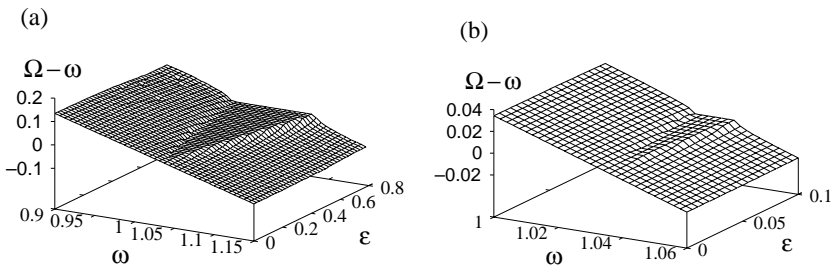


Рис. 10.6. Синхронизация в системе Рёсслера (10.10). (а) Разность наблюдаемой частоты и частоты внешней силы как функция амплитуды и частоты внешней силы. (б) Растяжение области малой амплитуды силы демонстрирует, что порог синхронизации очень мал; это означает, что влияние хаотической амплитуды на фазовую динамику очень слабо (эффективный шум очень мал).

вой для малой внешней силы.

Система Лоренца

Рассмотрим теперь систему Лоренца с периодической внешней силой, действующей на колебательную переменную z :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= 28x - y - xz, \\ \dot{z} &= -8/3 \cdot z + xy + \varepsilon \cos \omega t. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Эффективный шум в системе Лоренца значительно больше, чем в рёсслеровской, и захват фазы не идеален. Зависимость разности наблюдаемой частоты и частоты внешней силы $\Omega - \omega$ от ω (рис. 10.8) демонстрирует плато, где $\Omega \approx \omega$, но точный захват частот $\Omega = \omega$ не наблюдается.

Чтобы детально проиллюстрировать синхронизацию системы Лоренца (см. [Е.-Н. Park *et al.* 1999; Zaks *et al.* 1999]), изобразим на рис. 10.9а временную зависимость угловой переменной θ , определенной в соответствии с уравнением (10.5). Мы наблюдаем захват внешней силой на больших интервалах времени, но эти интервалы перемежаются проскоками фазы. Этим фазовая динамика системы

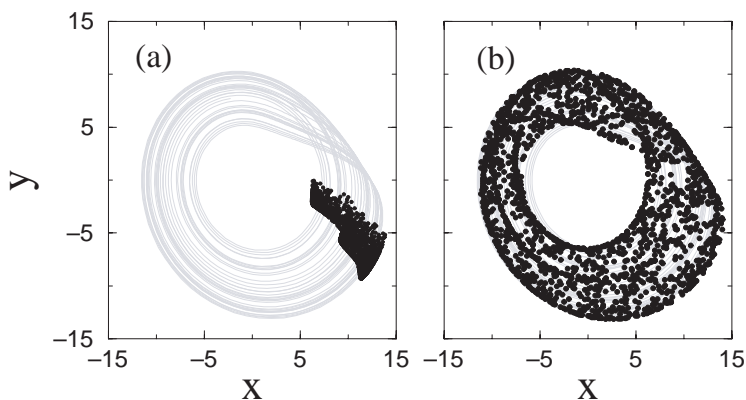


Рис. 10.7. Стробоскопическое изображение системы Рёсслера под действием внешней силы. (а) Внутри области синхронизации фазы сконцентрированы в небольшой области ($\varepsilon = 0.16$, $\omega = 1.04$). (б) В асинхронном состоянии ($\varepsilon = 0.16$, $\omega = 1.1$) фазы разбросаны. Автономный аттрактор показан серым фоном. Возможна эквивалентная интерпретация данного графика. Он может рассматриваться как распределение состояний ансамбля идентичных систем Рёсслера, на которые действует общая сила.

Лоренца напоминает динамику периодического осциллятора, возмущенного неограниченным шумом: проскоки фазы наблюдаются при любой расстройке.² Отличие от случая гауссовского шума состоит в

² Отметим, что фазовая динамика системы Рёслера может рассматриваться как аналогичная фазовой динамике периодического осциллятора с ограниченным шумом: нерегулярные по времени проскоки фазы наблюдаются только на границе области синхронизации, но не возникают в ее середине.

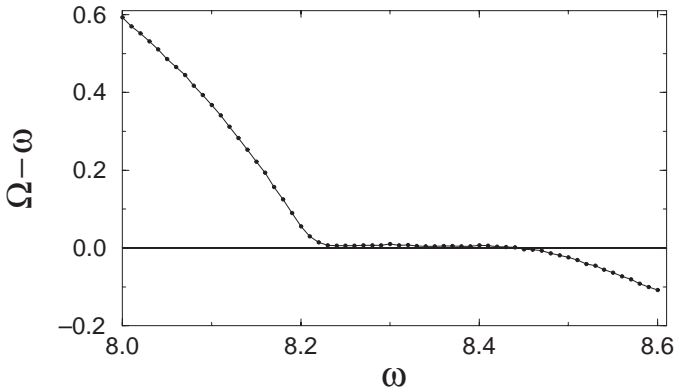


Рис. 10.8. Синхронизация в системе Лоренца: наблюдаемая частота как функция частоты внешней силы для относительно большой амплитуды силы $\varepsilon = 10$. В области плато $8.2 < \omega < 8.5$ есть небольшое рассогласование $\Omega - \omega \approx 0.005$ за счет проскоков фазы (см. рис. 10.9).

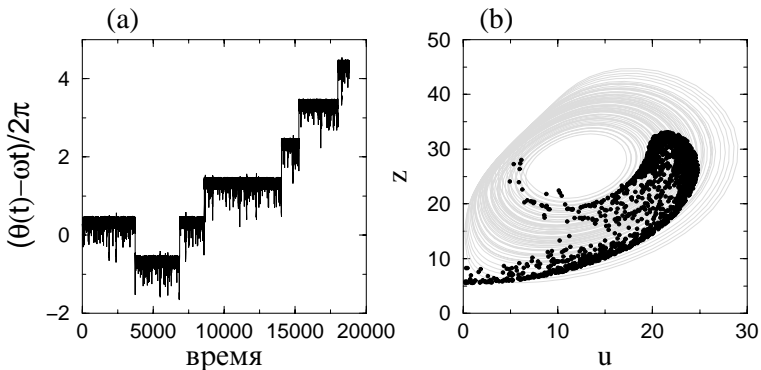


Рис. 10.9. Неидеальная синхронизация системы Лоренца для $\varepsilon = 10$, $\omega = 8.35$. (а) Разность фаз как функция времени: длинные интервалы захвата перемежаются проскоками. (б) Стробоскопический портрет системы с внешней силой. Автономный аттрактор показан серым фоном.

том, что вероятность проскока в положительном направлении больше чем в отрицательном, что и приводит к отклонению наблюдаемой частоты Ω от ω . Эта специфическая черта системы Лоренца следует из отображения Пуанкаре и распределения времен возврата, показанных на рис. 10.5b. Можно видеть, что возможна длительная последовательность итераций с малыми u ($u \approx 15$), при которых времена возврата малы. В течение этих итераций фаза осциллятора убегает вперед, так что наблюдаемая частота немного превышает частоту силы (см. подробнее в [Е.-Н. Park *et al.* 1999; Zaks *et al.* 1999]).

Фазовая динамика системы Лоренца с внешней силой проиллюстрирована стробоскопическим портретом на рис. 10.9b: большинство точек сконцентрировано в малой части фазового пространства, хотя есть также «хвост» из точек, которые запаздывают. В конце концов, некоторые из точек совершают дополнительные по сравнению с внешней силой обороты, а некоторые пропускают один или несколько оборотов; точки оказываются разбросанными по аттрактору, хотя их распределение и остается неравномерным.

10.2.2 Косвенное описание синхронизации

До сих пор мы характеризовали синхронизацию, непосредственно вычисляя частоту. Это возможно для систем с хорошо определенной фазой, таких как системы Рёсслера (уравнения (10.2)) или Лоренца (уравнения (10.4)), но это может оказаться сложным или неоднозначным для систем с плохо определенной фазой, как в случае системы Рёсслера с аттрактором-воронкой (см. уравнения (10.6) и рис. 10.4). Поэтому было бы полезно иметь возможность выявлять синхронизацию без привязки к конкретному определению фазы. Основная идея состоит в том, что возникновение синхронизации означает появление когерентности между хаотическим процессом и внешней силой. Когерентность может проявиться как в спектре мощности колебаний, так и в коллективной динамике ансамбля идентичных систем, на которые действует общая сила. Это подсказывает два возможных подхода к косвенному описанию захвата хаотического осциллятора внешней силой.

Обычно спектр мощности хаотической системы содержит широкополосную компоненту и пик на средней частоте колебаний;³ этот

³ Строго говоря, спектр зависит от наблюдаемой; мы предполагаем, что для его вычисления используется невырожденная колебательная наблюдаемая (например, $x(t)$ для системы Рёсслера и $z(t)$ для системы Лоренца).

пик очень узок для «хорошей» системы Рёсслера (10.2) и довольно широк для аттрактора Лоренца. Под действием периодической силы в спектре появляется дополнительный δ -пик на частоте ω внешней силы (или ее гармоники $n\omega$). Вне области синхронизации оба пика сосуществуют, и интенсивность δ -пика, грубо говоря, порядка амплитуды силы. Внутри области синхронизации δ -пик поглощает всю интенсивность компоненты колебаний на основной частоте. Таким образом, синхронизация проявляется как сильное увеличение интенсивности S спектральной компоненты на частоте вынуждающей силы. Это происходит за счет появляющейся когерентности хаотических колебаний. Действительно, периодическая сила подавляет диффузию фазы, так что фазы в моменты времени $T, 2T, 3T, \dots$, где $T = 2\pi/\omega$, имеют почти одинаковые значения. Автокорреляционная функция, следовательно, имеет неубывающие максимальные значения при времени задержки $T, 2T, 3T, \dots$, что в частотной области соответствует δ -пику на частоте ω внешней силы.

Другая возможность выявить когерентность состоит в том, чтобы образовать ансамбль копий данной хаотической системы. Без внешней силы такое свойство хаоса как перемешивание приводит к отсутствию когерентности в ансамбле: начав с различных начальных условий, изображающие точки, в конце концов, покрывают весь хаотический аттрактор, в соответствии с естественной инвариантной мерой. То же самое происходит вне области синхронизации, см. рис. 10.7. В синхронном режиме все системы стремятся иметь одну и ту же фазу, как видно из рис. 10.7 и 10.9b. При этом маленькое облако точек вращается как устойчивый объект и не расплывается. Простейший способ охарактеризовать когерентность ансамбля из N идентичных систем – это вычислить среднее поле $X = N^{-1} \sum_1^N x_k$, где x_k – наблюдаемая k -той копии системы.⁴ Если синхронизации нет, то точки в фазовом пространстве расплываются по всему аттрактору и среднее поле очень мало и почти постоянно во времени. В противоположность этому, в случае синхронизации среднее поле осциллирует (с частотой ω) во времени с большой амплитудой.

Подчеркнем опять, что вычисление как среднего поля X , так и интенсивности дискретной спектральной компоненты S , не требует вычисления фазы и, следовательно, независимо от ее определения. Следует отметить, что использование индикаторов X и S не ограничено случаем хаотических систем; они могут быть также использованы

⁴ Как и спектр мощности, среднее поле зависит от наблюдаемой, см. предыдущую сноску.

для характеристики систем с шумом. Мы иллюстрируем использование этих косвенных индикаторов синхронизации на рис. 10.10. Два изложенных косвенных подхода, конечно же, взаимосвязаны. Из-за перемешивания ансамбль идентичных систем может быть сконструирован другим способом, а именно путем наблюдения одной системы в моменты времени $0, nT, 2nT, \dots$ с достаточно большим n . Таким образом, временная когерентность одной системы есть не что иное, как когерентность в ансамбле независимых идентичных систем, на которые действует общая сила. Интенсивность δ -пика в спектре мощности является, таким образом, пропорциональной интенсивности колебаний среднего поля (см. детали в [Pikovsky *et al.* 1997b]).

10.2.3 Синхронизация в терминах неустойчивых периодических орбит

Другой подход к описанию синхронизации хаотических осцилляторов основан на рассмотрении свойств индивидуальных неустойчивых

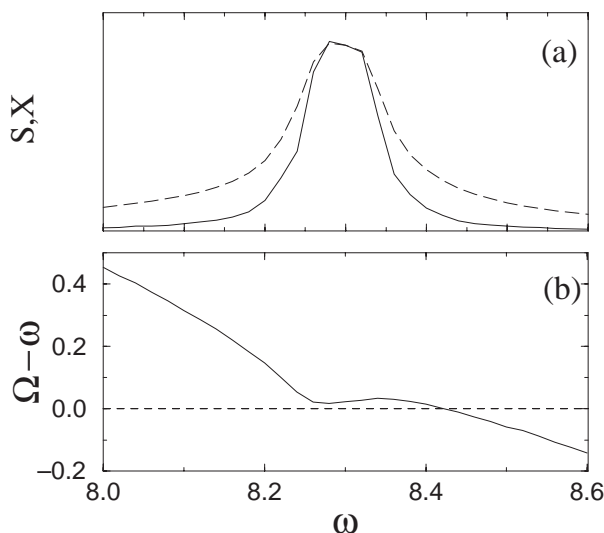


Рис. 10.10. (а) Зависимости интенсивности дискретной спектральной компоненты S (сплошная линия) и дисперсии среднего поля большого ансамбля X (пунктирная линия) от частоты внешней силы для системы Лоренца (10.11). Амплитуда силы $\varepsilon = 5$. Обе зависимости даны в произвольных единицах. Отметим их ярко выраженный резонансный характер. Обе косвенные характеристики, вычисленные по наблюдаемому $z(t)$, имеют максимум в области синхронизации. (б) Для сравнения, нарисована также и наблюдаемая частота.

периодических орбит (НПО), вложенных в хаотический аттрактор. Как известно, эти орбиты создают некий «скелет» хаотического множества (см., например, [Ott 1992; Каток и Хассельблат 1999]). В частности, автономные системы (10.2) и (10.4) имеют бесконечное число неустойчивых периодических решений. Выберем одно из этих решений и рассмотрим влияние на него малой периодической силы. За исключением того, что цикл теперь неустойчив, мы приходим к стандартной проблеме периодически возбуждаемого осциллятора, рассмотренной в разделе 7.3. Следовательно, мы можем использовать излагаемую там теорию и характеризовать синхронизацию конкретной периодической орбиты числом вращения. Иррациональное число вращения означает квазипериодическое движение на инвариантном торе, который возникает из периодической орбиты автономной системы. (Отметим, что этот тор наследует от периодической орбиты свойство неустойчивости.) Рациональное число вращения означает существование на инвариантном торе двух периодических орбит: одной «фазо-устойчивой» и одной «фазо-неустойчивой». Область рациональных чисел вращения – это обычный язык Арнольда (см. рис. 7.15). На границе области захвата две замкнутые орбиты на торе сливаются и исчезают через бифуркацию седло-узел. Вне языка движение, соответствующее данной периодической орбите, не синхронизовано, и траектории на торе плотны.

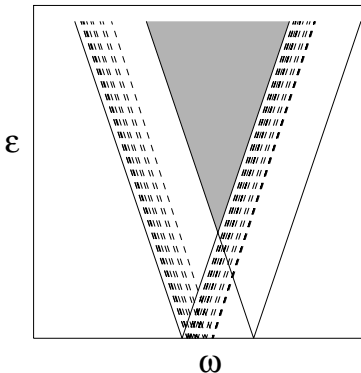


Рис. 10.11. Схематическое изображение языков Арнольда для неустойчивых периодических орбит хаотической системы. В общем случае автономные орбиты имеют различные частоты $\omega_0^{(i)}$, а, следовательно, и языки касаются ω -оси в различных точках. Самый левый и самый правый языки, соответствующие орбитам с минимальной и максимальной $\omega_0^{(i)}$, показаны сплошными линиями. В заштрихованной области все циклы синхронизованы и средняя частота колебаний практически совпадает с частотой внешней силы.

На плоскости параметров ω и ε острие основного языка Арнольда одной из периодических орбит находится в точке $\varepsilon = 0$, $\omega = \omega_0^{(i)}$, где $\omega_0^{(i)}$ – это средняя частота i -той автономной орбиты. Эта частота отличается от формально определенной частоты периодического решения $2\pi/T_i$, где T_i – период орбиты: нам необходимо учесть топологический период \mathcal{N}_i (число оборотов орбиты, см. раздел 10.1) и записать $\omega_0^{(i)} = 2\pi\mathcal{N}_i/T_i$. В общем случае значения $\omega_0^{(i)}$ отличаются для разных периодических орбит: насколько близки частоты $\omega_0^{(i)}$ – зависит от свойств времен возврата. Если частоты $\omega_0^{(i)}$ не очень различаются, то языки Арнольда перекрываются (рис. 10.11), и можно найти область параметров, где движение вдоль всех периодических орбит захвачено внешней силой. Если сила остается не очень большой, то эта область есть пересечение самого левого и самого правого языков Арнольда, которые соответствуют периодическим орбитам автономной системы с наименьшим и наибольшим значением $\omega_0^{(i)}$, соответственно. Внутри этой области хаотические траектории вновь и вновь попадают в окрестности разных торов; двигаясь вдоль поверхности тора, они приближаются к устойчивому по фазе решению и остаются там на некоторое время, пока трансверсальная (амплитудная) неустойчивость не отталкивает их к другому тору. Так как все периодические движения захвачены, фаза остается локализованной в некоторой области: наблюдается синхронизация по фазе. Вне той области, где все языки перекрываются, синхронизация не может быть идеальной: в течение некоторого времени траектория следует вдоль захваченного цикла, а фаза следует за фазой внешней силы, но в другой момент времени траектория подходит близко к незахваченному циклу, и происходит проскок фазы. Последний случай наблюдается в системе Лоренца (рис. 10.9).

10.2.4 Взаимная синхронизация двух связанных осцилляторов

Мы демонстрируем этот эффект на системе двух диффузионно связанных осцилляторов Рёсслера (10.2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1 + \nu)y_1 - z_1 + \varepsilon(x_2 - x_1), & \dot{x}_2 &= -(1 - \nu)y_2 - z_2 + \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= (1 + \nu)x_1 + 0.15y_1, & \dot{y}_2 &= (1 - \nu)x_2 + 0.15y_2, \\ \dot{z}_1 &= 0.2 + z_1(x_1 - 10), & \dot{z}_2 &= 0.2 + z_2(x_2 - 10). \end{aligned} \quad (10.12)$$

Отметим, что осцилляторы неидентичны; дополнительно введенный параметр ν определяет расстройку собственных средних частот.

Диффузионная связь пропорциональна константе связи ε .

Наблюдаемые частоты обоих осцилляторов могут быть вычислены непосредственно, путем подсчета числа колебаний в единицу времени. Полученная зависимость разности частот (рис. 10.12) дает типичную картину области синхронизации. Фазовая диаграмма различных режимов (как функции связи ε и расстройки ν) демонстрирует три области качественно различного поведения.

- (I) Область синхронизации, где частоты захвачены, $\Omega_1 = \Omega_2$. Важно отметить, что порога синхронизации практически нет; это особенность фазо-когерентного аттрактора Рёсслера.
- (II) Область асинхронных колебаний, где $|\Omega_1 - \Omega_2| = |\Omega_b| > 0$. По аналогии со случаем периодических колебаний, частота Ω_b может рассматриваться как «частота биений».
- (III) В этой области колебания в обеих системах исчезают из-за диффузионной связи. Этот эффект известен для периодических систем как вымирание (гашение) колебаний (см. главу 8).

Весьма полезно описать переход к синхронизации с помощью показателей Ляпунова (см. рис. 10.13). Шестимерная динамическая система (10.12) имеет шесть ляпуновских показателей. При нулевой связи мы имеем вырожденную ситуацию двух независимых систем,

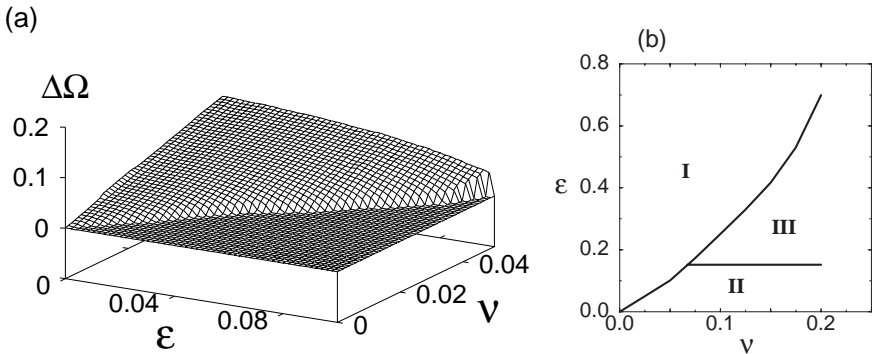


Рис. 10.12. (а) Область синхронизации для двух связанных осцилляторов Рёсслера (10.12): график разности наблюдаемых частот $\Delta\Omega = \langle \theta_1 - \theta_2 \rangle$ как функции связи ε и расстройки ν демонстрирует область, где $\Delta\Omega$ исчезающе мала. (б) Схематическая диаграмма, показывающая область асинхронных (II) и синхронных (I) движений и область вымирания колебаний (III). Диаграмма приближенная, окна периодичности в I и II не показаны. График (б) воспроизведен из Osipov *et al.*, *Physical Review E*, Vol. 55, 1997, pp. 2353–2361. Copyright 1997 by the American Physical Society.

каждая из которых имеет один положительный, один нулевой и один отрицательный показатель. Два нулевых показателя соответствуют двум независимым фазам. При наличии связи фазы становятся зависимыми и вырождение снимается: только один ляпуновский показатель должен остаться в точности нулем. Тем не менее, мы наблюдаем, что при малой связи второй нулевой ляпуновский показатель остается очень малым (собственно, численно неотличимым от нуля); это соответствует «квазипериодической» динамике фаз, когда каждая из них может быть сдвинута. Только при относительно более сильной связи, когда наступает синхронизация, второй ляпуновский показатель становится отрицательным: теперь фазы захвачены и соотношение между ними устойчиво. Отметим, что два наибольших показателя остаются положительными во всем диапазоне связи, что означает хаотичность и независимость амплитуд: связанная система остается в состоянии гиперхаоса.

10.3 Библиографические заметки

В своем изложении мы следовали работам [Rosenblum *et al.* 1996; Pikovsky *et al.* 1997b], где обсуждались различные определения фазы

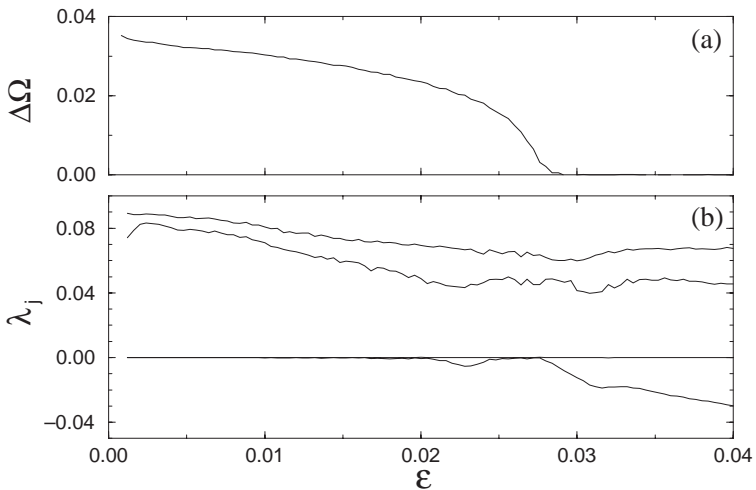


Рис. 10.13. Разность частот (а) и четыре наибольших ляпуновских показателя (б) как функция силы связи ε для взаимодействующих осцилляторов Рёсслера (10.12); $\nu = 0.015$. При слабой связи есть два положительных и два почти нулевых ляпуновских показателя. Переход к захвату фаз происходит примерно при $\varepsilon \approx 0.028$; при этом значении силы связи один из нулевых ляпуновских показателей становится отрицательным.

хаотических систем, а также прямые и косвенные способы описания синхронизации. Захват фазы хаотического осциллятора периодической внешней силой был рассмотрен Пиковским [1984b], который наблюдал увеличение дискретной спектральной компоненты вынуждаемой системы, и Стоун [Stone 1992], которая стробоскопически наблюдала осциллятор Рёсслера, периодически возмущаемый импульсами, а также Вадивасовой и др. [Vadivasova *et al.* 1999]. Сходные эффекты в связанных осцилляторах, в частности перекрытие спектральных пиков как результат взаимодействия, обсуждались в работах [Ланда и Перминов 1985; Анищенко и др. 1991; Ланда и Розенблум 1992; Anischenko *et al.* 1992; Landa and Rosenblum 1993].

Захват фазы в терминах периодических орбит был рассмотрен в работах [Pikovsky *et al.* 1997c; Zaks *et al.* 1999; S. H. Park *et al.* 1999a]. Переход к синхронизации и скейлинговые свойства перемежаемости были описаны в [Pikovsky *et al.* 1997a; Rosa Jr. *et al.* 1998; Lee *et al.* 1998]. Эффекты захвата фаз могут также наблюдаться в больших ансамблях, решетках и хаотически осциллирующих средах, см. [Brunnet *et al.* 1994; Goryachev and Kapral 1996; Pikovsky *et al.* 1996; Osipov *et al.* 1997; Brunnet and Chaté 1998; Goryachev *et al.* 1998; Blasius *et al.* 1999] и раздел 12.3. Синхронизация хаотической системы случайной силой была рассмотрена в [Pikovsky *et al.* 1997b].

Захват фазы в хаосе экспериментально наблюдался в электронных генераторах [Пиковский 1984b; Parlitz *et al.* 1996; Rulkov 1996], плазме [Rosa Jr. *et al.* 2000] и в лазерах [Tang *et al.* 1998a,c]. См. также тематический выпуск [Kurths (ed.) 2000].

В связанных неидентичных хаотических осцилляторах захват фаз наблюдается уже при слабой связи. При сильной связи наблюдается тенденция к полной синхронизации (см. детальное обсуждение полной синхронизации в части III). При промежуточной силе связи наблюдается интересный режим: состояния двух взаимодействующих систем почти совпадают с точностью до сдвига по времени, $\mathbf{x}_1(t) \approx \mathbf{x}_2(t - \tau)$. Этот режим, названный *задержанной (lag) синхронизацией*, изучался теоретически в работах [Rosenblum *et al.* 1997b; Sosnovtseva *et al.* 1999] и экспериментально в работе [Taherion and Lai 1999].

Постнов и др. [Postnov *et al.* 1999b] описали мультистабильность состояний с захватом фазы для связанных осцилляторов с многоленточными аттракторами. В завершение мы хотим отметить, что Fujigaki *et al.* [1996] и Fujigaki and Shimada [1997] используют термин *фазовая синхронизация* в другом смысле.

Глава 11

Синхронизация в осциллирующих средах

Осциллирующая среда – это распределенная система, каждый элемент которой совершает автоколебания. Хорошим физическим (на самом деле – химическим) примером служит колебательная реакция (например, реакция Белоусова–Жаботинского) в большом объеме, различные части которого могут колебаться с различными периодами и фазами. Обычно реакция сопровождается изменениями цвета. Поэтому профиль фазы легко виден: различные цвета отвечают различным фазам.

Мы начнем с описания динамики фазы в цепочках и в пространственно-непрерывных системах. Затем мы рассмотрим среду из слабо нелинейных осцилляторов, демонстрирующую богатый набор различных типов поведения; некоторые из них будут описаны в разделе 11.3.

11.1 Цепочки осцилляторов

Цепочка осцилляторов – это естественное обобщение системы двух связанных осцилляторов, описанной в главе 8. Начнем с рассмотрения одномерной цепочки осцилляторов, пронумерованных индексом k и имеющих различные собственные частоты ω_k , в предположении, что взаимодействуют только ближайшие соседи. Если связь слабая, то можно использовать приближение фазовой динамики и записать

уравнения движения как естественное обобщение уравнения (8.5):

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \varepsilon q(\phi_{k-1} - \phi_k) + \varepsilon q(\phi_{k+1} - \phi_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (11.1)$$

Здесь мы для простоты предполагаем, что осцилляторы отличаются только автономными частотами ω_k и что связь одинакова для всех пар. Граничные условия для (11.1) имеют вид $\phi_0 = \phi_1$, $\phi_{N+1} = \phi_N$.

Чтобы получить общее представление о процессах в цепочке, взглянем на предельные случаи. Если связь отсутствует ($\varepsilon = 0$), то фазы всех осцилляторов вращаются с автономными частотами и в цепочке из N осцилляторов наблюдается квазипериодическое движение с N различными частотами. В другом предельном случае, когда связь очень велика, $\varepsilon \gg |\omega_k|$, различием автономных частот можно пренебречь, так что все осцилляторы синхронизируются. Между этими случаями можно ожидать появление частично синхронизованных режимов, с несколькими (меньше, чем N) различными частотами. Поскольку связь стремится синхронизовать ближайших соседей, образуются *кластеры* синхронизованных осцилляторов. Эту качественную картину мы иллюстрируем численным исследованием цепочки из 5 осцилляторов на рис. 11.1.

Переход от независимых колебаний к полностью синхронизованному режиму зависит от распределения частот ω_k . В литературе

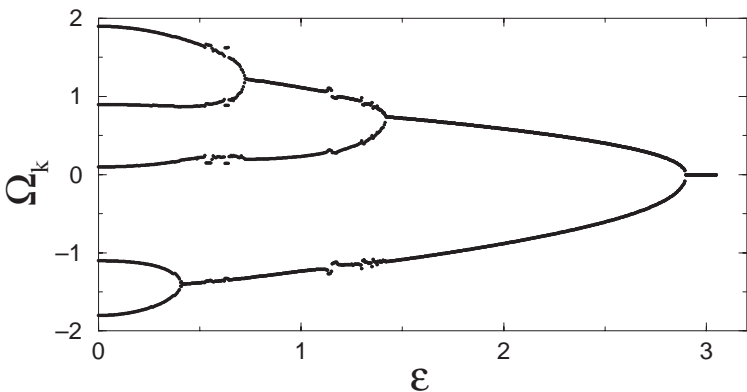


Рис. 11.1. Зависимость наблюдаемых частот $\Omega_k = \langle \dot{\phi}_k \rangle$ от параметра связи ε в цепочке из пяти осцилляторов (11.1). Собственные частоты равны $-1.8, -1.1, 0.1, 0.9, 1.9$, функция связи выбрана в виде $q(x) = \sin x$. С увеличением связи сначала осцилляторы 1 и 2 образуют кластер при $\varepsilon \approx 0.4$. Затем при $\varepsilon \approx 0.6$ появляется кластер из осцилляторов 4 и 5. При $\varepsilon \approx 1.4$ к нему присоединяется осциллятор 3. Наконец, при $\varepsilon \approx 3$ все осцилляторы синхронизируются.

рассматривались две модели: случайное распределение собственных частот и регулярное линейное распределение. В то время как состояния с многими кластерами с трудом поддаются аналитическому описанию, переход от полной синхронизации к режиму с двумя кластерами можно рассмотреть аналитически. В качестве первого шага введем разность фаз между ближайшими соседями $\psi_k = \phi_{k+1} - \phi_k$, и получим из (11.1) систему $N - 1$ уравнений

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \Delta_k + \varepsilon[q(\psi_{k-1}) + q(\psi_{k+1}) - 2q(\psi_k)], \quad k = 1, \dots, N - 1. \quad (11.2)$$

Здесь через $\Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k$ обозначены разности частот. Для стационарного состояния $\dot{\psi}_k = 0$ получается линейная трехдиагональная система алгебраических уравнений для неизвестных $u_k = q(\psi_k)$; она имеет единственное решение. Следующая задача состоит в обращении этого соотношения и нахождении $\psi_k = q^{-1}(u_k)$. Поскольку функция связи $q(\psi)$ периодическая, имеется множество решений, если только все компоненты решения u_k лежат в интервале (q_{\min}, q_{\max}) . Как было доказано Ermentrout and Kopell [1984], если функция связи

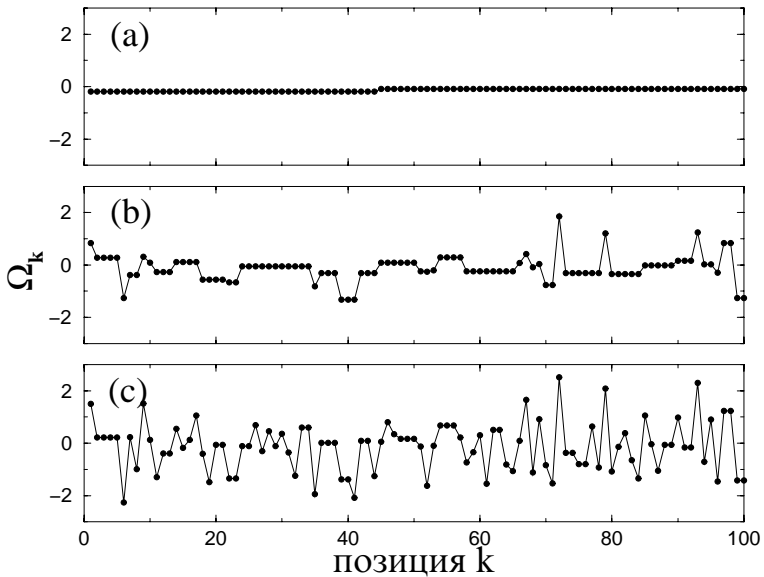


Рис. 11.2. Кластеры в цепочке (11.1) из 100 фазовых осцилляторов со случайным распределением собственных частот (гауссовское распределение с единичной дисперсией) и с функцией связи $q(x) = \sin x$. (а) Двухкластерное состояние при $\varepsilon = 4$. (б) Множество относительно больших кластеров при $\varepsilon = 1$. (с) Несколько небольших кластеров и много несинхронизованных осцилляторов при $\varepsilon = 0.2$.

имеет один минимум и один максимум, то из всех возможных 2^{N-1} решений устойчиво только одно, остальные состояния равновесия являются седлами и неустойчивыми узлами. При критическом значении параметра связи, для которого при некотором l , $u_l = q_{\min}$ или $u_l = q_{\max}$, устойчивое состояние равновесия исчезает через бифуркацию седло–узел и возникает периодическая траектория. Фазовое пространство системы (11.2) представляет собой $(N-1)$ -мерный тор, и появляющаяся периодическая траектория вращается в направлении переменной ψ_l . В результате $\langle \dot{\psi}_k \rangle = 0$ для всех k кроме $k = l$, для которого $\langle \dot{\psi}_l \rangle \neq 0$. В терминах фаз ϕ_k это означает, что все осцилляторы $1, \dots, l$ имеют одну и ту же наблюдаемую частоту Ω_1 , а значение частоты Ω_2 осцилляторов $l+1, \dots, N$ отличается от нее. Таким образом, появляются два кластера синхронизованных осцилляторов. Отметим, что разности фаз ψ_k не постоянны, а колеблются, поскольку в общем случае все ψ_k являются периодическими функциями времени. Дальнейшее уменьшение связи приводит к бифуркации расщепления образовавшихся кластеров и т.д. Для больших цепочек со случайным распределением собственных частот типичная картина выглядит как на рис. 11.2.

11.2 Непрерывное по пространству распределение фазы

Во многих случаях осцилляторы не могут рассматриваться как дискретные объекты, а образуют непрерывную среду. Типичным примером служит периодическая химическая реакция в сосуде, где в каждой точке наблюдаются колебания и связь осуществляется путем диффузии. Здесь фаза является функцией пространственных координат и времени, и нашей ближайшей задачей будет вывод уравнения в частных производных, описывающего ее динамику.

Один возможный подход к этой задаче, основанный на фазовом приближении к однородному колебательному решению исходных уравнений в частных производных, будет описан в разделе 11.3. Здесь же мы будем исходить из уравнений цепочки (11.1) и рассмотрим их непрерывный предел. В этом пределе расстояние между ближайшими соседями стремится к нулю, а постоянная связи стремится к бесконечности. Если положить $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}(\Delta x)^{-2}$ и разложить q в ряд Тейлора, то получим

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \tilde{\varepsilon}q'(0) \frac{\phi_{k-1} - 2\phi_k + \phi_{k+1}}{(\Delta x)^2} \\ + \tilde{\varepsilon}q''(0) \frac{(\phi_{k+1} - \phi_k)^2 + (\phi_k - \phi_{k-1})^2}{2(\Delta x)^2} + \dots \end{aligned} \quad (11.3)$$

В непрерывном пределе нужно положить $\phi_{k+1} - \phi_k = O(\Delta x)$, тогда второй и третий член в правой части при $\Delta x \rightarrow 0$ сходятся к второй производной и квадрату первой производной от фазы. Легко проверить, что остальные члены в этом пределе стремятся к нулю. В результате получаем

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \omega(x) + \alpha \nabla^2 \phi(x, t) + \beta (\nabla \phi(x, t))^2. \quad (11.4)$$

Это уравнение справедливо при $\alpha > 0$; в противном случае в цепочке устанавливаются противофазные устойчивые колебания, описание которых в непрерывном пределе требует специального рассмотрения.

Уравнение (11.4) справедливо в общем случае при плавных пространственных изменениях фазы; более точно, если характерный пространственный масштаб стремится к бесконечности. Действительно, уравнение в частных производных для фазы может содержать только ее производные, а не саму фазу (поскольку динамика инвариантна по отношению к сдвигам фазы). Далее, из симметрии $x \rightarrow -x$ следует, что общая степень производной должна быть четной. Это означает, что любые дополнительные члены в правой части (11.4) либо содержат высшие производные, либо высшие нелинейности (например, $\nabla^4 \phi$, $(\nabla \phi)^2 \nabla^2 \phi$). Полагая $\nabla \phi \sim L^{-1}$, можно оценить эти дополнительные члены, они имеют порядок L^{-4}, L^{-6}, \dots , т.е. много меньше членов порядка L^{-2} , учтенных в (11.4). В разделе 11.3 будет, однако, показано, что, если характерный пространственный масштаб изменений фазы конечен, то следует включать в (11.4) члены более высокого порядка.

11.2.1 Плоские волны и мишени

Рассмотрим сначала среду из идентичных осцилляторов, т.е. среду, в которой $\omega(x) = \text{constant}$. В этом случае уравнение (11.4) имеет решения в виде плоских волн

$$\phi(x, t) = \mathcal{K}x + (\omega + \beta \mathcal{K}^2)t + \phi_0. \quad (11.5)$$

Колебания в среде синхронны, но частота в общем случае отличается от собственной, и сдвиг фазы между различными точками не равен

нулю. Знак коэффициента β определяет дисперсию волн, т.е. растет или убывает их частота с волновым числом (последний случай более типичен). Какое из решений семейства (11.5) реализуется, зависит, в основном, от граничных условий. При условии равенства нулю градиента на границе $\nabla\phi|_B = 0$ единственным возможным является решение с нулевым волновым числом \mathcal{K} . Таким образом устанавливается пространственно однородный профиль фазы, и все точки среды идеально синхронизованы (т.е. все фазы равны). Поздняя стадия этого процесса описывается линеаризованным уравнением (11.4), т.е. диффузионным уравнением, так что характерное время установления синхронизации есть L^{-2} , где L – длина системы.

В безграничной одномерной среде возможны более сложные структуры, вследствие нелинейности уравнения (11.4). В частности, две плоские волны могут образовывать стационарный переход [Kuramoto 1984]:

$$\phi(x, t) = \omega t + \beta(a^2 + b^2)t + ax + \frac{\alpha}{\beta} \ln \cosh \frac{b\beta}{\alpha}(x + 2a\beta t). \quad (11.6)$$

Это решение зависит от двух параметров a и b , определяющих асимптотику плоских волн при $x \rightarrow \pm\infty$. Предполагая для определенности $\beta b > 0$, получим при больших $|x|$

$$\phi \sim \mathcal{K}_{\pm} x + (\omega + \beta\mathcal{K}_{\pm}^2)t, \quad \mathcal{K}_{\pm} = a \pm b. \quad (11.7)$$

Сам переход смещается со скоростью $-2a\beta$. Иногда его называют доменной стенкой, он может быть источником или стоком волн. Из анализа соотношения (11.7) следует, что при $\beta > 0$ побеждает волновая структура с большей частотой: переход движется в сторону волны с меньшей частотой.

При периодических граничных условиях возможны плоские волны (11.5) со всеми \mathcal{K} , удовлетворяющими соотношению $\mathcal{K}L = m2\pi$. Можно ввести «топологический заряд» (или «пространственное число вращения») профиля фазы согласно

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \nabla\phi d\phi.$$

Эта величина может принимать только целые значения, она характеризует фазовый сдвиг вдоль среды. Ясно, что топологический заряд сохраняется в процессе эволюции, поэтому любой начальный профиль фазы с зарядом Q в конце концов приходит к плоской волне (11.5) с волновым числом $\mathcal{K} = Q2\pi/L$.

Если профиль собственных частот $\omega(x)$ нетривиален, то удобно с помощью преобразования Хопфа–Коула

$$\phi = \frac{\alpha}{\beta} \ln u \quad (11.8)$$

привести нелинейное уравнение (11.4) к линейному

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\beta}{\alpha} \omega(x)u + \alpha \nabla^2 u. \quad (11.9)$$

Его можно рассматривать как уравнение Шрёдингера с мнимым временем и с потенциалом $-(\beta/\alpha)\omega(x)$. Асимптотическое ($t \rightarrow \infty$) поведение определяется первой модой с наиболее медленным затуханием. Наибольшее собственное значение уравнения

$$\lambda u = \frac{\beta}{\alpha} \omega(x)u + \alpha \nabla^2 u \quad (11.10)$$

дает, таким образом, частоту стационарных колебаний. При определении этой частоты следует аккуратно учитывать граничные условия; из-за нелинейности преобразования (11.8) они зависят от пространственного числа вращения Q .

Предположим, что профиль частот асимптотически однороден: $\omega \rightarrow \omega_0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, но имеет локальный максимум (мы предполагаем, что $Q = 0$, так что $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$). Это соответствует уравнению Шрёдингера с локальным минимумом (максимумом) потенциала, в зависимости от знака β . Из элементарной квантовой механики известно, что в одномерном случае потенциал вида ямы всегда имеет хотя бы одно дискретное собственное значение λ_1 в диапазоне $\omega_{\max} > \lambda > \omega_0$. Поэтому ведущая собственная функция имеет вид колебаний с частотой λ_1 : малая область с повышенной (при положительных β) частотой определяет частоту всей среды. Если локальная неоднородность соответствует холму потенциала, то у задачи на собственные значения (11.10) нет дискретных решений и наблюдаемая частота соответствует однородной области. Подобная ситуация наблюдается и в дву- и трехмерной версии этой задачи: локальная неоднородность с большей или меньшей частотой излучает концентрические волны и приводит к структуре типа «мишень», в зависимости от знака β .

11.2.2 Влияние шума: шероховатость против синхронизации

Уже небольшой шум может испортить синхронизацию в большой системе. Используем для моделирования однородной ($\omega = \text{constant}$)

колебательной среды с шумом ланжевеновский подход, т.е. добавим в правую часть (11.4) флуктуирующую силу:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \omega + \alpha \nabla^2 \phi(x, t) + \beta (\nabla \phi(x, t))^2 + \xi(x, t). \quad (11.11)$$

Это уравнение хорошо известно в теории шероховатых (rough) поверхностей как уравнение Кардара–Паризи–Жанга (см., например, [Barabási and Stanley 1995; Halpin-Healy and Zhang 1995]). В контексте нашей задачи поверхность есть профиль фазы $\phi(x, t)$, а шероховатость означает, что из начального однородного профиля развивается шероховатая функция x (с большими отклонениями от среднего значения).

Чтобы продемонстрировать шероховатость, рассмотрим линеаризованную версию уравнения (11.11), в которой пренебрежем членом $\sim (\nabla \phi)^2$:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \omega + \alpha \nabla^2 \phi(x, t) + \xi(x, t). \quad (11.12)$$

В теории шероховатых поверхностей (11.12) называют уравнением Эдвардса–Уилкинсона. Совершив преобразование Фурье по пространству, мы можем переписать (11.12) в виде системы независимых линейных уравнений для мод Фурье

$$\frac{d\phi_{\mathcal{K}}}{dt} = \omega \delta_{\mathcal{K}, 0} - \alpha \mathcal{K}^2 \phi_{\mathcal{K}} + \xi_{\mathcal{K}}(t).$$

Если предполагать шум гауссовским и δ -коррелированным в пространстве и времени, то все Фурье-компоненты $\xi_{\mathcal{K}}$ будут независимыми δ -коррелированными во времени случайными процессами с одной и той же интенсивностью $\langle \xi_{\mathcal{K}}(t) \xi_{\mathcal{K}'}(t') \rangle = 2\sigma^2 \delta_{\mathcal{K}\mathcal{K}'} \delta(t - t')$. Таким образом, спектральные компоненты $\phi_{\mathcal{K}}(t)$ также есть независимые процессы. Записывая для каждой величины $\phi_{\mathcal{K}}$ уравнение Фоккера–Планка, получим гауссовское стационарное распределение с дисперсией $Var(\phi_{\mathcal{K}}) = \sigma^2 \alpha^{-1} \mathcal{K}^{-2}$. Таким образом, пространственный спектр профиля фазы $\phi(x, t)$ пропорционален \mathcal{K}^{-2} ; можно показать (см., например, [Halpin-Healy and Zhang 1995]), что это верно и для нелинейного уравнения Кардара–Паризи–Жанга (11.11).

Дисперсию мгновенного профиля фазы $Var(\phi) = \langle (\phi - \langle \phi \rangle)^2 \rangle$ можно вычислить через интеграл по пространственному спектру. Поскольку интеграл расходится при $\mathcal{K} \rightarrow 0$, следует учесть ограничение при наименьшем волновом числе \mathcal{K}_0 , соответствующем размеру системы L : $\mathcal{K}_0 \sim L^{-1}$ (другое ограничение на малых масштабах

необходимо, чтобы избавиться от ультрафиолетовой расходимости). Начиная с этого места, результат зависит от размерности задачи d :

$$\text{Var}(\phi) \sim \int_{L^{-1}}^C \mathcal{K}^{d-1} \mathcal{K}^{-2} d\mathcal{K} \sim \begin{cases} L & d = 1 \\ \ln L & d = 2 \\ \text{constant} & d \geq 3. \end{cases} \quad (11.13)$$

Шероховатость – это свойство неограниченного роста ширины «поверхности» с увеличением размера системы. Как следует из (11.13), шероховатость существенно зависит от размерности задачи, т.е. от того, является колебательная среда одно-, дву- или трехмерной. Интегрирование пространственного спектра не приводит к расходимости при размерности большей, чем три, так что в этом случае шероховатости нет: дисперсия поверхности конечна даже в очень больших системах. В отличие от этого, профиль фазы шероховат при размерностях $d = 1, 2$.

С точки зрения динамики фазы переход к шероховатости может быть интерпретирован как потеря когерентности (см. [Gallas *et al.* 1992; Grinstein *et al.* 1993]). Начнем с шероховатости в одномерном случае. Отметим сначала, что из-за статистической пространственной однородности наблюдаемые частоты в (11.11) одинаковы во всех точках (что и не удивительно, поскольку автономные частоты тоже одинаковы). Таким образом, с точки зрения совпадения наблюдаемых частот, колебания в среде синхронизованы. Однако они не когерентны. В каждый момент времени профиль фазы есть кривая типа случайных блужданий (это видно из формы спектра $\sim \mathcal{K}^{-2}$), поэтому на малых расстояниях фазы отличаются не очень сильно и колебания могут рассматриваться как синхронные. Однако на больших пространственных масштабах характерная разность фаз превышает 2π и фазы, взятые по модулю 2π , не коррелированы. Если взять какую-нибудь зависящую от фазы наблюдаемую, например $\sin \phi$, то среднее от нее по всей среде постоянно, как в случае полностью независимых колебаний. В этом смысле шероховатость означает отсутствие когерентности в большой системе. И наоборот, если шероховатость профиля фазы отсутствует, т.е. вариации фазы по всей системе меньше 2π , то не только частоты всех осцилляторов совпадают, но и фазы коррелированы, и среднее от зависящей от фазы наблюдаемой по всей среде будет осциллировать с общей частотой. В работе [Chaté and Manneville 1992] приведены различные примеры такого поведения.

11.3 Слабо нелинейная колебательная среда

В разделе 11.2 колебательная среда описывалась с помощью одной фазовой переменной. Это возможно, если отклонение всех остальных переменных от предельного цикла, описывающего однородные периодические колебания, мало. Если это условие не выполняется, то необходимо рассматривать полные уравнения в частных производных. Ситуация упрощается в случае слабо нелинейных автоколебаний. В этом случае можно ввести комплексную амплитуду A , зависящую от пространства и времени, и представить переменные задачи $u(x, t)$ в виде $u = \text{Re}(A(x, t)e^{i\omega t})$. Здесь ω обозначает частоту автоколебаний. Уравнения для A можно вывести для каждой конкретной задачи с помощью метода усреднения или одного из его вариантов (см., например, [Kuramoto 1984; Naken 1993; Bohr *et al.* 1998]). Здесь мы воспользуемся тем же приемом, что и в разделе 11.2: возьмем цепочку слабо нелинейных автоколебательных систем и рассмотрим ее в непрерывном пределе.

11.3.1 Комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау

Одномерную цепочку слабо нелинейных осцилляторов можно описать обобщением уравнения (8.12):

$$\frac{dA_k}{dt} = \mu A_k - (\gamma + i\alpha)|A_k|^2 A_k + (\beta + i\delta)(A_{k+1} + A_{k-1} - 2A_k). \quad (11.14)$$

Здесь мы предполагаем, что параметры всех осцилляторов одинаковы. Переход к непрерывной среде означает, что разность $A_{k+1} - A_k$ порядка Δx ; соответственно постоянные взаимодействия β и δ должны быть велики. Полагая $\beta = \tilde{\beta}(\Delta x)^{-2}$ и $\delta = \tilde{\delta}(\Delta x)^{-2}$, получим

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mu A - (\gamma + i\alpha)|A|^2 A + (\tilde{\beta} + i\tilde{\delta})\nabla^2 A.$$

Удобно использовать то же изменение масштабов, что и в разделе 8.2, т.е. ввести безразмерное время, используя μ , и безразмерную амплитуду, используя $\sqrt{\gamma/\mu}$; тогда получается знаменитое комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау (КУГЛ):

$$\frac{\partial a(x, t)}{\partial t} = a - (1 + ic_3)|a|^2 a + (1 + ic_1)\nabla^2 a, \quad (11.15)$$

описывающее слабо нелинейные автоколебания в сплошной среде. Различные члены имеют следующее физическое значение: первый

член в правой части описывает линейный рост колебаний; второй член описывает нелинейное насыщение (действительная часть коэффициента) и нелинейный сдвиг частоты (мнимая часть); последний член описывает пространственное взаимодействие – диффузию – диссипативного (действительная часть) или консервативного (мнимая часть) типа. Чисто консервативная версия КУГЛ (т.е. с чисто мнимыми коэффициентами в правой части, формально это соответствует пределу $c_{1,3} \rightarrow \infty$) есть нелинейное уравнение Шрёдингера – полностью интегрируемая гамильтоновская система. В контексте описания автоколебаний диссипативные члены существенны; более того, в некоторых ситуациях (изохронные автоколебания и чисто диссипативное взаимодействие) коэффициенты c_1 и c_3 обнуляются. Не претендуя на полное описание свойств КУГЛ (см., например, [Shraiman *et al.* 1992; Cross and Hohenberg 1993; Chaté and Manneville 1996; Vohr *et al.* 1998]), мы отметим здесь только свойства, важные с точки зрения синхронизации.

КУГЛ имеет решения в виде плоских волн (ср. с (11.5))

$$a(x, t) = (1 - \mathcal{K}^2) \exp[i\mathcal{K}x - i(c_3 + (c_1 - c_3)\mathcal{K}^2)t],$$

которые можно интерпретировать как синхронный режим в среде. Не все эти волны устойчивы, но по крайней мере некоторые длинноволновые решения устойчивы, если

$$1 + c_1 c_3 > 0. \quad (11.16)$$

Чтобы увидеть, как возникает критерий (11.16), запишем фазовое приближение для КУГЛ. Это приближение справедливо для плавно меняющихся в пространстве полей, где диффузионный член (пропорциональный квадрату характерного волнового числа) может рассматриваться как малое возмущение. В этом случае можно применить общую формулу (7.14) для возмущений вблизи однородного предельного цикла и получить уравнение для фазы. В эту формулу мы подставим фазовую зависимость в виде (ср. (7.10) и (7.16))

$$\phi(X, Y) = \tan^{-1} \frac{Y}{X} - \frac{c_3}{2} \ln(X^2 + Y^2),$$

а возмущение – в виде

$$p_X = \nabla^2 X(\phi) - c_1 \nabla^2 Y(\phi), \quad p_Y = \nabla^2 Y(\phi) + c_1 \nabla^2 X(\phi)$$

с $a = X + iY = \cos \phi + i \sin \phi$ и получим

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c_3 + (1 + c_3 c_1) \nabla^2 \phi + (c_3 - c_1) (\nabla \phi)^2. \quad (11.17)$$

Это уравнение, разумеется, совпадает с (11.4). Основная особенность, делающая динамику КУГЛ нетривиальной, это возможность неустойчивости фазы: коэффициент диффузии фазы в уравнении (11.17) есть $1 + c_3 c_1$, и, если он отрицателен, то пространственно однородное решение неустойчиво. Критерий (11.16) был выведен Ньюэллом [Newell 1974], но неустойчивость часто называют неустойчивостью Бенжамина–Фэйра, по имени авторов, исследовавших аналогичную неустойчивость нелинейных волн на воде [Benjamin and Feir 1967].

Физический механизм неустойчивости станет понятен, если сравнить критерий Ньюэла (11.16) с уравнением (8.17), описывающим взаимодействие двух осцилляторов. Как обсуждалось в разделе 8.2, комбинация неизохронности и реактивной связи приводит к отталкиванию фаз связанных осцилляторов; точно такая же комбинация приводит к неустойчивости в непрерывной среде.

Численные эксперименты показывают, что вблизи порога фазовой неустойчивости (11.16) амплитуда $|a|$ остается близкой к стационарному значению 1, а фаза меняется в пространстве и во времени нерегулярно. Этот режим называют фазовой турбулентностью. Его можно описать, используя обобщение уравнения (11.17)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c_3 + (1 + c_3 c_1) \nabla^2 \phi + (c_3 - c_1) (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} c_1^2 (1 + c_3^2) \nabla^4 \phi, \quad (11.18)$$

где учтен стабилизирующий член, пропорциональный четвертой производной по пространству. Это уравнение Курамото–Сивашинского [Непомнящий 1974; Kuramoto and Tsuzuki 1976; Sivashinsky 1978], описывающее нелинейную стадию фазовой неустойчивости. В достаточно большой пространственной области оно имеет турбулентные решения. Интересно отметить, что из-за фазовой турбулентности крупномасштабные свойства профиля фазы в уравнении Курамото–Сивашинского (11.18) такие же, как в уравнении Кардара–Паризи–Жанга (11.11) [Yakhot 1981; Bohr *et al.* 1998]: турбулентность играет роль эффективного шума для крупномасштабных изменений фазы. В частности, в большой системе профиль фазы становится шероховатым, что означает потерю когерентности. Вдали от границы неустойчивости наблюдается режим амплитудной турбулентности. Он характеризуется появлением дефектов – точек на пространственно–временной диаграмме, где амплитуда обращается в ноль. В дефекте разность фаз между соседними точками меняется на $\pm 2\pi$, при этом пропадают как синхронизация, так и когерентность. Основные режимы в КУГЛ показаны на

рис. 11.3.

В дву- и трехмерной колебательной среде появляются новые устойчивые объекты – спирали. Спираль вращается вокруг топологического дефекта и устойчива в широком диапазоне параметров. Колебания в спирали синхронизованы. Другие объекты, часто наблюдаемые в двумерных колебательных средах, это мишени: концентрические волны распространяющиеся из осциллирующего центра. В неоднородной среде, где возможны мишени с разными периодами, обычно соревнование выигрывает волна с наименьшим периодом. Более подробно свойства спиралей и мишеней, в том числе в среде из релаксационных осцилляторов, описаны в работах [Cross and Hohenberg 1993; Bohr *et al.* 1998; Mikhailov 1994; Walgraef 1997] и в приведенных там ссылках.

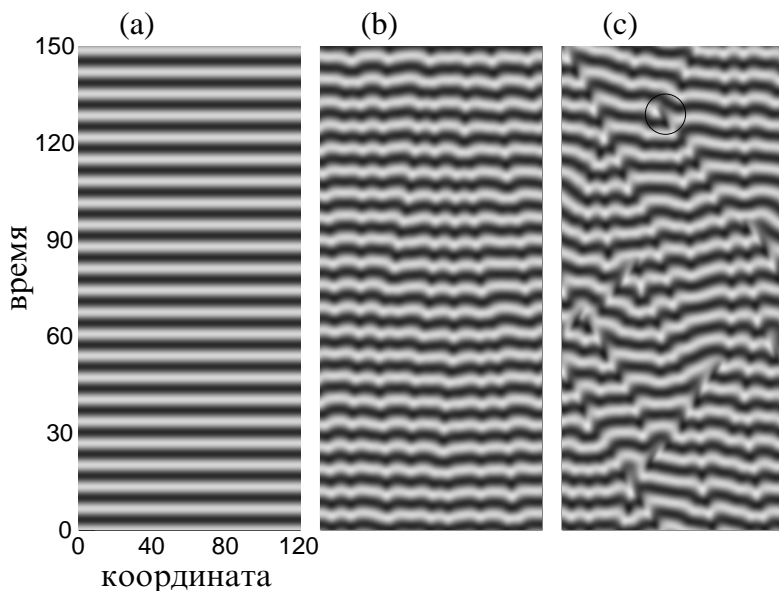


Рис. 11.3. Режимы в комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау. Действительная часть $\text{Re}(a)$ показана градациями серого цвета, так что линии постоянного цвета соответствуют линиям постоянной фазы. (а) Устойчивые пространственно однородные периодические по времени колебания при $c_3 = 1$, $c_1 = 0$. (б) Режим фазовой турбулентности при $c_3 = 1$, $c_1 = -1.7$; линии постоянной фазы флуктуируют, но не разрываются. (с) Амплитудная турбулентность при $c_3 = 1$, $c_1 = -2$; один дефект, в котором амплитуда обнуляется и линия постоянной фазы разрывается, обведен кружком.

11.3.2 Внешнее воздействие на колебательную среду

Интересная, но еще не полностью решенная, задача состоит в синхронизации колебательной среды внешней периодической силой. В частности, [Petrov *et al.* 1997] провели недавно эксперименты с двумерной колебательной химической реакцией (реакцией Белоусова—Жаботинского). С помощью переменного освещения осуществлялось периодическое воздействие, что приводило к различным захваченным и асинхронным режимам (см. также раздел 4.2.4). Мы кратко изложим здесь численные результаты по исследованию слабо нелинейной одномерной среды. Колебательная среда описывается КУГЛ (11.15); учет дополнительной периодической синусоидальной силы с частотой, близкой к собственной частоте среды, приводит к уравнению

$$\frac{\partial a(x, t)}{\partial t} = (1 - i\nu)a - (1 + ic_3)|a|^2 a + (1 + ic_1)\nabla^2 a - ie \quad (11.19)$$

(ср. с соответствующим уравнением для одного осциллятора с силой (7.43)). Здесь e — это амплитуда силы, а ν — расстройка частот. В пространственно однородном случае вопрос существования синхронного решения $a = \text{constant}$ сводится к анализу уравнения (7.43). Отличие состоит в свойствах устойчивости решений: в среде пространственно неоднородные возмущения могут нарастать, даже если мы находимся в области устойчивой синхронизации одного осциллятора (уравнение (7.43)). Таким образом, синхронизация может быть нарушена из-за пространственной неоднородности. Другой интересный момент заключается в том, что, даже если однородное синхронизованное состояние устойчиво, то оно не обязательно является глобальным аттрактором. Действительно, предположим, что мы прикладываем внешнюю силу к состоянию с большими отклонениями фазы или к плоской волне с ненулевым волновым числом. Сила стремится привести фазу к устойчивому значению ϕ_0 , но все фазы $\phi_0 + 2\pi m$ также устойчивы. Поэтому фазовый профиль будет иметь вид последовательности областей постоянной фазы, разделенных $\pm 2\pi$ -перепадами, см. рис. 11.4.

При некоторых параметрах системы эти перепады могут быть устойчивы (обычно они движутся с постоянной скоростью), и колебательная среда никогда полностью не синхронизируется. При других параметрах перепад исчезает с образованием дефекта, как при амплитудной турбулентности. В последнем случае есть две возможности. Перепад может полностью исчезнуть, так что в конце концов установится полная синхронизация: фазы всех точек одинаковы и

захвачены внешней силой. Однако при определенных параметрах возмущения, появляющиеся при исчезновении перепада, приводят

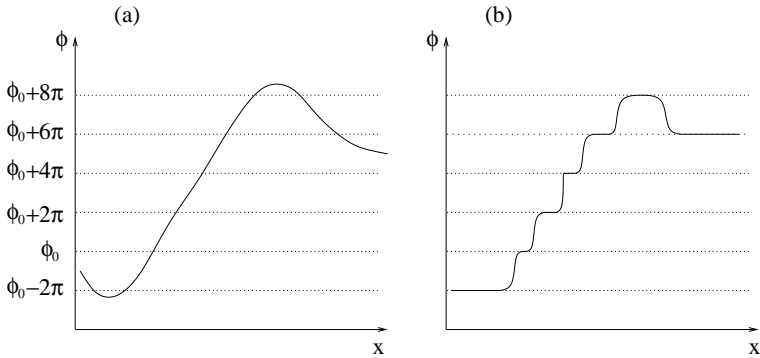


Рис. 11.4. Образование перепадов из начального профиля фазы. Устойчивые значения фазы показаны пунктиром. (а) Начальный профиль. (б) Перепады формируются под действием внешней силы.

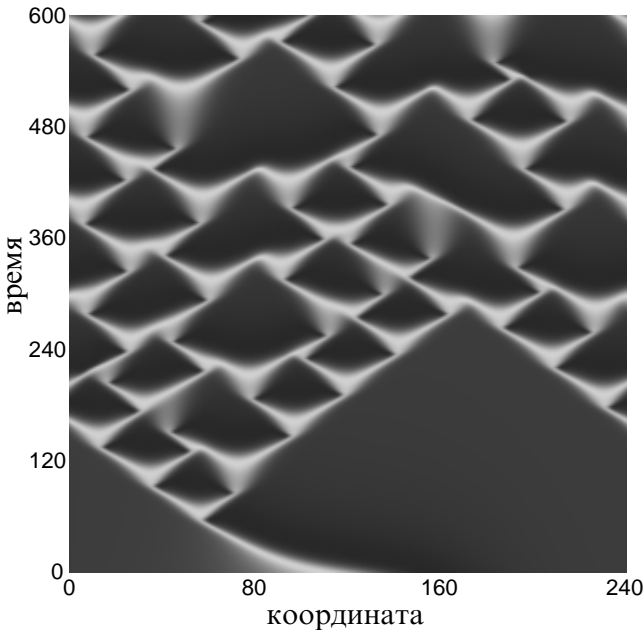


Рис. 11.5. Размножение перепадов в КУГЛ с внешней силой (11.19) при $c_3 = 1$, $c_1 = 0$, $\nu = 1.1$, $e = 0.073$. Поле $\text{Re}(a)$ показано градациями серого цвета. Режим идеальной синхронизации (т.е. $\text{Re}(a) = \text{constant}$) устойчив по отношению к малым возмущениям, но один начальный перепад разрушает этот режим, приводя к перемежающемуся состоянию появляющихся и исчезающих перепадов.

к двум новым перепадам (см. детали в [Chaté *et al.* 1999]). Таким образом перепады начинают размножаться, обычно (в больших системах) приводя к турбулентности. Этот режим перемежающийся: в одном месте наблюдается синхронизация в течение долгого интервала времени, но иногда перепад создает 2π -проскок фазы. Пространственно–временная динамика показана на рис. 11.5.

11.4 Библиографические заметки

Одномерные цепочки различных осцилляторов подробно исследовались численно: фазовые осцилляторы [Ermentrout and Kopell 1984; Kopell and Ermentrout 1986; Sakaguchi *et al.* 1988a; Rogers and Wille 1996; Zheng *et al.* 1998; Ren and Ermentrout 2000], слабо нелинейные осцилляторы [Ermentrout 1985], системы фазовой автоподстройки [Afraimovich *et al.* 1994; de Sousa Vieira *et al.* 1994], джозефсоновские контакты [Braiman *et al.* 1995], релаксационные осцилляторы [Corral *et al.* 1995b,a; Herz and Hopfield 1995; Hopfield and Herz 1995; Drossel 1996; Mousseau 1996; Díaz-Guilera *et al.* 1998], хаотические [Osipov *et al.* 1997] и возбуждаемые шумом [Neiman *et al.* 1999b] осцилляторы. Результаты для двумерных цепочек можно найти в [Sakaguchi *et al.* 1988a; Aoyagi and Kuramoto 1991; Blasius *et al.* 1999].

Колебательные среды исследовались подробно, но только в некоторых работах упор делался на свойства синхронизации. Синхронизация внешней силой исследовалась экспериментально в [Petrov *et al.* 1997], соответствующее комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау рассматривалось в [Couillet and Emilsson 1992b,a; Schrader *et al.* 1995; Chaté *et al.* 1999; Elphick *et al.* 1999]. Junge and Parlitz [2000] исследовали фазовую синхронизацию двух связанных уравнений Гинзбурга–Ландау.

Глава 12

Ансамбли глобально связанных осцилляторов

Эффект взаимной синхронизации двух связанных осцилляторов, описанный в главе 8, может быть обобщен на более сложные случаи. Одна ситуация была описана в главе 11, где мы рассматривали решетки осцилляторов, связанных с ближайшими соседями. Часто осцилляторы не образуют регулярной решетки; более того, они могут взаимодействовать не только с соседями, но и со многими другими осцилляторами. Исследования трех и четырех осцилляторов, связанных каждый с каждым, дают достаточно сложную, практически неисчерпаемую картину (см., к примеру, [Tass and Naken 1996; Tass 1997]). Ситуация упрощается, если взаимодействие однородно, т.е. все пары осцилляторов связаны одинаково. Более того, если число осцилляторов велико, то можно рассмотреть термодинамический предел, где число элементов ансамбля стремится к бесконечности. В этом случае, когда осцилляторы не упорядочены в пространстве, обычно говорят об ансамбле (популяции) связанных осцилляторов. При этом широко используется аналогия со статистической механикой, поэтому неудивительно, что переход к синхронизации выглядит как неравновесный фазовый переход в ансамбле.

Мы начнем с описания перехода Курамото в ансамбле фазовых осцилляторов. Далее, мы рассмотрим ансамбль зашумленных систем. Различные обобщения основной модели (в частности, ансамбли хаотических осцилляторов) рассмотрены в разделе 12.3.

12.1 Переход Курамото

В данном разделе мы рассматриваем, следуя Курамото [Kuramoto 1984], простую модель N взаимно связанных осцилляторов, имеющих различные собственные частоты ω_k . Динамика системы описывается уравнениями, сходными с (8.5):

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_k). \quad (12.1)$$

Параметр ε здесь определяет силу связи. Сила связи между каждой парой выбрана пропорциональной N^{-1} : только в этом случае мы получаем независимые от N результаты в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$. Действительно, если связь между двумя осцилляторами не зависит от N , то сила, действующая на каждый осциллятор, растет с размером ансамбля и в термодинамическом пределе стремится к бесконечности, что, очевидно, приводит к синхронизации всех элементов ансамбля. Собственные частоты осцилляторов ω_k предполагаются распределенными в некотором диапазоне, и при $N \rightarrow \infty$ мы можем описать распределение с помощью плотности $g(\omega)$.¹ Мы будем предполагать, что распределение симметрично по отношению к единственному максимуму на частоте $\bar{\omega}$. В уравнениях (12.1) предполагается, что связь имеет простейший синусоидальный вид; некоторые обобщения будут рассмотрены в разделе 12.3.

Прежде чем обсуждать возможное возникновение взаимной синхронизации, перепишем систему (12.1) в более удобном для анализа виде. Введем комплексное *среднее поле* ансамбля в соответствии с

$$Z = X + iY = K e^{i\Theta} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\phi_k}. \quad (12.2)$$

Среднее поле имеет амплитуду K и фазу Θ :

$$K \cos \Theta = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos \phi_k, \quad K \sin \Theta = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin \phi_k. \quad (12.3)$$

Среднее поле является индикатором возникновения когерентности за счет синхронизации в ансамбле. Действительно, если все частоты различны, то в каждый момент времени фазы ϕ_k равномерно распределены в интервале $[0, 2\pi)$, и среднее поле не возникает. Наоборот, если некоторые осцилляторы в ансамбле синхронизируются на

¹ Мы опускаем нижний индекс у ω в аргументе распределения.

некой частоте, то их колебания складываются когерентным образом и возникает ненулевое среднее поле. Очевидна аналогия с ферромагнитным фазовым переходом, где среднее магнитное поле возникает благодаря корреляции в ориентации элементарных магнитных моментов (спинов). Следовательно, амплитуда среднего поля (12.2) может быть выбрана в качестве естественного параметра порядка при описании перехода к синхронизации.

Основная модель (12.1) может быть переписана в виде системы осцилляторов под воздействием среднего поля:

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \varepsilon K \sin(\Theta - \phi_k). \quad (12.4)$$

Очевидно, что нулевое среднее поле означает, что сила, действующая на каждый осциллятор, также равна нулю. Следовательно, некогерентное состояние всегда является решением системы (12.1). В этом случае каждый элемент ансамбля осциллирует на своей собственной частоте ω_k . В общем случае эти частоты различны, и, следовательно, фазы равномерно распределены на интервале $[0, 2\pi)$, и среднее поле равно нулю в соответствии с (12.2) и (12.3). Менее тривиально состояние с ненулевым средним полем. Если оно периодически ($K = \text{constant}$, $\Theta = \omega t$), то каждое из уравнений (12.4) эквивалентно фазовому уравнению осциллятора под воздействием периодической силы (уравнение (7.20)). Мы видим, что среднее поле действует на каждый осциллятор как внешняя сила, которая, в зависимости от параметров или может, или не может захватить его частоту.

Возникновение среднего поля может быть объяснено как самосогласованный процесс: ненулевое среднее поле захватывает, по крайней мере, некоторые осцилляторы, так что они становятся когерентными, и эта когерентная группа генерирует ненулевой вклад в среднее поле. Ниже мы изложим эти аргументы математически.

Естественно предположить, что из-за симметрии распределения $g(\omega)$, среднее поле будет осциллировать на центральной частоте $\bar{\omega}$ (в принципе, мы можем выбрать в начале произвольную частоту, а затем получить $\bar{\omega}$ из условия самосогласованности; учитывая же симметрию, мы просто предполагаем, что $\bar{\omega}$ есть частота среднего поля; впоследствии мы убедимся, что эта частота действительно является решением). Основная идея состоит в том, чтобы вывести условия самосогласованности, по аналогии с теорией фазовых переходов второго рода. Итак, подставим

$$\Theta = \bar{\omega}t, \quad K = \text{constant}, \quad \psi_k = \phi_k - \bar{\omega}t,$$

и получим

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \omega_k - \bar{\omega} - \varepsilon K \sin \psi_k. \quad (12.5)$$

Это уравнение совпадает с (7.24) и может иметь как синхронное, так и асинхронное решение.

(i) Синхронное решение

$$\psi_k = \sin^{-1} \frac{\omega_k - \bar{\omega}}{\varepsilon K} \quad (12.6)$$

существует при условии, что собственная частота k -го осциллятора близка к $\bar{\omega}$: $|\omega_k - \bar{\omega}| \leq \varepsilon K$. Соответствующие осцилляторы захвачены средним полем.

(ii) Асинхронное решение, при котором фаза ψ_k вращается в соответствии с уравнением (12.5), существует, если $|\omega_k - \bar{\omega}| > \varepsilon K$. В асинхронном состоянии фазы распределены неравномерно, что будет учтено в дальнейшем.

Следующий шаг состоит в том, чтобы найти вклад в среднее поле соответственно от групп синхронизованных и несинхронизованных элементов. Чтобы вычислить (12.3) в пределе $N \rightarrow \infty$, нам необходимо знать распределение разности фаз $n(\psi)$. В соответствии с двумя возможными решениями мы представим это распределение в виде суммы синхронной $n_s(\psi)$ и асинхронной $n_{as}(\psi)$ компонент.

Для осцилляторов, захваченных средним полем, разность фаз ψ не зависит от времени и определяется собственной частотой в соответствии с (12.6), так что распределение $n_s(\psi)$ может быть получено из распределения собственных частот

$$n_s(\psi) = g(\omega) \left| \frac{d\omega}{d\psi} \right| = \varepsilon K g(\bar{\omega} + \varepsilon K \sin \psi) \cos \psi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (12.7)$$

Для незахваченных средним полем осцилляторов разность фаз вращается, но для каждого ω_k мы можем получить распределение разности фаз непосредственно из уравнения (12.5). Так как разность фаз вращается неравномерно во времени, то вероятность наблюдать значение ψ обратно пропорциональна скорости вращения в этот момент $|\dot{\psi}|$. Таким образом, для данного ω_k распределение разности фаз

$$P(\psi, \omega) \sim \frac{1}{|\dot{\psi}|}.$$

Подставив сюда значение скорости из (12.5) и нормализовав, получим

$$\begin{aligned}
 P(\psi, \omega) &= \left(|\omega - \bar{\omega} - \varepsilon K \sin \psi| \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{|\omega - \bar{\omega} - \varepsilon K \sin \psi|} \right)^{-1} \\
 &= \frac{\sqrt{(\omega - \bar{\omega})^2 - \varepsilon^2 K^2}}{2\pi |\omega - \bar{\omega} - \varepsilon K \sin \psi|}.
 \end{aligned} \tag{12.8}$$

Теперь нам необходимо усреднить по распределению $g(\omega)$, чтобы получить распределение разности фаз для асинхронных осцилляторов:

$$\begin{aligned}
 n_{\text{as}}(\psi) &= \int_{|\omega - \bar{\omega}| > \varepsilon K} g(\omega) P(\psi, \omega) d\omega \\
 &= \int_{\bar{\omega} + \varepsilon K}^{\infty} \frac{g(\omega) \sqrt{(\omega - \bar{\omega})^2 - \varepsilon^2 K^2}}{2\pi (\omega - \bar{\omega} - \varepsilon K \sin \psi)} d\omega \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\bar{\omega} - \varepsilon K} \frac{g(\omega) \sqrt{(\omega - \bar{\omega})^2 - \varepsilon^2 K^2}}{2\pi (-\omega + \bar{\omega} + \varepsilon K \sin \psi)} d\omega.
 \end{aligned}$$

Обозначая $\omega - \bar{\omega} = x$ и используя симметрию распределения частот $g(\bar{\omega} + x) = g(\bar{\omega} - x)$, перепишем последнее выражение в более компактном виде

$$n_{\text{as}}(\psi) = \int_{\varepsilon K}^{\infty} \frac{g(\bar{\omega} + x) x \sqrt{x^2 - \varepsilon^2 K^2}}{\pi [x^2 - \varepsilon^2 K^2 \sin^2 \psi]} dx. \tag{12.9}$$

Теперь с помощью распределений n_s и n_{as} запишем самосогласованное уравнение для среднего поля

$$K e^{i\bar{\omega}t} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\psi + i\bar{\omega}t} [n_s(\psi) + n_{\text{as}}(\psi)] d\psi. \tag{12.10}$$

Отметим, прежде всего, что, в соответствии с (12.9), асинхронная компонента распределения $n_{\text{as}}(\psi)$ имеет период π по ψ , так что она не вносит вклад в интеграл (12.10). Таким образом, мы получаем два действительных уравнения (действительная и мнимая части (12.10)):

$$K = \varepsilon K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \psi \cdot g(\bar{\omega} + \varepsilon K \sin \psi) d\psi, \tag{12.11}$$

$$0 = \varepsilon K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi \sin \psi \cdot g(\bar{\omega} + \varepsilon K \sin \psi) d\psi. \tag{12.12}$$

Уравнение (12.12) определяет частоту, и мы видим, что $\bar{\omega}$ было правильным выбором: это уравнение удовлетворяется благодаря симметрии распределения частот. Остается уравнение (12.11), которое определяет амплитуду K среднего поля. Оно может быть решено аналитически только для некоторых видов распределения $g(\omega)$.

В качестве точно разрешимого примера рассмотрим распределение Лоренца

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi[(\omega - \bar{\omega})^2 + \gamma^2]}. \quad (12.13)$$

Для этого распределения интеграл в (12.11) может быть вычислен аналитически. После некоторых преобразований мы получаем амплитуду когерентного решения:

$$K = \sqrt{1 - \frac{2\gamma}{\varepsilon}}. \quad (12.14)$$

Нетривиальное среднее поле существует, если сила связи превышает критическое значение $\varepsilon_c = 2\gamma$. Переход к синхронизации напоминает фазовый переход второго рода и характеризуется критическим индексом $1/2$: $K \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^{1/2}$. Это также справедливо в общем случае распределения $g(\omega)$ с одним максимумом. Так как для малых K синхронизируются только осцилляторы с $\omega \cong \bar{\omega}$, то только локальные свойства функции g в окрестности максимума важны вблизи порога синхронизации. Из уравнения (12.11) можно увидеть, что для малых K только окрестность $\bar{\omega}$ вносит вклад в среднее поле. Таким образом, предполагая K малым и раскладывая $g(\bar{\omega} + \varepsilon K \sin \psi)$ в (12.11) в ряд Тейлора

$$g(\bar{\omega} + \varepsilon K \sin \psi) \approx g(\bar{\omega}) + \frac{g''}{2} \varepsilon^2 K^2 \sin^2 \psi,$$

получим после подстановки в (12.11)

$$\varepsilon_c = \frac{2}{\pi g(\bar{\omega})}, \quad K^2 \approx \frac{8g(\bar{\omega})}{|g''| \varepsilon^3} (\varepsilon - \varepsilon_c). \quad (12.15)$$

Переход к синхронизации в ансамбле осцилляторов проиллюстрирован результатами численного моделирования на рис. 12.1.

12.2 Осцилляторы с шумом

Теперь рассмотрим ансамбль идентичных осцилляторов в присутствии внешнего шума. Обычно считают, что силы, возмущающие каждый осциллятор, статистически независимы и имеют одинаковые распределения. Очевидно, что в таком ансамбле наблюдаемые частоты всех элементов равны, но, из-за шума, осцилляторы могут иметь совершенно разные фазы. Синхронизация означает наличие когерентности в ансамбле, что видно по ненулевому среднему полю.

Основная модель может быть записана в виде системы связанных уравнений Ланжевена со случайными силами $\xi_i(t)$:

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_k) + \xi_k(t). \quad (12.16)$$

Частоты всех осцилляторов равны, поэтому удобно ввести в рассмотрение фазы во вращающейся системе координат

$$\psi_k = \phi_k - \omega_0 t,$$

в результате чего получим

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\psi_j - \psi_k) + \xi_k(t). \quad (12.17)$$

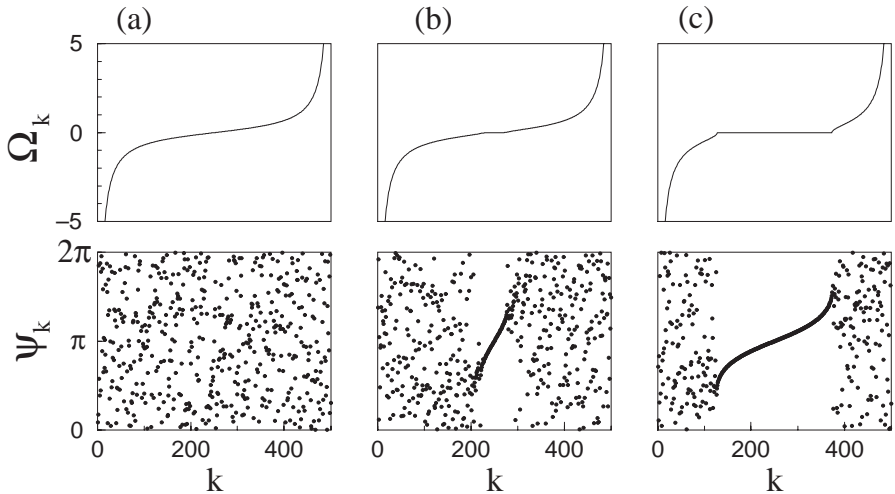


Рис. 12.1. Динамика ансамбля из 500 фазовых осцилляторов, описываемых уравнением (12.1). Собственные частоты имеют распределение Лоренца (12.13) с $\gamma = 0.5$ и $\bar{\omega} = 0$; критическое значение силы связи $\varepsilon_c = 1$. (а) Докритическая сила связи $\varepsilon = 0.7$. Осцилляторы не синхронизованы, среднее поле флуктуирует вокруг нуля (из-за конечности размера ансамбля). (б) Связь, близкая к критической $\varepsilon = 1.01$. Малая часть ансамбля (элементы, частоты которых близки к центральной частоте) синхронна. Наблюдаемые частоты $\Omega_k = \langle \dot{\phi}_k \rangle$ этих элементов одинаковы. (с) $\varepsilon = 1.2$, большая часть ансамбля синхронна, среднее поле велико. Амплитуда среднего поля $K \approx 0.1$ для (б) и $K \approx 0.41$ для (с), что находится в хорошем соответствии с формулой (12.14).

В дальнейшем предполагаем, что случайные члены имеют гауссовское распределение с нулевым средним, δ -коррелированы во времени и независимы для различных осцилляторов:

$$\langle \xi_n \rangle = 0, \quad \langle \xi_m(t) \xi_n(t') \rangle = 2\sigma^2 \delta(t - t') \delta_{mn}.$$

Опишем качественно возможные эффекты. Есть два фактора, влияющие на фазы. Шум стремится сделать распределение фаз в ансамбле равномерным, и тем самым уменьшает среднее поле. Взаимодействие приводит к притяжению фаз, т.е. к тенденции к образованию кластера, а следовательно и к появлению ненулевого среднего поля. При $\varepsilon/\sigma^2 \rightarrow 0$ влияние шума сильнее, и тенденция к отсутствию когерентности побеждает, в то время как при $\varepsilon/\sigma^2 \rightarrow \infty$ преобладает взаимодействие и значения фаз уравниваются. Можно ожидать, что при некотором критическом значении силы связи ε_c мы будем наблюдать переход к синхронизации.

По аналогии с (12.2) введем среднее поле

$$Z = X + iY = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\psi_k} \quad (12.18)$$

и перепишем систему (12.17) в виде

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \varepsilon(-X \sin \psi_k + Y \cos \psi_k) + \xi_k(t). \quad (12.19)$$

Цель теории – написать самосогласованное уравнение для распределения фаз. Предположим, что среднее поле Z есть медленная (по сравнению с шумом) функция времени, и, следовательно, в уравнении Ланжевена оно может рассматриваться в качестве детерминированного члена. Тогда (12.19) становится аналогичным ланжевенскому уравнению для отдельного осциллятора с шумом (см. (9.7)). Соответствующее уравнение Фоккера–Планка для плотности распределения фаз имеет вид

$$\frac{\partial P(\psi, t)}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \psi} [(X \sin \psi - Y \cos \psi) P] + \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2}. \quad (12.20)$$

Рассмотрим теперь термодинамический предел $N \rightarrow \infty$. В этом пределе усреднение по ансамблю (12.18) может быть заменено усреднением по распределению $P(\psi, t)$:

$$Z = X + iY = \int_0^{2\pi} d\psi P(\psi, t) e^{i\psi}. \quad (12.21)$$

Уравнения (12.20) и (12.21) представляют собой окончательную самосогласованную систему уравнений для неизвестной функции распределения и среднего поля. Отметим, что эта система нелинейна, т.к. члены X и Y в (12.20) зависят от $P(\psi, t)$ в соответствии с уравнением (12.21).

Чтобы проанализировать систему уравнений, разложим плотность P в ряд Фурье

$$P(\psi, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_l P_l(t) e^{il\psi}. \quad (12.22)$$

Отметим, что в соответствии с уравнением (12.21) среднее поле является комплексной амплитудой первой моды $Z = X + iY = P_1^* = P_{-1}$ и, вследствие нормализации, амплитуда нулевой моды равна единице, $P_0 = 1$. Подставляя (12.22) в (12.20) и разделяя Фурье-компоненты, получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dP_l}{dt} = -\sigma^2 l^2 P_l + \frac{l\varepsilon}{2} (P_{l-1} P_1 - P_{l+1} P_1^*). \quad (12.23)$$

Запишем первые три уравнения

$$\dot{P}_1 = \frac{\varepsilon}{2} (P_1 - P_2 P_1^*) - \sigma^2 P_1, \quad (12.24)$$

$$\dot{P}_2 = \varepsilon (P_1^2 - P_3 P_1^*) - 4\sigma^2 P_2, \quad (12.25)$$

$$\dot{P}_3 = \frac{3\varepsilon}{2} (P_2 P_1 - P_4 P_1^*) - 9\sigma^2 P_3. \quad (12.26)$$

Отметим, что равномерное распределение фаз, при котором все Фурье-моды (за исключением P_0) исчезают, является решением системы. Линеаризуя уравнения вокруг этого состояния, мы видим, что только первая мода является потенциально неустойчивой: она устойчива при $\varepsilon < 2\sigma^2$ и неустойчива, если $\varepsilon > 2\sigma^2$. Это в точности соответствует критическому значению силы связи, а неустойчивая мода – это и есть среднее поле, $P_1 = Z^*$. Чтобы получить стационарное решение за порогом неустойчивости, необходимо учесть нелинейные члены. Полезно отметить, что вблизи порога $\varepsilon \approx 2\sigma^2$ вторая мода затухает довольно быстро по сравнению с характерным временем неустойчивости (т.е. $|\varepsilon - 2\sigma^2| \ll \sigma^2$). Более того, мы можем оценить $|P_2| \sim |P_1|^2$ (из (12.25)) и $|P_3| \sim |P_1|^3$ (из (12.26)). Таким образом, подстановка $\dot{P}_2 \approx 0, P_3 \approx 0$ является хорошим приближением, которое позволяет выразить P_2 через P_1 алгебраически и получить

$$\dot{Z} = \left(\frac{\varepsilon}{2} - \sigma^2 \right) Z - \frac{\varepsilon^2}{8\sigma^2} |Z|^2 Z. \quad (12.27)$$

Это уравнение нормальной формы для бифуркации Хопфа (в теории гидродинамической неустойчивости оно также называется уравнением Ландау-Стюарта) описывает возникновение макроскопического среднего поля в ансамбле связанных осцилляторов с шумом. Его стационарное решение есть

$$|Z|^2 = (\varepsilon - 2\sigma^2) \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2}. \quad (12.28)$$

Вблизи перехода среднее поле растет пропорционально квадратному корню из надкритичности. Это свойство ансамбля зашумленных осцилляторов еще раз иллюстрирует аналогию с теорией фазовых переходов. Фаза среднего поля может быть произвольной; в термодинамическом пределе она постоянна (во вращающейся системе координат).

12.3 Обобщения

Мы описали две основных причины отсутствия когерентности в большом ансамбле осцилляторов: распределение собственных частот и внешний шум. В последнее время большой интерес вызывают смежные проблемы, где, например, присутствуют оба этих фактора. В этом разделе мы даем обзор основных результатов.

12.3.1 Модели, основанные на фазовом приближении

Шум и распределение частот

Естественным обобщением моделей, описанных в разделах 12.1 и 12.2, является комбинация двух основных причин беспорядка: внешнего шума и распределения собственных частот, что приводит к модели:

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \xi_k(t) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_k). \quad (12.29)$$

Плотность распределения для одного осциллятора теперь зависит также и от частоты ω : $P(\phi, \omega, t)$. Среднее поле может быть определено путем осреднения по распределениям фаз и частот:

$$K e^{i\Theta} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\phi} P(\phi, \omega, t) g(\omega). \quad (12.30)$$

Среднее поле определяет динамику осциллятора, так что функция распределения подчиняется уравнению Фоккера-Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \phi} [(\omega + \varepsilon K \sin(\Theta - \phi))P] + \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2}. \quad (12.31)$$

Система уравнений (12.30) и (12.31) дает самосогласованное описание проблемы. В общем случае, при малой связи ε некогерентное состояние $P(\phi, \omega) = 1/2\pi$, $K = 0$ устойчиво. При увеличении связи наблюдается переход к синхронному состоянию с ненулевым средним полем. Характер перехода зависит от конкретной формы функции распределения $g(\omega)$ – это может быть мягкая (закритическая) бифуркация, описанная в разделе 12.2, или жесткая (докритическая) (см. Bonilla *et al.* [1992]; Acebrón *et al.* [1998]).

Гистерезисный переход к синхронизации

Другое возможное обобщение состоит в рассмотрении инерционной фазовой динамики. При этом вместо (12.29) записывается система уравнений Ланжевена второго порядка для связанных ротаторов

$$m \frac{d^2 \phi_k}{dt^2} + \frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \xi_k(t) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_k). \quad (12.32)$$

Переход между асинхронным и синхронным состоянием демонстрирует в этом случае гистерезис [Tanaka *et al.* 1997a,b; Hong *et al.* 1999c]. Наличие гистерезиса непосредственно связано с бистабильностью одиночного ротатора при внешнем воздействии: в системе

$$m \frac{d^2 \Psi}{dt^2} + \frac{d\Psi}{dt} + a \sin \Psi = I$$

в определенном диапазоне крутящего момента I сосуществуют два устойчивых решения: вращение и состояние покоя.

Обобщенная функция связи: кластеры

В разделах 12.1 и 12.2 рассматривалась только простейшая притягивающая связь, пропорциональная синусу от разности фаз.² Здесь

² Связь, описываемая синусом, может быть также обобщена на случай некоторого предпочтительного сдвига фаз между осцилляторами; мы обсудим этот случай при рассмотрении связанных джозефсоновских контактов, см. ниже уравнение (12.43).

мы покажем, что более сложная форма связи может привести к дальнейшему усложнению коллективной динамики. Okuda [1993] показал, что, если связь между идентичными (т.е. имеющими одинаковые собственные частоты) фазовыми осцилляторами описывается некоей обобщенной функцией связи $q(\phi)$, то это может привести к образованию нескольких кластеров. У осцилляторов, формирующих кластер, фаза одна и та же; между различными кластерами существует постоянный сдвиг по фазе. Модель записывается в виде

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N q(\phi_j - \phi_k). \quad (12.33)$$

Если периодическая функция связи $q(\phi) = q(\phi + 2\pi)$ содержит высшие гармоники, то при некоторых начальных условиях может наблюдаться формирование кластеров (рис. 12.2).

Общий случай функции связи: функция порядка и шум

Даидо [Daido 1992a, 1993a, 1995, 1996] ввел концепцию функции порядка (order function) для описания осцилляторов типа (12.33) с

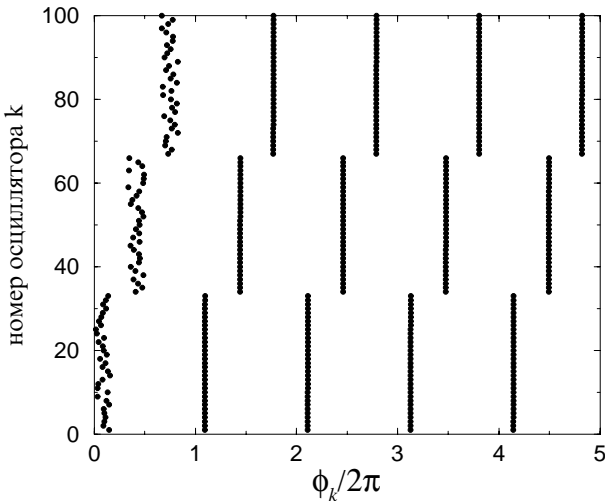


Рис. 12.2. Динамика ансамбля из 100 связанных осцилляторов, описываемых уравнением (12.33) с $q(\phi) = -c^{-1} \tan^{-1}[(c \sin \phi)/(1 - c \cos \phi)]$ для $c = -0.7$ и $\varepsilon = 1$. Ансамбль эволюционирует к состоянию с тремя кластерами, показанными стробоскопически в моменты времени $n2\pi/\omega_0$. Для того, чтобы система попала в это состояние, необходимо выбрать подходящие начальные условия. Система мультистабильна, и в ней могут наблюдаться различные синхронные режимы.

распределением собственных частот

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N q(\phi_j - \phi_k). \quad (12.34)$$

Функция связи q может быть в общем случае представлена рядом Фурье

$$q(\phi) = \sum_l q_l e^{i2\pi l \phi}.$$

Предполагая, что фазы всех синхронных осцилляторов вращаются с частотой $\bar{\omega}$, введем обобщенный параметр порядка

$$Z_l = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i2\pi l(\phi_k - \bar{\omega}t)}$$

и перепишем уравнения движения в виде

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k - \varepsilon H(\phi_k - \bar{\omega}t),$$

где

$$H(\psi) = - \sum_l q_l Z_l e^{-i2\pi l \psi}.$$

Функция H есть средняя сила, действующая на каждый осциллятор; она называется функцией порядка. Она является обобщением среднего поля, использованного Курамото в анализе его модели (12.1). Ненулевая функция порядка указывает на синхронизацию в ансамбле. Даидо показал аналитически, что вблизи порога синхронизации норма функции порядка пропорциональна бифуркационному параметру (а не корню квадратному из него, как в уравнении (12.15)):

$$\|H\| \sim \varepsilon - \varepsilon_c.$$

Этот результат показывает, что корневой закон (12.15), полученный Курамото для его модели (12.1) не справедлив в случае функции связи общего вида. Crawford [1995], включивший внешний шум в рассмотрение модели (12.34), пришел к такому же выводу. Его основной результат заключается в том, что амплитуда l -ой Фурье-моды P_l распределения, возникающего у порога синхронизации, имеет вид

$$|P_l| \sim \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_c)(\varepsilon - \varepsilon_c + l^2 \sigma^2)}.$$

Таким образом, в присутствии шума ($\sigma \neq 0$) амплитуды P_l , которые играют роль параметра порядка, растут пропорционально $\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_c}$, но при исчезающе малом шуме ($\sigma = 0$) растут медленнее, пропорционально $(\varepsilon - \varepsilon_c)$, в соответствии с результатами Даидо.

12.3.2 Глобально связанные слабонелинейные осцилляторы

Ансамбль глобально связанных слабонелинейных осцилляторов моделируется системой уравнений (ср. с (8.12) и (11.14))

$$\frac{dA_k}{dt} = (\mu + i\omega_k)A_k - (\gamma + i\alpha)|A_k|^2 A_k + \frac{\beta + i\delta}{N} \sum_{j=1}^N (A_j - A_k). \quad (12.35)$$

Простейший случай – это изохронные осцилляторы ($\alpha = 0$) с диссипативной связью ($\delta = 0$), что соответствует притяжению фаз. Переход к синхронизации в таком ансамбле аналогичен переходу в ансамбле фазовых осцилляторов (подробней см. в [Matthews and Strogatz 1990; Matthews *et al.* 1991]), поэтому здесь мы остановимся только на тех свойствах, которые не проявляются в фазовом приближении.

Гашение колебаний (вымирание)

Если константа связи β и ширина распределения собственных частот ω_k велики, то состояние с нулевой амплитудой $A_k = 0$ стабильно. Качественно это можно объяснить следующим образом. Раз распределение широкое, то частоты осцилляторов существенно различны и их влияние на другие осцилляторы относительно мало. С другой стороны, диффузионная связь в (12.35) вносит дополнительное затухание $\sim \beta A_k$, которое компенсирует возрастающий член μA_k и делает состояние $A_k = 0$ устойчивым (подробности см. в [Ermentrout 1990; Mirollo and Strogatz 1990a]).

Коллективный хаос

В некотором диапазоне параметров среднее поле $Z = N^{-1} \sum_1^N A_k$ демонстрирует иррегулярное во времени поведение. Matthews and Strogatz [1990] наблюдали это для диссипативно связанных изохронных осцилляторов с распределением собственных частот; позже в работах [Nakim and Rappel 1992] и [Nakagawa and Kuramoto 1993, 1995] была обнаружена и исследована хаотическая динамика среднего поля в ансамбле идентичных неизохронных осцилляторов с диссипативной и реактивной связью.

12.3.3 Связанные релаксационные осцилляторы

Ансамбли связанных релаксационных осцилляторов часто используются для моделирования поведения больших групп нейронов (см, например, [Hoppensteadt and Izhikevich 1997; Tass 1999]). Индивидуальный нейрон может рассматриваться как осциллятор накопление – сброс описанный в разделе 8.3; обычно один нейрон воздействует на множество других через синапсы. Часто используемая модель глобально связанных релаксационных осцилляторов была предложена Миролло и Строгатцем [Mirollo and Strogatz 1990b]; она является простым обобщением модели двух взаимодействующих систем накопление – сброс, рассмотренных в разделе 8.3.

Осцилляторы предполагаются идентичными. Каждый из них описывается переменной x_i , которая в режиме накопления подчиняется уравнению

$$\frac{dx_k}{dt} = S - \gamma x_k.$$

Когда осциллятор достигает порога $x_k = 1$, он стреляет: переменная x_k сбрасывается в ноль. При этом все остальные переменные x_j , $j \neq k$ мгновенно увеличиваются на величину ε/N и могут также достичь порога.³ Следовательно, некоторые осцилляторы могут выстрелить в один и тот же момент времени. Мы предполагаем, однако, что осциллятор в состоянии $x = 0$ (т.е. немедленно после сброса) не подвержен воздействию со стороны других, так что состояние $x = 0$ является абсорбирующим. Это свойство приводит к идеальной синхронизации: если два осциллятора стреляют в один и тот же момент времени, то в дальнейшем их поведение идентично. В общем случае нельзя исключить существования асинхронных состояний, но Миролло и Строгатц [Mirollo and Strogatz 1990b] доказали, что множество начальных условий, соответствующих асинхронным решениям, имеет нулевую меру. Таким образом, с вероятностью единица в популяции устанавливается режим с идеальным совпадением фаз, при котором все осцилляторы генерируют импульсы одновременно. Эти результаты справедливы для любого $N \geq 2$. Мы иллюстрируем переход от изначально случайного распределения фаз к идеальному захвату фаз в модели Миролло и Строгатца на рис. 12.3.

³ Мы опять нормализуем величину силы связи на число осцилляторов, чтобы получить разумный результат в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$.

12.3.4 Связанные контакты Джозефсона

Продемонстрируем, что цепочка последовательно соединенных идентичных контактов Джозефсона может рассматриваться как система глобально связанных ротаторов. Связь осуществляется параллельной нагрузкой, как показано на рис. 12.4.

Чтобы записать уравнения системы, напомним основные свойства контактов Джозефсона (см. раздел 7.4 и [Barone and Paterno 1982; Likharev 1991]). Каждый контакт характеризуется углом Ψ_k ; сверхпроводящий ток обозначен как $I_c \sin \Psi_k$, и напряжение на контакте как $V_k = \dot{\Psi}_k / 2e$. Ток через все контакты один и тот же, поэтому

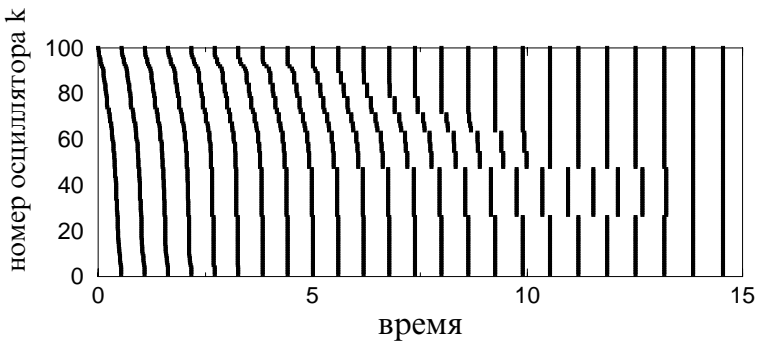


Рис. 12.3. Динамика популяции 100 связанных осцилляторов накопление – сброс. Модель описана в тексте, значения параметров выбраны $S = 2$, $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0.2$. Моменты времени, когда осцилляторы стреляют, показаны точками. Для наглядности мы отсортировали набор переменных, так что множество точек выглядит как линия (пусть и ломаная). Можно увидеть, как происходит формирование кластеров из осцилляторов с близкими фазами.

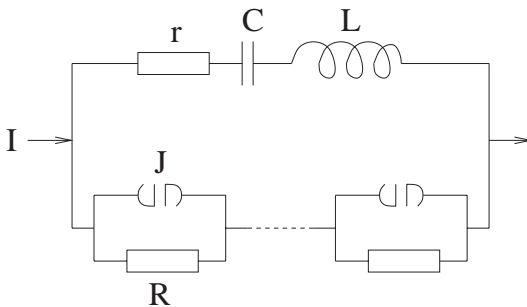


Рис. 12.4. Цепочка контактов Джозефсона J , связанных через параллельную RLC -нагрузку. Ёмкостью контактов пренебрегается, учитывается только сопротивление R , параллельное контакту; это соответствует модели резистивно шунтированного контакта Джозефсона.

можно записать

$$\frac{\hbar}{2eR} \frac{d\Psi_k}{dt} + I_c \sin \Psi_k = I - \frac{dQ}{dt}, \quad (12.36)$$

где \dot{Q} – это ток через параллельную RLC -нагрузку. Добавляя уравнение для нагрузки

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + r \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \frac{\hbar}{2e} \sum_{k=1}^N \frac{d\Psi_k}{dt}, \quad (12.37)$$

получаем полную систему уравнений движения. Одиночный контакт Джозефсона эквивалентен ротатору, и система уравнений (12.36) и (12.37) есть система уравнений глобально связанных ротаторов. Связь не возникает непосредственно в уравнении движения каждого ротатора, потому что «глобальная переменная» Q инерционна и описывается отдельным уравнением.

Продемонстрируем, следуя работе [Wiesenfeld and Swift 1995], что для малой связи система эквивалентна модели Курамото (раздел 12.1). Рассмотрим случай большого внешнего тока I . В этом случае среднее напряжение на всех контактах отлично от нуля (все ротаторы вращаются), и мы можем ввести фазу в соответствии с нашим определением, как переменную, соответствующую движению с постоянной скоростью по предельному циклу (см. раздел 7.1). Несвязанные ротаторы описываются уравнением (12.36) с $\dot{Q} = 0$, и преобразование к равномерно вращающейся фазе ϕ может быть записано в явном виде:

$$\phi_k = 2 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{I - I_c}{I + I_c}} \tan \left(\frac{\Psi_k}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (12.38)$$

Вычисляя производную по времени от ϕ_k с помощью уравнения (12.36) и используя тождество

$$I - I_c \sin \Psi = (I^2 - I_c^2)/(I - I_c \cos \phi), \quad (12.39)$$

которое следует из (12.38), мы получаем уравнение для фазы

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_0 - \dot{Q} \frac{\omega_0 (I - I_c \cos \phi_k)}{I^2 - I_c^2}. \quad (12.40)$$

Здесь ω_0 – это частота автономных вращений $2eR\sqrt{I^2 - I_c^2}/\hbar$.

Пока мы не сделали никаких приближений и уравнение (12.40) является точным. Используем теперь метод усреднения аналогично тому, как описано в разделах 7.1 и 8.1. В нулевом приближении

все фазы ϕ_k вращаются с одинаковой частотой ω_0 : $\phi_k = \omega_0 t + \phi_k^0$. RLC -нагрузка линейна, поэтому вклады Q_k от различных контактов в уравнение (12.37) можно рассматривать отдельно. Каждый контакт действует на нагрузку как периодическая сила, которая, правда, не синусоидальна, а имеет более сложную форму, так как угловая переменная Ψ получена из линейно вращающихся фаз ϕ с помощью нелинейного преобразования (12.38). Таким образом, сила в уравнении (12.37) имеет много гармоник, и отклик линейной нагрузки может быть получен из уравнения (12.37) для каждой из них:

$$Q_k = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{kn} \cos(n\phi_k - \beta_n). \quad (12.41)$$

Рассмотрим основную компоненту $n = 1$. Уравнение движения для Q_{k1} получается после подстановки $d\Psi/dt$ в (12.37) в соответствии с (12.36) и выражения $\sin \Psi$ через ϕ с помощью уравнения (12.39):

$$\begin{aligned} L\ddot{Q}_{k1} + (r + NR)\dot{Q}_{k1} + \frac{Q_{k1}}{C} &= \left\langle\left\langle R \frac{I^2 - I_c^2}{I - I_c \cos(\omega_0 t + \phi_k^0)} \right\rangle\right\rangle \\ &= RI_c^{-1}(I^2 - I_c^2 - I\sqrt{I^2 - I_c^2}) \cos(\omega_0 t + \phi_k^0). \end{aligned} \quad (12.42)$$

Здесь $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$ означает взятие первой гармоники периодической функции. Решение линейного уравнения (12.42) есть

$$Q_{k1} = R \frac{I^2 - I_c^2 - I\sqrt{I^2 - I_c^2}}{I_c \sqrt{(1/C - L\omega_0^2)^2 + (r + NR)^2 \omega_0^2}} \cos(\omega_0 t + \alpha + \phi_k^0),$$

где

$$\cos \alpha = \frac{L\omega_0^2 - 1/C}{\sqrt{(1/C - L\omega_0^2)^2 + (r + NR)^2 \omega_0^2}}.$$

Теперь мы можем подставить это решение в (12.40) и усреднить по периоду быстрых вращений $2\pi/\omega_0$. Предположим также, что фазы ϕ_k^0 являются медленными функциями времени. Легко видеть, что высшие гармоники $n > 1$ не вносят вклад в усредненное уравнение. В результате, мы получаем

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_k - \alpha), \quad (12.43)$$

где

$$\varepsilon = N \frac{2eR^2 I \omega_0 / \hbar - R \omega_0^2}{\sqrt{(1/C - L \omega_0^2)^2 + (r + NR)^2 \omega_0^2}}.$$

Полученные уравнения совпадают с фазовой моделью Курамото (12.1). Единственная разница заключается в том, что взаимодействие имеет несколько более общий вид. Угол α в члене, описывающем взаимодействие, зависит от свойств нагрузки. Если $\alpha = 0$, то взаимодействие между контактами притягивающее, в то время как для $\alpha \neq 0$ каждая пара контактов «предпочитает» иметь определенный фазовый сдвиг. Тем не менее, даже для $\alpha \neq 0$ мы можем искать синфазное решение $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_N$. Это решение имеет частоту, отличную от ω_0 , и устойчиво, если $\varepsilon \cos \alpha > 0$ (линеаризация (12.43) приводит к простой матрице с одним нулевым собственным значением и $N - 1$ собственными значениями $\varepsilon \cos \alpha$). В случае неустойчивости синфазного состояния возникает другой режим, при котором фазы равномерно распределены, т.е. $\phi_k^0 = 2\pi k/N$. Это так называемое расплывшееся состояние с нейтральной устойчивостью (splay state, подробнее см. [Strogatz and Mirollo 1993; Watanabe and Strogatz 1993, 1994]).

Если учесть малый беспорядок в цепочке контактов Джозефсона (например, из-за распределения критических токов I_c), то получается ансамбль с различными собственными частотами. Синхронизация таких контактов Джозефсона может быть описана как особый пример перехода Курамото при конечной константе связи ε [Wiesenfeld *et al.* 1996].

12.3.5 Эффекты конечности числа элементов ансамбля

Переход к синхронизации в ансамбле осцилляторов должен быть резким в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$. Для ансамбля с конечным числом элементов наблюдаются эффекты, аналогичные известным в статистической механике [Cardy 1988]. Основная идея состоит в том, что конечность числа элементов ансамбля приводит к флуктуациям среднего поля имеющим порядок $\sim N^{-1/2}$. Так, например, Pikovsky and Ruffo [1999] предложили описывать ансамбли с конечным числом возмущенных шумом осцилляторов уравнением (12.27) с дополнительным флуктуационным членом:

$$\dot{Z} = \left(\frac{\varepsilon}{2} - \sigma^2 \right) Z - \frac{\varepsilon^2}{8\sigma^2} |Z|^2 Z + \eta_1(t) + i\eta_2(t), \quad (12.44)$$

$$\langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \frac{2d^2}{N} \delta_{ij} \delta(t - t').$$

Шумовой член пропорционален $1/\sqrt{N}$ и исчезает в термодинамическом пределе. Его влияние на динамику среднего поля может быть легко понято, если интерпретировать (12.44) как уравнение для слабонелинейной автоколебательной системы с шумом (см., например, [Стратонович 1963]). На фазовой плоскости $X = \text{Re}(Z)$, $Y = \text{Im}(Z)$ мы получаем размытый предельный цикл, а амплитуда и фаза среднего поля флуктуируют, см. рис. 12.5.

12.3.6 Ансамбль хаотических осцилляторов

Фазовая динамика хаотических осцилляторов может быть похожа на динамику периодических осцилляторов в присутствии шума (см. главу 10). Соответственно, синхронизация в ансамбле глобально связанных хаотических осцилляторов сходна с возникновением когерентности в ансамбле осцилляторов с шумом, описанной в разделах 12.2 и 12.3.

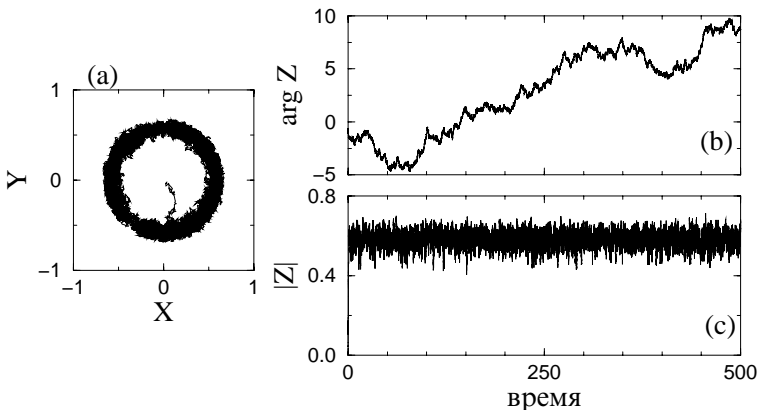


Рис. 12.5. Эволюция среднего поля $Z = X + iY$ в системе из 500 зашумленных фазовых осцилляторов (см. уравнение (12.16)). (a) Фазовый портрет в координатах (X, Y) : после переходного процесса траектории заполняют кольцо, ширина которого пропорциональна $N^{-1/2}$. (b,c) Зависимость фазы и амплитуды среднего поля от времени $Z(t)$. Из Pikovsky and Ruffo, *Physical Review E*, Vol. 59, 1999, pp. 1633–1636. Copyright 1999 by the American Physical Society.

В качестве примера мы приводим здесь результаты численного моделирования ансамбля глобально связанных *идентичных* осцилляторов Рёсслера [Pikovsky *et al.* 1996]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= -y_k - z_k + \varepsilon X, \\ \dot{y}_k &= x_k + ay_k, \\ \dot{z}_k &= 0.4 + z_k(x_k - 8.5). \end{aligned} \quad (12.45)$$

Связь осуществляется через среднее поле

$$X = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k, \quad Y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k. \quad (12.46)$$

Среднее поле исчезает в асинхронном режиме и демонстрирует довольно регулярные колебания после перехода к синхронизации, который в данной системе происходит при $\varepsilon \approx 0.025$. Интересно, что в синхронном режиме каждый осциллятор в ансамбле остается хаотическим; когерентность возникает только за счет синхронизации по фазам. Мы иллюстрируем это на рис. 12.6, где показаны фазовый портрет одного из элементов ансамбля и среднее поле. Амплитуда среднего поля относительно мала, но определенно больше флуктуации за счет конечности числа осцилляторов (эти флуктуации, по-видимому, являются причиной модуляции среднего поля).

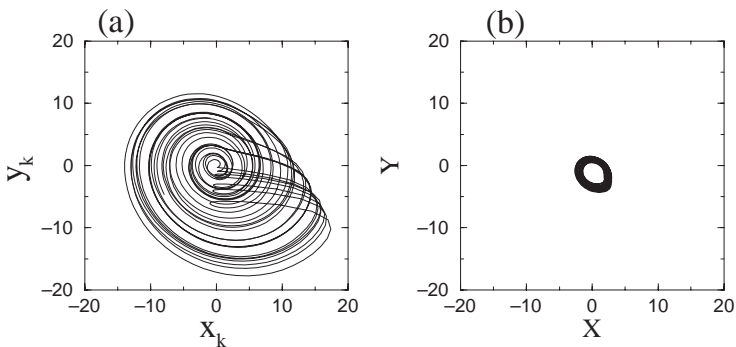


Рис. 12.6. Проекция фазового портрета одного из осцилляторов (a) и среднего поля (12.46) (b) в ансамбле (12.45) с $a = 0.25$. Отметим, что для данного значения параметров система Рёсслера имеет так называемый аттрактор-воронку, см. также рис. 10.4. Флуктуации среднего поля, по-видимому, являются результатом конечности числа осцилляторов в ансамбле, $N = 10\,000$.

Неидентичные хаотические осцилляторы также могут синхронизоваться. Различные собственные частоты могут быть введены в модель (12.45) с помощью дополнительного параметра, определяющего временной масштаб вращения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= -\omega_k y_k - z_k + \varepsilon X, \\ \dot{y}_k &= \omega_k x_k + a y_k, \\ \dot{z}_k &= 0.4 + z_k(x_k - 8.5). \end{aligned} \quad (12.47)$$

Эта модель аналогична уравнению (12.29), потому что в ней присутствуют как распределение собственных частот ω_k , так и шум, который является результатом собственной хаотической динамики. Переход к синхронизации в системе (12.47) проиллюстрирован на рис. 12.7. Вычисление наблюдаемых частот Ω_k показывает, что при $\varepsilon = 0.1$ большинство осцилляторов взаимно синхронизованы. В дополнение, мы изображаем на графике значения максимумов перемен-

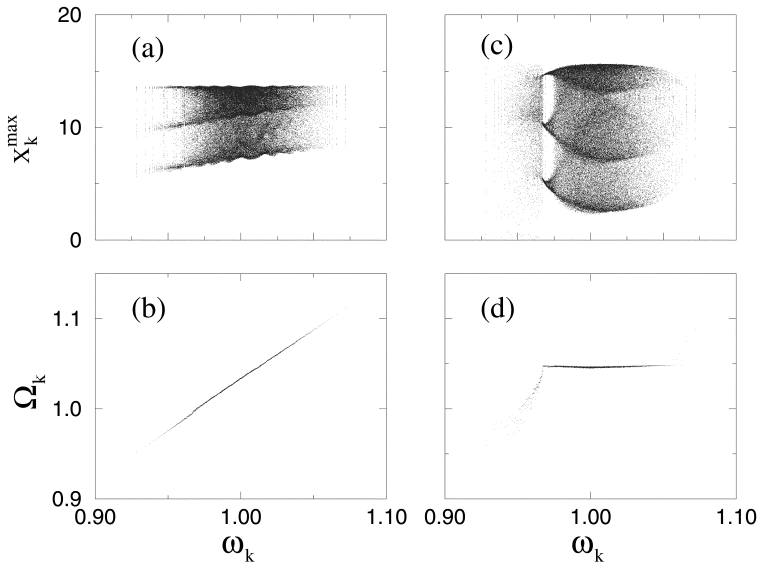


Рис. 12.7. Максимумы x_k^{\max} и наблюдаемые частоты Ω_k как функции собственных частот ω_k в ансамбле из 5000 связанных систем Рёсслера 12.47 с $a = 0.15$. Собственные частоты распределены по гауссовому закону со среднеквадратичным $\Delta\omega = 0.02$. (a,b) Связь $\varepsilon = 0.05$ немного ниже пороговой. Среднее поле близко к нулю и наблюдаемые частоты совпадают с собственными. (c,d) Выше порога ($\varepsilon = 0.1$) большинство осцилляторов находятся в когерентном состоянии (плато в (d)), в то время как амплитуды остаются хаотическими (за исключением окна периода три при $\omega \approx 0.97$). Из [Pikovsky *et al.* 1996].

ной x_k для каждого осциллятора. Эти максимумы имеют широкое распределение как ниже, так и выше порога синхронизации. Это означает, что колебания осцилляторов остаются хаотическими, хотя они и синхронизованы по фазам.

12.4 Библиографические заметки

Изучение больших ансамблей осцилляторов имеет относительно короткую историю: они стали популярными только с появлением достаточно мощных компьютеров. Среди ранних работ отметим работу Винфри [Winfree 1967], который также привел обзор соответствующих биологических наблюдений, а также работу [Pavlidis 1969]. Начиная с работ Курамото [Kuramoto 1975, 1984], который ввел и решил уравнения фазовой модели, описанной в разделе 12.1, эта проблема вызвала широкий интерес. Различные математические подходы были развиты в [Strogatz *et al.* 1992; van Hemmen and Wreszinski 1993; Watanabe and Strogatz 1993, 1994; Acebrón *et al.* 1998]. Okuda [1993]; Daido [1992a, 1993b,a, 1995, 1996]; Crawford [1995]; Crawford and Davies [1999]; Strogatz [2000]; Balmforth and Sassi [2000] рассмотрели обобщенную функцию связи. Ансамбли фазовых осцилляторов с шумом изучались в [Strogatz and Mirollo 1991; Bonilla *et al.* 1992, 1998; Hansel *et al.* 1993; Crawford 1994; Stange 1998, 1999; Hong *et al.* 1999a; Reimann *et al.* 1999]. Фазовый сдвиг в функции связи, или, что почти эквивалентно, запаздывание могут существенно изменить динамику, как обсуждалось в [Sakaguchi and Kuramoto 1986; Christiansen *et al.* 1992; Yeung and Strogatz 1999; S. H. Park *et al.* 1999a; Reddy *et al.* 1999; Choi *et al.* 2000]. Случайные фазовые сдвиги в связи могут привести к стекловидным состояниям (т.е. состояниям с очень многими устойчивыми конфигурациями) [Daido 1992b; Bonilla *et al.* 1993; Park *et al.* 1998]. Hoppensteadt and Izhikevich [1999] показали, что система Курамото под воздействием квазипериодической мультипликативной силы может действовать как нейронная сеть. Фазовые осцилляторы с инерцией демонстрируют переход первого порядка с гистерезисом [Tanaka *et al.* 1997a,b; Hong *et al.* 1999c,b]. Эффекты конечности числа элементов ансамбля описаны в [Dawson and Gärtner 1987; Daido 1990; Pikovsky and Ruffo 1999].

Глобально связанные контакты Джозефсона (или, что эквивалентно, ротаторы) как в отсутствие, так и при наличии шума рассматривались в [Shinomoto and Kuramoto 1986; Sakaguchi *et al.* 1988b; Strogatz *et al.* 1989; Golomb *et al.* 1992; Wiesenfeld *et al.* 1996; Tsang

et al. 1991b; Wiesenfeld 1992]. В частности, широкий интерес вызвали расплывшиеся режимы в такой системе [Tsang *et al.* 1991a; Nichols and Wiesenfeld 1992; Swift *et al.* 1992; Strogatz and Mirollo 1993].

Ансамбли слабонелинейных осцилляторов изучались в [Yamaguchi and Shimizu 1984; Bonilla *et al.* 1987; Mirollo and Strogatz 1990a; Matthews and Strogatz 1990; Matthews *et al.* 1991]. Некоторые эффекты в такой системе, например коллективный хаос [Hakim and Rappel 1992; Nakagawa and Kuramoto 1993, 1994, 1995; Banaji and Glendinning 1994] и вымирание колебаний [Ermentrout 1990] не наблюдаются для фазовых осцилляторов. Близки к этим работам исследования связанных мод в лазерах [Winful and Rahman 1990].

Релаксационные осцилляторы демонстрируют множество разнообразных эффектов [Kuramoto *et al.* 1992; Abbott and van Vreeswijk 1993; Tsodyks *et al.* 1993; Wang *et al.* 1993; Chen 1994; Bottani 1995, 1996; Ernst *et al.* 1995, 1998; Gerstner 1995; Rappel and Karma 1996; van Vreeswijk 1996; Kirk and Stone 1997; Bressloff and Coombes 1999; Wang *et al.* 2000b]. В заключение отметим, что в [Rogers and Wille 1996] изучались решетки осцилляторов с дальнедействующей связью; в этом случае можно плавно изменять связь от локальной до глобальной.

Часть III

Синхронизация хаотических систем

Глава 13

Полная синхронизация I: Основные свойства

В этой главе мы рассмотрим основные свойства полной синхронизации хаотических систем. Наш подход будет следующим: рассматривая как можно более простую систему, мы постараемся описать ее максимально подробно. Простейшей хаотической системой является одномерное отображение, его динамикой мы и займемся. Начнем мы с построения модели связанных отображений и с феноменологического описания полной синхронизации в этой системе. Наиболее интересным и нетривиальным эффектом является переход к полной синхронизации. Мы опишем два подхода к описанию этого перехода в хаосе. С одной стороны, используя стохастичность хаоса, мы дадим статистическое описание этого перехода. С другой стороны, учитывая детерминированность динамики, мы опишем переход в геометрических терминах как бифуркацию. Надеемся, что в результате читатель сможет убедиться в дополнении этих двух подходов, дающих в совокупности полную картину явления. В следующей главе, рассматривая обобщения простейшей модели, мы сможем убедиться, что основные свойства полной синхронизации остаются справедливыми для широкого класса хаотических систем.

Для понимания содержания этой главы требуется знакомство с основными понятиями теории хаоса, в частности с ляпуновскими показателями. При аналитическом статистическом описании мы используем термодинамический формализм, а при изложении геометрического подхода – теорию бифуркаций. Эти сведения можно най-

ти во многих учебниках по теории колебаний и хаосу [Guckenheimer and Holmes 1986; Бутенин и др. 1987; Неймарк и Ланда 1987; Рабинович и Трубецков 1989; Шустер 1988; Ott 1992; Kaplan and Glass 1995; Alligood *et al.* 1997; Кузнецов 2001], а также в монографиях [Badii and Politi 1997; Beck and Schlögl 1997].

13.1 Простейшая модель: два связанных отображения

В этом вводном разделе мы продемонстрируем явление полной синхронизации на примере простой модели связанных отображений. Одномерное отображение

$$x(t+1) = f(x(t)) \quad (13.1)$$

задает динамическую систему с дискретным временем $t = 0, 1, 2, \dots$ и непрерывным пространством состояний x . Широко известными примерами одномерных отображений с хаотическим поведением являются *логистическое отображение* $f(x) = 4x(1-x)$ и *отображение типа тента* $f(x) = 1 - 2|x|$.

Рассмотрим два подобных отображения, заданных переменными x и y . Поскольку динамика каждой переменной хаотична, в случае независимых (невзаимодействующих) систем будут наблюдаться два независимых стохастических процесса, без каких-либо взаимных корреляций. Теперь введем взаимодействие. Сделать это можно многими способами: любой член в правой части уравнений, содержащий как x , так и y , даст какое-то взаимодействие. Потребуем, однако, чтобы взаимодействие удовлетворяло следующим важным физическим условиям:

- (i) взаимодействие должно быть притягивающим, т.е. оно должно сближать состояния x и y ;
- (ii) взаимодействие должно исчезать в синхронном симметричном режиме $x = y$.

Первое условие можно назвать также условием диссипативности, оно соответствует, например, связи электронных схем через сопротивления.¹ В общем виде линейный оператор, задающий связь с указанными свойствами, записывается как

¹ См. также обсуждение диссипативной и реактивной связи в разделе 8.2.

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}, \quad (13.2)$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. В простейшем случае симметричной связи, полагая $\alpha = \beta = \varepsilon$, получим

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (13.3)$$

Линейное взаимодействие (13.3) должно быть применено к нелинейному отображению (13.1). Правильным способом применения является чередование линейного и нелинейного отображений, т.е. произведение² соответствующих операторов:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x(t)) \\ f(y(t)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - \varepsilon)f(x(t)) + \varepsilon f(y(t)) \\ \varepsilon f(x(t)) + (1 - \varepsilon)f(y(t)) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Отметим, что получившаяся система (13.4) полностью симметрична по отношению к перестановке переменных $x \leftrightarrow y$, так как мы рассматриваем симметрично связанные идентичные системы.

Рассмотрим, какие качественно различные режимы могут наблюдаться в нашей базовой модели (13.4) при изменении положительного параметра связи ε . Легко понять, что происходит в предельных ситуациях. Если $\varepsilon = 0$, то переменные x и y полностью независимы и некоррелированы. Если $\varepsilon = 1/2$, то уже после одной итерации переменные x и y принимают одно и то же значение и остаются идентичными при всех t (поэтому $\varepsilon = 1/2$ соответствует максимально сильной связи). Поскольку связь в этом режиме становится равной нулю, динамика переменных x и y такая же, как для автономной системы, т.е. хаотическая. Этот режим, при котором каждая из систем меняется во времени хаотически, а состояния систем в любой момент времени одинаковы, называется **полной синхронизацией** (по-английски «complete, full, identical»).

² В отличие от систем с непрерывным временем, в случае отображений нужно не *прибавлять* члены, описывающие различные эффекты, а *перемножать* их. Чтобы пояснить этот важный для понимания физического смысла дискретных моделей момент, рассмотрим два способа введения дополнительной диссипации в отображение (13.1). Диссипативный член должен уменьшать переменную x . Аддитивное слагаемое типа $x(t+1) = f(x(t)) - \gamma x(t)$ не всегда уменьшает x — это зависит от знаков и значений $f(x)$ и γ . В противоположность этому, умножение на множитель $|\gamma| < 1$, приводящее к $x(t+1) = \gamma f(x(t))$, всегда уменьшает абсолютное значение x .

При увеличении параметра связи ε , который можно рассматривать в качестве бифуркационного, в общем случае наблюдается сложная последовательность бифуркаций (при этом не исключены и нехаотические режимы), но четко прослеживается тенденция к все более полной корреляции между x и y . Можно найти такое критическое значение параметра связи $\varepsilon_c < 1/2$, при превышении которого, $\varepsilon > \varepsilon_c$, устанавливается синхронное состояние $x = y$. Этот переход наиболее четко виден при представлении динамики на плоскости (x, y) (см. ниже рис. 13.2). Точки вне диагонали $x = y$ соответствуют асинхронному состоянию. С увеличением ε точки концентрируются у диагонали и при превышения критического значения параметра связи ε_c сосредотачиваются на ней.

Связанные отображения типа косой тент

Ниже мы проиллюстрируем эффект полной синхронизации на примере отображения типа косой тент

$$f(x) = \begin{cases} x/a & \text{при } 0 \leq x \leq a, \\ (1-x)/(1-a) & \text{при } a \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (13.5)$$

(значению параметра $a = 0.5$ соответствует обычное отображение типа тент, но эта симметричная ситуация, как будет показано ниже, является вырожденной). Отображение (13.5) показано на рис. 13.1, оно растягивает единичный интервал вдвое и складывает обратно. Результатом этих растяжений и складываний является развитый

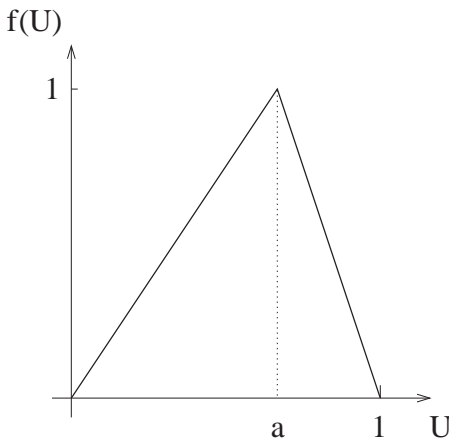


Рис. 13.1. Отображение типа косой тент: простая точно решаемая одномерная модель хаоса.

хаос, этим отображение типа тент отличается от логистического (параболического), в котором области хаоса и периодической динамики перемежаются (если менять параметр). Более того, инвариантная вероятностная мера в отображении типа тент постоянна, что позволит ниже в разделе 13.3 построить аналитическое статистическое описание.

Синхронный и асинхронный режимы показаны на рис. 13.2. Критическое значение параметра связи при $a = 0.7$ равно $\varepsilon_c \approx 0.228$ (это значение будет аналитически выведено ниже). Полная синхронизация, как на рис. 13.2а, наблюдается при сильной связи $1/2 > \varepsilon > \varepsilon_c$, асинхронный режим существует при более слабом взаимодействии (рис. 13.2б,с).

На рис. 13.3 показана динамика системы вблизи порога синхронизации, ее описанию будет посвящена большая часть этой главы. Для описания перехода к синхронизации при $\varepsilon = \varepsilon_c$, удобно перейти к новым переменным

$$U = \frac{x + y}{2}, \quad V = \frac{x - y}{2}. \quad (13.6)$$

Заметим, что в режиме полной синхронизации переменная V тождественно равна нулю; в почти синхронном режиме она мала. Геометрически, переменная U направлена вдоль диагонали $x = y$, а переменная V соответствует поперечному направлению. Для слабо асинхронного состояния вблизи ε_c характерны перемежающиеся всплески

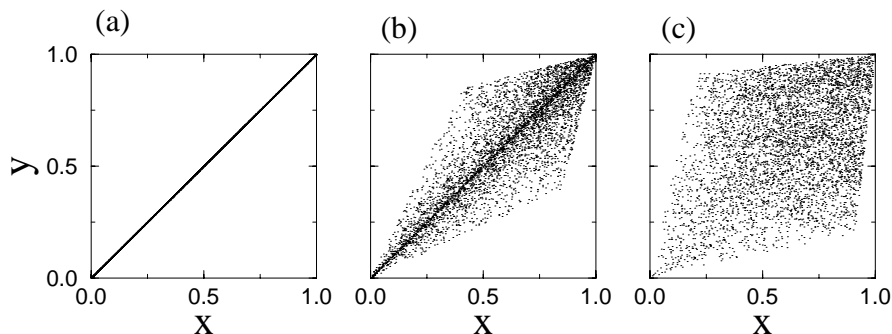


Рис. 13.2. Аттракторы в системе двух связанных отображениях типа косоугольного тента при $a = 0.7$. Порог синхронизации равен $\varepsilon_c \approx 0.228$. (а) Синхронный режим ($\varepsilon = 0.3$) лежит на диагонали $x = y$. (б) Слабо асинхронное состояние сосредоточено вблизи нее. (с) При слабой связи ($\varepsilon = 0.1$) мгновенные значения переменных x и y практически некоррелированы. Переход от (а) к (б) называют нарушением симметрии хаоса, или «взрывом» (blowout).

переменной V , как на рис. 13.3. Редкие, но большие выбросы V типичны для этой **модуляционной перемежаемости** (иногда ее называют «on – off» или «включено – выключено»). При теоретическом описании ниже будет показано, что естественной переменной для построения теории служит логарифм переменной $|V|$, поэтому динамика $\ln |V|$ также представлена на рис. 13.3.

13.2 Устойчивость синхронного режима

В первую очередь отметим, что, поскольку система (13.4) симметрична по отношению к перестановке переменных (другими словами, она инвариантна по отношению к преобразованию $x \leftrightarrow y$), синхронное состояние $x(t) = y(t)$ является решением (13.4) при любых значениях параметра связи ε . Это означает, что симметричные начальные условия (т.е. $x(0) = y(0)$ или $V = 0$) остаются симметричными в процессе эволюции. Если же мы хотим, чтобы симметричное состояние наблюдалось не только при специальных, но и при произвольных начальных условиях, нужно дополнительно потребовать устойчивости этого состояния: полностью синхронный режим $V = 0$ должен быть

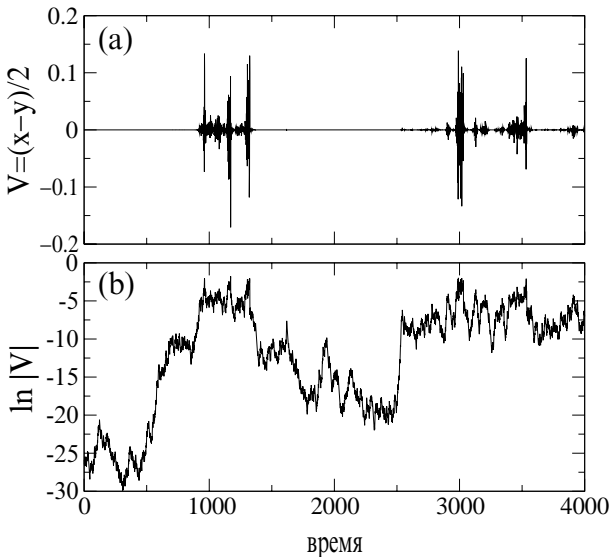


Рис. 13.3. Модуляционная перемежаемость в отображении типа косой тент при $a = 0.7$ и докритической связи $\varepsilon = \varepsilon_c - 0.001$. (а) Всплески разности V между состояниями системы. (б) Логарифм разности ведет себя как случайные блуждания.

аттрактором, т.е. синхронное состояние должно устанавливаться и при асимметричных начальных условиях. Критическое значение параметра связи ε_c , при котором наступает синхронизация, вытекает из условия устойчивости. Поскольку V соответствует поперечному направлению, устойчивость синхронного состояния часто называют *поперечной* устойчивостью симметричного аттрактора.

Перепишем уравнения (13.4) в переменных U и V (13.6):

$$U(t+1) = \frac{1}{2}[f(U(t) + V(t)) + f(U(t) - V(t))], \quad (13.7)$$

$$V(t+1) = \frac{1-2\varepsilon}{2}[f(U(t) + V(t)) - f(U(t) - V(t))]. \quad (13.8)$$

Линеаризуя эту систему вблизи полностью синхронного состояния $U(t)$, $V = 0$ получим линейное отображение для малых возмущений u и v

$$u(t+1) = f'(U(t))u(t), \quad (13.9)$$

$$v(t+1) = (1-2\varepsilon)f'(U(t))v(t). \quad (13.10)$$

Эту линейную систему следует итерировать параллельно с нелинейным отображением, задающим синхронную хаотическую динамику

$$U(t+1) = f(U(t)). \quad (13.11)$$

Поскольку в линейном приближении уравнения для возмущений u и v независимы, продольные (т.е. симметричные, u) и поперечные (асимметричные, v) возмущения не взаимодействуют, и их можно рассматривать по отдельности. В основе дальнейшего рассмотрения лежит наблюдение, что линеаризованные уравнения (13.9) и (13.10) описывают рост и убывание возмущений хаотического режима, и количественно этот рост (или убывание) задаются ляпуновским показателем системы. Действительно, для двумерного отображения можно определить два ляпуновских показателя, и поскольку в нашем случае переменные u и v независимы, эти показатели просто определяются средними логарифмами показателей роста u и v :

$$\lambda_u = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |u(t)| - \ln |u(0)|}{t} = \langle \ln |f'(U)| \rangle, \quad (13.12)$$

$$\lambda_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |v(t)| - \ln |v(0)|}{t} = \ln |1-2\varepsilon| + \langle \ln |f'(U)| \rangle. \quad (13.13)$$

Используя эргодичность хаоса, мы можем заменить среднее по времени статистическим средним по инвариантной мере, последнее будем обозначать скобками $\langle \rangle$. Из уравнения (13.9) следует, что симметричное возмущение u есть не что иное как возмущение в хаотическом отображении (13.11), так что продольный (не нарушающий

синхронизацию) ляпуновский показатель λ_u есть не что иное как ляпуновский показатель одиночной системы λ . Поперечный ляпуновский показатель $\lambda_{\perp} \equiv \lambda_v$ выражается через λ по формуле

$$\lambda_{\perp} = \ln |1 - 2\varepsilon| + \lambda. \quad (13.14)$$

Таким образом, средний рост (или убывание) поперечных возмущений v определяется поперечным показателем λ_{\perp} : $\ln |v(t)| \propto \lambda_{\perp} t$, и критерий устойчивости синхронного состояния формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_{\perp} > 0: & \text{ синхронное состояние неустойчиво,} \\ \lambda_{\perp} < 0: & \text{ синхронное состояние устойчиво.} \end{aligned}$$

Порог устойчивости находится из условия $\lambda_{\perp} = 0$:

$$\ln |1 - 2\varepsilon_c| = -\lambda, \quad \varepsilon_c = \frac{1 - e^{-\lambda}}{2}. \quad (13.15)$$

Например, для логистического отображения ляпуновский показатель равен $\lambda = \ln 2$, так что $\varepsilon_c = 1/4$. Выше мы рассматривали устойчивость в среднем, т.е. определяемую средним показателем роста возмущений. Соотношение этого определения устойчивости с другими возможными определениями (например, с асимптотической устойчивостью) весьма нетривиально и является основным предметом дальнейшего обсуждения.

13.3 Статистическая теория перехода к синхронизации

В этом разделе мы дадим статистическое описание явлений вблизи порога синхронизации. Основная идея состоит в представлении эволюции поперечного возмущения v динамикой процесса, вынуждаемого случайной силой, т.е. мы рассматриваем синхронный хаос как случайный процесс. При этом мы пренебрегаем практически всеми динамическими (детерминированными) чертами хаоса – не удивительно, что теория работает тем лучше, чем сильнее хаос. Результаты этого теоретического подхода мы проиллюстрируем на примере отображения типа кривой тента.

13.3.1 Возмущение как случайное блуждание

Из анализа устойчивости проведенного в разделе 13.2 следует, что подходящей переменной для описания динамики поперечных возмущений вблизи порога синхронизации является логарифм возмущения. Поэтому удобно ввести новые переменные, не независимые, но полезные

$$w = |v|, \quad z = \ln w.$$

Кроме того, поскольку поперечный ляпуновский показатель λ_{\perp} полностью определяет линейную устойчивость и однозначно связан с параметром связи ε , удобно использовать его в качестве бифуркационного параметра. Тогда уравнение для динамики возмущений примет вид

$$w(t+1) = w(t)e^{\lambda_{\perp}} e^{g(U(t))}. \quad (13.16)$$

Здесь введено обозначение³

$$g(U(t)) = \ln |f'(U)| - \lambda. \quad (13.17)$$

Заметим, что среднее от g равно нулю, но мгновенные значения g отличны от нуля. Уравнения (13.17) и (13.16) допускают следующую интерпретацию: хаотический процесс $U(t)$ действует как внешняя сила на переменную w в (13.16). Внешняя сила входит в множитель $\exp(g + \lambda_{\perp})$. Можно сказать, что фактор $\exp(g + \lambda_{\perp})$ модулирует показатель роста величины w : она растет быстрее, если этот множитель большой, и медленнее, если он мал.

Уравнение для переменной z следует непосредственно из (13.16):

$$z(t+1) = z(t) + g(U(t)) + \lambda_{\perp}. \quad (13.18)$$

Внешняя сила входит сюда как аддитивное слагаемое $g + \lambda_{\perp}$.

Отметим, что с математической точки зрения системы, составленные из уравнений (13.11) и (13.16) или (13.18), есть так называемые *косые системы*: переменная U влияет на w и z , но обратного влияния w и z на U нет. Для связанных отображений (13.4) косая система получается приближенно, как результат линеаризации вблизи полностью синхронного режима. Косые системы, однако, естественным образом возникают в физических ситуациях с однонаправленной связью (см. раздел 14.1). С физической точки зрения уравнения (13.11),

³ Это позволит записать уравнение в наиболее общем виде, пригодном для описания не только перехода к синхронизации, но и других случаев модуляционной неустойчивости.

(13.16) и (13.18) задают вынужденные колебания: компонента U определяет вынуждающую силу, которая действует на компоненты w, z . Особенностью (13.11), (13.16) и (13.18) является то, что сила действует на линейную подсистему (13.16) и (13.18).

Статистическое описание синхронизации основано на представлении внешней силы в (13.16) и (13.18) как стохастического процесса. Таким образом, хаотический сигнал $U(t)$ рассматривается как шум, а уравнения (13.16) и (13.18) интерпретируются как уравнения соответственно с мультипликативным и аддитивным шумом. При такой интерпретации становится очевидным, что (13.18) описывает одномерные случайные блуждания со случайным шагом $g + \lambda_{\perp}$. Среднее значение флуктуирующего члена g равно нулю, поэтому направление среднего смещения целиком определяется поперечным ляпуновским показателем λ_{\perp} . При $\lambda_{\perp} < 0$ среднее смещение отрицательно, и переменные z и w убывают (в среднем), а при $\lambda_{\perp} > 0$ эти переменные в среднем растут. На пороге синхронизации (13.15) среднее смещение случайных блужданий равно нулю. Таким образом, величина λ_{\perp} характеризует направленную компоненту случайных блужданий. Другой важной характеристикой является коэффициент диффузии. Если бы значения $g(U(t))$ были независимыми случайными величинами, то коэффициент диффузии, согласно закону больших чисел, был бы равен дисперсии g . В нашем случае процесс $U(t)$ задается динамической системой (13.1), поэтому значения $g(U(t))$ могут быть коррелированы, и необходимо более детальное рассмотрение динамики случайных блужданий.

13.3.2 Диффузия определяется статистикой локальных по времени ляпуновских показателей

Решение уравнения (13.18) можно формально записать как

$$z(T) - z(0) - \lambda_{\perp}T = \sum_{t=0}^{T-1} g(U(t)). \quad (13.19)$$

В правой части стоит сумма хаотических величин; чтобы иметь возможность применить центральную предельную теорему, мы разделим эту сумму на T и обозначим

$$\Lambda_T = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} g(U(t)) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f'(U)| - \lambda. \quad (13.20)$$

Величина Λ_T называется *локальным по времени* (или просто локальным) ляпуновским показателем (в нашей формулировке (13.20) эта величина сдвинута на λ и поэтому стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$; можно определить и не сдвинутый локальный по времени показатель, который стремится к λ при $T \rightarrow \infty$). При больших T локальный по времени показатель Λ_T стремится к нулю, но для нас важны его флуктуации. Согласно центральной предельной теореме, плотность вероятностного распределения Λ_T (для простоты ниже мы будем опускать индекс T) должна вести себя как

$$p(\Lambda; T) \propto \exp[Ts(\Lambda)], \quad (13.21)$$

где в показателе стоит энтропийная функция $s(\Lambda)$ (см. [Paladin and Vulpiani 1987; Ott 1992; Crisanti *et al.* 1993]). Эта выпуклая функция имеет единственный максимум в нуле. Ведущий член в разложении вокруг этого максимума $s(\Lambda) \approx -\Lambda^2/(2D)$ дает гауссовское распределение Λ . Коэффициент D определяет ширину распределения локальных по времени ляпуновских показателей Λ ; дисперсия Λ убывает со временем T согласно закону больших чисел:

$$\langle \Lambda^2 \rangle \approx \frac{D}{T}.$$

Поскольку поперечная переменная z в (13.19) просто выражается через локальный по времени показатель

$$z(T) - z(0) - \lambda_{\perp} T = \Lambda T,$$

получается, что z растет с коэффициентом диффузии D :

$$\langle (z(T) - \langle z(T) \rangle)^2 \rangle \propto TD.$$

Преимуществом общей формулировки (13.21) является возможность правильного описания больших отклонений локальных по времени показателей. Действительно, в гауссовском приближении возможны сколь угодно большие локальные показатели, в то время как на самом деле область определения функции s ограничена (см. ниже пример с отображением типа кривой). В нелинейной динамике подход, основанный на введении энтропийной функции, называют *термодинамическим формализмом* [Ott 1992; Crisanti *et al.* 1993; Vadii and Politi 1997; Beck and Schlögl 1997]; в математической литературе говорят о *теории больших отклонений* [Varadhan 1984].

Вернемся к динамике поперечных возмущений (13.18). Вблизи порога синхронизации среднее смещение случайных блужданий переменной z мало; поэтому динамика определяется в основном флуктуациями. Распределение z становится со временем все шире, так

что могут наблюдаться как малые, так и большие значения z . Если перейти от логарифма возмущений z к самим возмущениям w , то мы увидим, что величины $w = \exp(z)$ могут принимать как очень большие, так и очень маленькие значения. Таким образом, случайные блуждания z проявляются как всплески поперечных возмущений w . Этот режим, показанный на рис. 13.3, называют **модуляционной перемежаемостью** [Fujisaka and Yamada 1985, 1986; Yamada and Fujisaka 1986; Platt *et al.* 1989]).

Подчеркнем, что основным источником этой перемежаемости являются флуктуации локального по времени поперечного ляпуновского показателя. В некоторых исключительных случаях, когда эти флуктуации отсутствуют, наблюдаемый режим отличается от модуляционной перемежаемости. В частности, в симметричном отображении типа тент $f(U) = 1 - 2|U|$ локальные мультипликаторы равны двум и не зависят от U . Подобным свойством обладает и логистическое отображение $f(U) = 4U(1 - U)$: здесь флуктуации локального по времени ляпуновского показателя при больших T исчезают. Переход к синхронизации в этих системах имеет свои особенности, описание которых можно найти в статьях [Кузнецов и Пиковский 1989; Pikovsky and Grassberger 1991].

Для более полного анализа модуляционной перемежаемости у порога установления полной синхронизации линейного приближения недостаточно. Мы не будем рассматривать специальные случаи симметричного отображения типа тент и логистического отображения, а обсудим общий случай флуктуирующих локальных по времени ляпуновских показателей.

13.3.3 Модуляционная перемежаемость: степенные распределения

С помощью локальных по времени ляпуновских показателей мы можем переписать уравнение для эволюции возмущения z (13.18) в виде

$$z(t + T) = z(t) + T\lambda_{\perp} + T\Lambda.$$

При больших T корреляциями последовательных значений Λ_T можно пренебречь и рассматривать эти величины как независимые. Это позволяет записать уравнение для плотности распределения $W(z; t)$: плотность в момент времени $t + T$ есть свертка двух плотностей:

$$W(z; t + T) = \int d\Lambda p(\Lambda; T)W(z - T\lambda_{\perp} - T\Lambda; t).$$

Будем искать статистически стационарное (не зависящее от времени) решение с помощью подстановки

$$W(z) \propto \exp(\kappa z). \quad (13.22)$$

Подставляя и используя (13.21), получим

$$1 = \int d\Lambda p(\Lambda; T) e^{-T\kappa(\lambda_{\perp} + \Lambda)} \propto \int d\Lambda e^{Ts(\Lambda) - T\kappa\lambda_{\perp} - T\kappa\Lambda}. \quad (13.23)$$

Последний интеграл можно оценить при больших T , беря максимум выражения в показателе экспоненты:

$$\int d\Lambda e^{Ts(\Lambda) - T\kappa\lambda_{\perp} - T\kappa\Lambda} \propto \exp[T(s(\Lambda^*) - \kappa\Lambda^* - \kappa\lambda_{\perp})],$$

где величина Λ^* определяется из условия максимума

$$\frac{ds(\Lambda^*)}{d\Lambda} = \kappa.$$

Подставляя эти два выражения в (13.23), получим уравнение для Λ^*

$$s(\Lambda^*) - (\Lambda^* + \lambda_{\perp}) \frac{ds(\Lambda^*)}{d\Lambda} = 0, \quad (13.24)$$

из которого находится показатель вероятностного распределения κ . Читатели, знакомые с термодинамическим формализмом, сразу узнают обычные формулы преобразования Лежандра (а остальные могут прочитать об этом в любом учебнике по статистической механике или в книге [Ott 1992], где этот метод применяется в хаотической динамике).

Заметим, что энтропийная функция $s(\Lambda)$ в (13.24) описывает флуктуации локального по времени мультипликатора симметричного хаотического режима и не зависит от параметра связи ε . Зависимость от ε входит в (13.24) только через поперечный ляпуновский показатель λ_{\perp} . Поскольку $s(0) = s'(0) = 0$, в критической точке, в которой поперечный ляпуновский показатель λ_{\perp} меняет знак, меняет знак и показатель κ . При малых λ_{\perp} показатель κ линейно зависит от λ_{\perp} . Как вытекает из (13.14), зависимость κ от $\varepsilon - \varepsilon_c$ также линейна.

Для возмущения w стационарное распределение (13.22) имеет степенной вид

$$W(w) \propto w^{\kappa-1}. \quad (13.25)$$

Как и любая степенная функция, это распределение не нормируемо. Как уже отмечалось, показатель κ меняет знак на пороге синхронизации (13.15). Поэтому распределение (13.25) расходится при $w \rightarrow 0$

в режиме полной синхронизации (когда $\kappa < 0$), а при малой связи, когда синхронный режим неустойчив и $\kappa > 0$, расходимость имеет место при $w \rightarrow \infty$. Чтобы получить нормируемое распределение, нужно добавить к линейному отображению (13.16) дополнительные члены.

До порога синхронизации, $\varepsilon < \varepsilon_c$

Расходимость при $w \rightarrow \infty$ появилась из-за того, что мы пренебрегли эффектом насыщения неустойчивости в системе (13.9), (13.10). Ясно, что разность $x - y$ не может расти неограниченно, поскольку аттрактор системы связанных отображений расположен в конечной области фазового пространства. В общем случае для описания насыщения необходимо учитывать нелинейные члены в обоих уравнениях (13.9) и (13.10). Такой теории пока не существует. В качестве упрощенной модели рассмотрим линейное уравнение (13.18), в котором эффект насыщения моделируется верхней границей $z = z_{\max} = \ln w_{\max}$, от которой случайные блуждания «отражаются». Распределение (13.25), таким образом, обрезается при w_{\max} .

С учетом этого обрезания плотность распределения (13.25) нормируется:

$$W(w) = \begin{cases} \kappa w_{\max}^{-\kappa} w^{\kappa-1} & \text{при } w \leq w_{\max}, \\ 0 & \text{в обратном случае.} \end{cases}$$

Из этого соотношения легко получить моменты возмущения w :

$$\langle w^q \rangle = \frac{\kappa}{q + \kappa} w_{\max}^q.$$

На пороге синхронизации все моменты обращаются в ноль, а для малых отклонений от порога все они растут линейно по параметру $\varepsilon_c - \varepsilon$ (поскольку κ линейно зависит от ляпуновского показателя λ_{\perp}). Такое поведение в критической точке довольно необычно; оно связано со степенной формой вероятностного распределения.

Численная ловушка для идентичных систем

Интересный эффект можно наблюдать при численном моделировании связанных идентичных отображений (13.4). Полная синхронизация может наблюдаться даже при тех значениях параметров, когда поперечный ляпуновский показатель положителен. Причиной этой

«неустойчивой» синхронизации является ограниченная точность вычислений. Действительно, если при численном моделировании симметричных подсистем их состояния в какой-то момент времени совпадают в компьютерном представлении (т.е. с точностью до последней значащей цифры), то при дальнейшей эволюции это совпадение сохранится, и будет наблюдаться полная синхронизация. Например, на обычных компьютерах двойная точность соответствует примерно пятнадцати десятичным разрядам. Если возмущение w окажется в момент времени t_0 меньше, чем 10^{-15} , то при всех $t > t_0$ возмущение будет тождественно равно нулю, $w \equiv 0$, что выглядит как полная синхронизация. В терминах случайного блуждания логарифма возмущения z этот эффект можно интерпретировать как наличие поглощающей границы при $z_{\min} = \ln(10^{-15})$: как только случайное блуждание достигает этой границы, оно «прилипает» к ней. Вблизи порога синхронизации вероятность достичь z_{\min} не мала, и такая «неустойчивая» синхронизация якобы наблюдалась авторами ряда публикаций. Этого численного артефакта можно избежать введением малой неидентичности систем (например, путем рассогласования параметров). Помогает и добавление дополнительного внешнего шума, который, конечно, должен быть разным для обеих подсистем.

Выше порога синхронизации, $\varepsilon > \varepsilon_c$

Расходимость при $w \rightarrow 0$ и означает полную синхронизацию (так что фактически распределение сжимается в дельта-функцию), поэтому в идеальном симметричном случае степенное распределение (13.25) при сильной связи не наблюдается. Однако оно появляется при отклонениях от полной симметрии, вследствие следующих факторов.

- (i) **Неидентичность.** Если взаимодействующие системы слегка отличаются, то идеальная синхронизация невозможна. В случае немного различающихся отображений мы можем вместо (13.4) записать

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(y(t)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - \varepsilon)f_1(x(t)) + \varepsilon f_2(y(t)) \\ \varepsilon f_1(x(t)) + (1 - \varepsilon)f_2(y(t)) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13.26)$$

Теперь в переменных (13.6) получаем

$$U(t+1) = \frac{1}{2}[f_1(U(t) + V(t)) + f_2(U(t) - V(t))], \quad (13.27)$$

$$V(t+1) = \frac{1-2\varepsilon}{2} [f_1(U(t)+V(t)) - f_2(U(t)-V(t))]. \quad (13.28)$$

Симметричное состояние $V = 0$ не является более решением этих уравнений, но при малой расстройке можно ожидать, что V мало. Пренебрегая влиянием малого возмущения v на динамику переменной U , перепишем уравнение (13.28) в виде

$$v(t+1) = \frac{(1-2\varepsilon)}{2} [(f'_1(U) + f'_2(U))v + (f_1(U) - f_2(U))]. \quad (13.29)$$

Основное отличие от идеально симметричной ситуации (13.10) – в последнем неоднородном члене в правой части уравнения. Он пропорционален расстройке, и мы будем считать, что этот хаотический член мал, порядка $\delta \ll 1$. Тогда динамику можно качественно описать следующим образом. Если разность состояний v превышает δ , то неоднородный член не важен, и мы получаем случайное блуждание, описываемое уравнением (13.18). Когда разность становится порядка δ , неоднородный член действует как случайная сила, препятствующая уменьшению v до значений, меньших, чем δ . Для случайного блуждания переменной z это соответствует отражающей границе при $z \approx \ln \delta$. При такой границе случайные блуждания происходят в области $z > \ln \delta$ даже при отрицательном среднем смещении $\lambda_{\perp} < 0$. Это означает, что выбросы v наблюдаются и в синхронном режиме с отрицательным поперечным ляпуновским показателем. Другими словами, синхронизованный хаос оказывается чрезвычайно чувствительным к возмущениям: даже малая расстройка приводит к большим (хотя, возможно, и редким) всплескам.

- (ii) **Шум.** Шум действует на связанные отображения точно так же, как и расстройка: он приводит к малым поперечным возмущениям даже тогда, когда полностью синхронный режим устойчив. Справедливы те же утверждения, что и в предыдущем случае, только δ теперь есть интенсивность шума.

Оба указанных фактора приводят к тому, что распределение вероятностей имеет нижнюю границу w_{\min} , примерно соответствующую уровню шума и/или расстройке. Степенной хвост распределения при больших w означает, что вероятность наблюдения больших отклонений от полностью синхронного состояния относительно велика (по сравнению, например, с гауссовским распределением, при котором вероятность больших отклонений экспоненциально мала). Это еще

одно проявление чувствительности к возмущениям, которая выражается в больших спорадических выбросах. Мы увидим в разделе 13.4, что эта чувствительность связана с нетривиальной топологической структурой аттрактора и его области притяжения в фазовом пространстве.

Пример: связанные отображения типа косо́й тент

Мы видели, что статистика переменной z определяется статистикой флуктуаций локального по времени ляпуновского показателя, а последний в свою очередь описывается энтропийной функцией $s(\Lambda)$. В качестве примера приложения теории рассмотрим отображение типа косо́й тент (13.5). Поскольку инвариантное распределение вероятностей для отображения типа косо́й тент (13.5) постоянно на интервале $(0, 1)$, а посещения областей $(0, a)$ и $(a, 1)$ не коррелированы, получаем

$$|\ln f'| = \begin{cases} -\ln a & \text{с вероятностью } a, \\ -\ln(1-a) & \text{с вероятностью } (1-a). \end{cases}$$

Следовательно, ляпуновский показатель есть

$$\lambda = -a \ln a - (1-a) \ln(1-a). \quad (13.30)$$

Таким образом, мы получаем случайные блуждания с шагами двух типов:

$$\begin{aligned} & -\ln a - \lambda && \text{с вероятностью } a, \\ & -\ln(1-a) - \lambda && \text{с вероятностью } (1-a). \end{aligned}$$

Для $p(\Lambda, T)$ получаем биномиальное распределение. Обозначая число итераций с $U < a$ через n и полагая $h = n/T$, получим из биномиального распределения

$$p(n, T) = \frac{T!}{n!(T-n)!} a^n (1-a)^{T-n}$$

и из соотношения

$$\Lambda = \frac{n}{T}(-\ln a) + \frac{T-n}{T}(-\ln(1-a)) - \lambda,$$

с использованием формулы Стирлинга, энтропийную функцию $s(\Lambda)$ в параметрическом представлении:

$$s(h) = h \ln \frac{a}{h} + (1-h) \ln \frac{1-a}{1-h},$$

$$\Lambda(h) = -h \ln a - (1 - h) \ln(1 - a) - \lambda.$$

Легко убедиться, что энтропийная функция (рис. 13.4а) имеет единственный максимум в нуле.

Используя основную формулу (13.24), можно представить показатель κ и поперечный показатель Ляпунова λ_{\perp} в параметрическом виде как функции h :

$$\kappa = \frac{ds}{d\Lambda} = \frac{ds/dh}{d\Lambda/dh} = \ln\left(\frac{1-h}{h}\right) / \ln\left(\frac{1-a}{a}\right) - 1,$$

$$\lambda_{\perp} = -\Lambda(h) + s(h)/\kappa.$$

Зависимость показателя κ от поперечного ляпуновского показателя показана на рис. 13.4б. Прежде чем обсуждать эту функцию, мы подтвердим справедливость степенного закона (13.22) вычислениями, представленными на рис. 13.5.

Из рис. 13.4 видно, что нетривиальный степенной закон справедлив только в некоторой окрестности критической точки перехода к синхронизации. Причиной этого является конечность области определения энтропийная функции $s(\Lambda)$

$$-\ln a - \lambda \leq \Lambda \leq \ln(1 - a) - \lambda. \tag{13.31}$$

Эта конечность есть общее свойство динамических систем, она исчезает при использовании параболического приближения для s . Действительно, параболическое приближение приводит к гауссовскому распределению локальных по времени ляпуновских показателей. Хвосты этого распределения простираются до бесконечности,

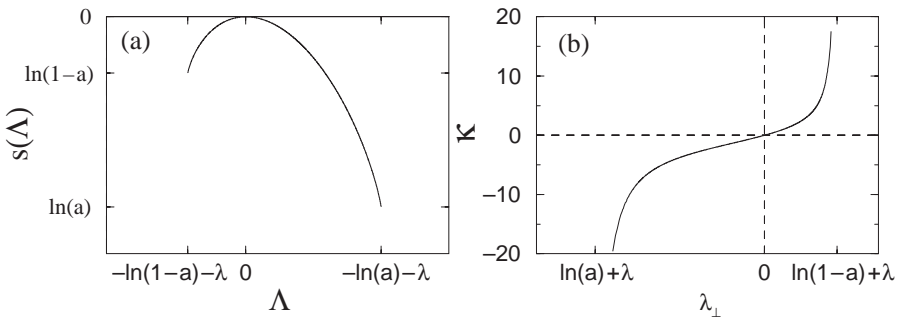


Рис. 13.4. Энтропийная функция, описывающая флуктуации локальных по времени ляпуновских показателей, (а) и показатель κ (б) как функция поперечного ляпуновского показателя для отображения типа косой тент. Отметим, что, согласно (13.14), $\lambda_{\perp} = \ln |1 - 2\varepsilon| + \lambda$.

что соответствует бесконечно большим локальным неустойчивостям (либо бесконечно сильной устойчивости). Однако линейный анализ возмущений вблизи траекторий динамической системы приводит к уравнениям с ограниченными коэффициентами, так что в реальных динамических системах локальные по времени ляпуновские показатели не могут быть сколь угодно большими.

Ввиду ограниченности локальных по времени ляпуновских показателей, показатель κ как функция от λ_{\perp} определен только на интервале (13.31). Легко видеть, что минимум и максимум локального ляпуновского показателя Λ соответствуют минимальному и максимальному локальному мультипликатору отображения типа тент, т.е. значениям $-\ln(1-a)$ и $-\ln a$. В области (13.31) поперечная динамика нетривиальна в том смысле, что есть поперечно устойчивые и поперечно неустойчивые траектории. Вне этого интервала либо все траектории неустойчивы, либо все устойчивы, и степенные хвосты

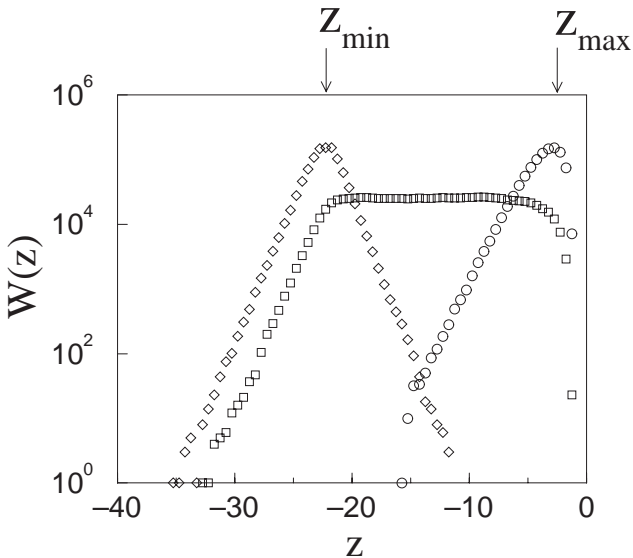


Рис. 13.5. Экспоненциальное распределение величины z (этому соответствует степенное распределение w) для связанных отображений типа косоугольного тента для трех значений параметра связи: при критическом значении $\varepsilon = \varepsilon_c$ (квадраты \square); при докритическом $\varepsilon = \varepsilon_c - 0.025$ (круги \circ); при закритической связи $\varepsilon = \varepsilon_c + 0.025$ (ромбы \diamond). В систему была дополнительно введена расстройка $a \pm 10^{-10}$, обеспечивающая ограничение функции распределения на нижнем пределе z_{\min} . В области $z_{\min} < z < z_{\max}$ распределения с хорошей точностью соответствуют экспоненциальному закону в соответствии с выражением (13.22).

распределения не существуют (в терминах случайного блуждания: все шаги направлены в одну сторону). Мы обсудим эту ситуацию с другой точки зрения в разделе 13.4.

13.3.4 Модуляционная перемежаемость: корреляционные свойства

Вблизи порога полной синхронизации динамика разности между состояниями подсистем демонстрирует перемежаемость: всплески разделены длинными периодами молчания (рис. 13.3). Качественное описание этой модуляционной перемежаемости было дано выше: логарифм возмущения ведет себя как случайные блуждания, наибольшие отклонения которых видны как относительно острые пики.

Аналогию со случайными блужданиями можно использовать и для количественного описания свойств временной корреляции модуляционной перемежаемости. Для этого удобно использовать вместо дискретных по времени случайных блужданий переменной z диффузионный процесс с непрерывным временем, со средней скоростью смещения λ_{\perp} и коэффициентом диффузии D . Отметим, что средняя скорость зависит от параметра связи, в то время как коэффициент диффузии определяется только параметрами одиночного отображения. Диффузионный процесс описывается уравнением Фоккера-Планка (см. [Феллер 1984]):

$$\frac{\partial W(z, t)}{\partial t} = -\lambda_{\perp} \frac{\partial W(z, t)}{\partial z} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W(z, t)}{\partial z^2}. \quad (13.32)$$

Это уравнение нужно дополнить граничными условиями. Как обсуждалось выше, и нелинейное насыщение, и малый шум или расстройка приводят к отражающим границам соответственно при z_{\max} и z_{\min} .

Определим теперь статистику временных интервалов между двумя всплесками модуляционной перемежаемости под порогом синхронизации, $\varepsilon < \varepsilon_c$. В этом случае достаточно учесть только отражающую границу при z_{\max} . Всплеск наблюдается, если переменная z близка к z_{\max} . Чтобы оценить время до следующего всплеска, возьмем некоторое значение $z_0 < z_{\max}$ и найдем среднее время, за которое случайное блуждание достигнет z_{\max} . На языке теории случайных процессов это задача о первом достижении границы. Для диффузионных процессов, описываемых уравнением Фоккера-Планка (13.32), распределение времен достижения границы хорошо изучено (см.,

например, [Феллер 1984]). Таким образом получается распределение интервалов между всплесками

$$W(\tau) = \frac{|z_{\max} - z_0|}{\sqrt{2\pi D\tau^3}} \exp\left(-\frac{(z_{\max} - z_0 - \lambda_{\perp}\tau)^2}{2D\tau}\right). \quad (13.33)$$

Вблизи порога, когда интервалы между всплесками велики, можно записать для больших τ

$$W(\tau) \propto \tau^{-3/2} \exp\left(-\frac{\lambda_{\perp}^2}{2D}\tau\right).$$

Это распределение имеет вид степенного закона, обрзанного на верхней границе $\tau^* \sim D\lambda_{\perp}^{-2}$. Интервалы между всплесками могут быть очень большими, средняя продолжительность «ламинарных» фаз⁴

$$\langle \tau \rangle = \frac{z_{\max} - z_0}{\lambda_{\perp}}$$

расходится на пороге $\lambda_{\perp} = 0$.

Предполагая статистическую независимость интервалов между всплесками и используя функцию распределения этих интервалов, можно найти спектр мощности процесса $S(\zeta)$. Обозначив преобразование Фурье от плотности (13.33) через $\theta(\zeta)$, получим, согласно общей теории [Рытов 1988],

$$S(\zeta) \propto \operatorname{Re} \frac{\theta(\zeta)}{1 - \theta(\zeta)}.$$

К счастью, возникающие интегралы могут быть вычислены аналитически и в пределе $z_{\max} - z_0 \rightarrow 0$ получается степенной спектр модуляционной перемежаемости:

$$S(\zeta) \propto \zeta^{-1/2} \quad \text{при} \quad D \gg \zeta \gg D\lambda_{\perp}^{-2}.$$

В завершение обсуждения статистических свойств модуляционной перемежаемости отметим, что все рассмотрение полностью применимо и к системам, модуляционно возбуждаемым мультипликативным шумом. Обычно подобные системы рассматриваются в непрерывном времени, при этом переход от состояния равновесия к макроскопическим колебаниям называют неравновесным фазовым переходом, индуцированным шумом (см. [Хорстхемке и Лефевр 1989] и содержащиеся там ссылки).

⁴ Можно найти и другие моменты распределения (13.33), см. [Fujisaka *et al.* 1997].

13.4 Переход к синхронизации: геометрическое рассмотрение

В этом разделе мы обсудим переход к полной синхронизации с геометрической точки зрения путем описания объектов в фазовом пространстве и их бифуркаций. Переход, изображенный на рис. 13.2, можно рассматривать как переход от полностью симметричного аттрактора, лежащего на диагонали $x = y$, к несимметричному, лежащему в некоторой окрестности диагонали (под асимметрией мы понимаем $x(t) \neq y(t)$; распределение вероятностей на плоскости (x, y) может оставаться симметричным, как на рис. 13.2). Этот переход можно интерпретировать как бифуркацию странного аттрактора. Нашей целью является установление связи этого перехода с бифуркациями отдельных траекторий. Удобно рассматривать неустойчивые *периодические* траектории, поскольку они образуют скелет хаотического множества. Они плотны на хаотическом аттракторе и многие характеризующие хаос величины (например, инвариантная мера, максимальный ляпуновский показатель) могут быть выражены через периодические траектории.⁵ Преимуществом такого представления служит возможность использовать результаты обычной теории бифуркаций (см., например, [Йосс и Джозеф 1983; Guckenheimer and Holmes 1986; Hale and Koçak 1991]), поскольку они непосредственно применимы к периодическим орбитам.

13.4.1 Поперечные бифуркации периодических траекторий

В качестве исходного состояния мы выберем полностью синхронное состояние (т.е. $\varepsilon \approx 1/2$) и будем исследовать нарушение симметрии, последовательно уменьшая параметр связи ε . Рассмотрим сначала простейшую периодическую траекторию – состояние равновесия. Неподвижной точке x^* отображения $x \rightarrow f(x)$ соответствует синхронное состояние равновесия $x(t) = y(t) = x^*$, существующее при всех ε . Устойчивость этого состояния равновесия определяется по линеаризации уравнений (13.9) и (13.10), откуда следуют два мультипликатора:

$$\mu_u = f'(x^*), \quad \mu_v = (1 - 2\varepsilon)f'(x^*), \quad (13.34)$$

⁵ Описание хаоса в терминах периодических орбит дано в работах [Artuso et al. 1990a,b; Ott 1992].

соответствующие двум собственным модам u и v . Поскольку неподвижная точка принадлежит хаотическому отображению f , мультипликатор μ_u по модулю больше единицы, так что направление u всегда неустойчиво. Поперечное направление v устойчиво, если $|(1 - 2\varepsilon)f'(x^*)| < 1$, и неустойчиво, если это условие не выполнено. Таким образом, при значении $\varepsilon_c(x^*)$, определяемом из условия

$$\varepsilon_c(x^*) = \frac{1 - |f'(x^*)|^{-1}}{2}, \quad (13.35)$$

происходит бифуркация. Тип бифуркации зависит от знака мультипликатора при критическом значении параметра: при $\mu_v = 1$ происходит бифуркация вилки, а при $\mu_v = -1$ – бифуркация удвоения периода. Если эти бифуркации мягкие (что определяется нелинейными членами отображения), то появляются либо два симметричных состояния равновесия в случае бифуркации вилки, либо траектория периода два. Эти решения устойчивы по направлению V , но от симметричного решения они наследуют неустойчивость по направлению U . Бифуркация неподвижной точки схематически показана на рис. 13.6.

Описанная ситуация верна для всех неподвижных точек и периодических траекторий отображения $f(x)$, так что от симметричной траектории периода T , $x^p(t) = y^p(t)$, ответвляется либо пара симметричных друг другу траекторий того же периода в результате бифуркации вилки, либо траектория удвоенного периода в результате бифуркации удвоения периода.

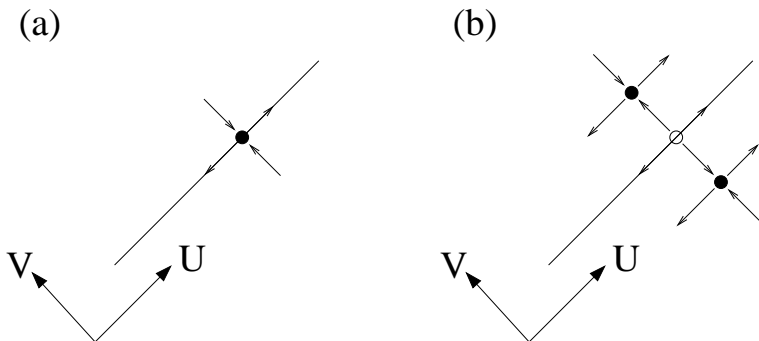


Рис. 13.6. Так выглядит мягкая поперечная бифуркация неустойчивой неподвижной точки. (а) При $\varepsilon > \varepsilon_c(x^*)$ неподвижная точка неустойчива в продольном направлении, но устойчива в поперечном. (б) При $\varepsilon < \varepsilon_c(x^*)$ в результате поперечной неустойчивости рождается цикл периода два или пара неподвижных точек.

Чтобы найти точку бифуркации, достаточно обобщить формулу (13.34): мультипликатор траектории периода T есть произведение локальных мультипликаторов

$$\mu_v = (1 - 2\varepsilon)^T \prod_{t=1}^T f'(x^p(t)).$$

Поэтому, аналогично (13.35),

$$\varepsilon_c(x^p) = \frac{1 - \left[\prod_{t=1}^T |f'(x^p)| \right]^{-1/T}}{2}. \quad (13.36)$$

Обратим внимание на то, что это выражение аналогично статистическому критерию наступления синхронизации (13.15): вместо среднего по всему хаотическому аттрактору мультипликатора e^λ мы имеем в (13.36) мультипликатор, усредненный по данной периодической траектории.

13.4.2 Слабая и сильная синхронизация

Из сравнения (13.36) и (13.15) следует очень важное свойство: бифуркационные точки (13.36) в общем случае не совпадают с критической точкой (13.15). В типичной ситуации мультипликаторы различных периодических орбит не совпадают, поэтому их бифуркации, связанные с поперечной неустойчивостью, занимают целый интервал значений параметра $(\varepsilon_{c,\min}, \varepsilon_{c,\max})$. Таким образом, в отличие от бифуркации одной периодической траектории, переход к синхронизации для всего хаотического множества занимает интервал по параметру. Сначала мы опишем этот переход для случая мягкой бифуркации.

Можно выделить следующие режимы (см. рис. 13.7).

Сильная синхронизация, $\varepsilon > \varepsilon_{c,\max}$

Все симметричные траектории поперечно устойчивы. При этом все точки из окрестности диагонали притягиваются к синхронному аттрактору $x = y$ и остаются в нем.

Слабая синхронизация, $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_{c,\max}$

Некоторые⁶ из периодических траекторий поперечно неустойчивы, но синхронное состояние устойчиво в среднем. Теперь почти все (в

⁶ На самом деле – бесконечно много.

смысле меры Лебега) точки из окрестности диагонали притягиваются к ней, но есть и исключительные начальные точки, которые покидают эту окрестность.

Слабо асинхронное состояние, $\varepsilon_{c,\min} < \varepsilon < \varepsilon_c$

Синхронный режим в среднем неустойчив, некоторые синхронные периодические траектории все еще устойчивы в поперечном направлении.

Сильно асинхронное состояние, $\varepsilon < \varepsilon_{c,\min}$

Все периодические траектории поперечно неустойчивы.

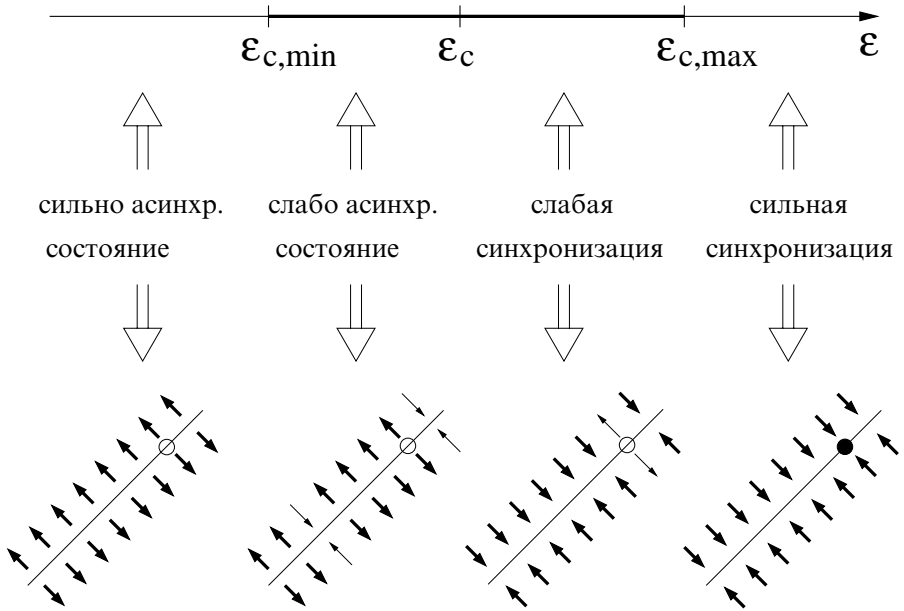


Рис. 13.7. Бифуркационная диаграмма для перехода к синхронизации. Переход «размазан» по интервалу $(\varepsilon_{c,\min}, \varepsilon_{c,\max})$. На нижнем рисунке жирной стрелкой показана динамика большинства траекторий вблизи синхронного состояния (притяжение при $\varepsilon > \varepsilon_c$ и отталкивание при $\varepsilon < \varepsilon_c$). Тонкой стрелкой показана нетипичная динамика. При $\varepsilon < \varepsilon_{c,\min}$ все симметричные траектории поперечно неустойчивы, это сильно асинхронный режим. При $\varepsilon_{c,\min} < \varepsilon < \varepsilon_c$ большинство симметричных траекторий поперечно неустойчиво (слабо асинхронное состояние). При $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_{c,\max}$ почти все траектории на симметричном аттракторе являются поперечно притягивающими, хотя некоторые поперечно неустойчивы (слабая синхронизация). При $\varepsilon > \varepsilon_{c,\max}$ все траектории на симметричном аттракторе поперечно устойчивы (сильная синхронизация). Неподвижная точка, испытывающая бифуркацию при $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$, отмечена кружком \circ (ср. с рис. 13.6).

Описанные выше свойства устойчивости периодических орбит непосредственно соответствуют статистическому описанию раздела 13.3: наибольший (наименьший) мультипликатор соответствует наибольшему (соответственно, наименьшему) локальному по времени ляпуновскому показателю. Область, в которой существует степенное распределение, соответствует режимам слабой синхронизации и слабой десинхронизации.

Наиболее нетривиальным является режим слабой синхронизации, в котором синхронное симметричное состояние устойчиво в среднем, но в то же время некоторые периодические орбиты поперечно неустойчивы. Отметим, что из существования единственной поперечно неустойчивой периодической орбиты следует, что поперечно неустойчивые траектории могут быть найдены везде: действительно, для каждой периодической траектории существует плотное множество точек, со временем приближающихся к ней, и траектории, начинающиеся в этих точках, в конце концов приходят к неустойчивой периодической траектории и сами становятся поперечно неустойчивыми. Получается парадоксальная ситуация: в аттракторе есть плотное множество непритягивающих траекторий. Мы сталкиваемся здесь с ситуацией, когда тонкие различия в математическом определении аттрактора становятся существенными. Поэтому напомним два пространственных определения аттрактора динамической системы.

Топологическое определение

Аттрактор определяется (см., например, [Каток и Хассельблат 1999]) как компактное множество \mathcal{A} , имеющее окрестность \mathcal{U} , такую, что $\bigcap_{n>0} f^n(\mathcal{U}) = \mathcal{A}$ и $f^k(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$ при некотором $k > 0$. Это определение означает, что существует открытая окрестность, все точки которой притягиваются к \mathcal{A} .

Вероятностное определение по Милнору

Милнор [Milnor 1985] определяет аттрактор как замкнутое множество, область притяжения $\rho(\mathcal{A})$ которого имеет строго положительную меру; при этом не существует строго меньшего множества $\mathcal{A}' \in \mathcal{A}$, чья область притяжения совпадала бы с $\rho(\mathcal{A})$ с точностью до множества, имеющего нулевую меру Лебега.

Различие между этими двумя определениями очевидно: в определении Милнора допускается, чтобы некоторые близкие точки уходили от аттрактора, в то время как в топологическом определении это исключается. Из сказанного выше следует, что в сильно

синхронном состоянии при больших параметрах связи аттрактор топологический, а в слабо асинхронном режиме – милноровский. Топологический аттрактор при $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_{c,\max}$ больше милноровского – он включает траектории, испытывающие бифуркацию от поперечно неустойчивых орбит, и их неустойчивые многообразия. Как было показано в разделе 13.3, при слабой синхронизации плотность распределения имеет степенной хвост, если из-за малой расстройки или шума строго симметричный режим невозможен. Геометрически этому соответствует раздувание милноровского аттрактора в топологический вследствие шума и/или расстройки.

13.4.3 Локальный и глобальный ридлинг

Выше мы обсуждали случай мягкой поперечной неустойчивости периодических орбит симметричного аттрактора, как показано на рис. 13.6. В этом случае новые поперечно устойчивые периодические точки появляются в окрестности диагонали $x = y$. Соответственно, топологический аттрактор, который можно рассматривать как «огibaющую» этих появившихся асимметричных периодических точек, мягко вырастает из диагонали. Милноровский аттрактор на диагонали $x = y$ притягивает подавляющее большинство соседних точек, но есть исключительные возмущения, которые растут в поперечном направлении. Эти растущие возмущения, однако, не могут отойти далеко от синхронного состояния (особенно, если связь близка к критической, при которой возникает первая поперечная неустойчивость $\varepsilon \lesssim \varepsilon_{c,\max}$), поскольку рост ограничен неустойчивыми многообразиями родившихся асимметричных периодических орбит. Фактически почти все возрастающие возмущения возвращаются к симметричному состоянию (кроме тех, что лежат на устойчивых многообразиях асимметричных периодических орбит). Эта ситуация называется *локальный ридлинг*.⁷ Она существует вблизи симметричного состояния при $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_{c,\max}$ и проявляется на пороге $\varepsilon = \varepsilon_c$.

Другая ситуация наблюдается в случае, когда поперечная бифуркация периодической орбиты на симметричном аттракторе (например, типа вилки) – жесткая. В этом случае при $\varepsilon = \varepsilon_{c,\max}$ пара симметричных неподвижных точек (периодических орбит) «влипают» в симметричную точку (периодическую орбиту), так что последняя становится неустойчивой. В отличие от локального ридлинга, поперечные возмущения теперь не остаются в окрестности симметричной орбиты, а отходят далеко от диагонали (или даже уходят на

⁷ От английского riddle – решето, сито.

бесконечность). То же самое происходит и при жесткой бифуркации удвоения периода, оба этих случая показаны на рис. 13.8.

Режим слабой синхронизации при глобальном ридлинге еще более чувствителен, поскольку в окрестности диагонали есть точки, покидающие ее и уходящие к какому-нибудь удаленному аттрактору. Более того, эти точки плотны в окрестности диагонали (здесь работает тот же самый аргумент, что и в случае локального ридлинга), хотя их мера стремится к нулю при приближении к диагонали $x = y$. Такая структура области притяжения аттрактора называется *глобальным ридлингом*; для нее характерна особая чувствительность к шуму. Действительно, шум выбивает траекторию с диагонали, и поэтому есть конечная вероятность попасть в область притяжения удаленного аттрактора в каждый момент времени. Поэтому синхронизация возможна только как временный, переходный режим – в конце концов все траектории покидают окрестность синхронного состояния.

Суммируя свойства перехода к синхронизации, подчеркнем, что мы имеем здесь дело с бифуркацией хаос–хаос, которая размазана по параметру. В самом деле, вся область параметра $(\varepsilon_{c,\min}, \varepsilon_{c,\max})$ демонстрирует нетривиальную динамику, которую можно описывать как топологически, так и статистически. Эта ситуация типична для хаотических систем с флуктуирующими локальными по времени показателями Ляпунова. Необычные свойства перехода проявляются и в более сложных ситуациях, обсуждению которых посвящена следующая глава.

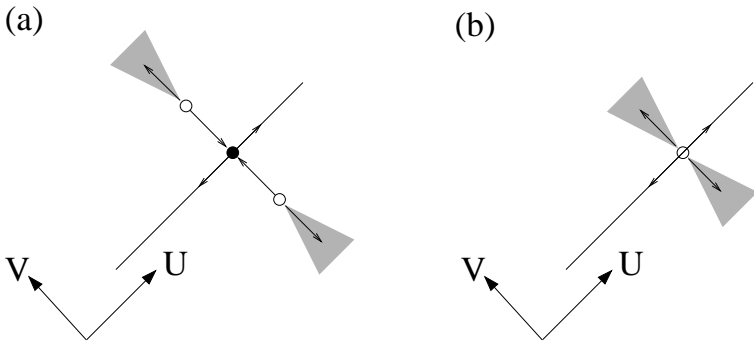


Рис. 13.8. Жесткая поперечная бифуркация неподвижной точки. (а) При $\varepsilon > \varepsilon_{c,\max}$ точка устойчива. Серым показаны точки, уходящие к далекому аттрактору. (б) При жесткой бифуркации $\varepsilon = \varepsilon_{c,\max}$, область притяжения далекого аттрактора касается диагонали. У затененной области есть прообразы (не показанные на рисунке), которые плотны в окрестности диагонали.

13.5 Библиографические заметки

Мы описывали полную синхронизацию, следуя ранним работам [Fujisaka and Yamada 1983; Yamada and Fujisaka 1983; Pikovsky 1984a]. Статистические свойства на пороге синхронизации обсуждались в работах [Pikovsky 1984a; Yamada and Fujisaka 1986; Fujisaka *et al.* 1986; Fujisaka and Yamada 1987; Yamada and Fujisaka 1987; Pikovsky and Grassberger 1991]. Модуляционная перемежаемость рассматривалась также в [Hammer *et al.* 1994; Heagy *et al.* 1994c; Platt *et al.* 1994; Venkataramani *et al.* 1995; Xie *et al.* 1995; Yu *et al.* 1995; Ćenys *et al.* 1996; Lai 1996a; Venkataramani *et al.* 1996; Yang and Ding 1996; Ćenys *et al.* 1997a,b; Ding and Yang 1997; Fujisaka *et al.* 1997; Kim 1997; Fujisaka *et al.* 1998; Miyazaki and Hata 1998; Nakao 1998].

Топологические свойства перехода к синхронизации обсуждались в работах [Pikovsky and Grassberger 1991; Ashwin *et al.* 1994, 1996, 1998; Aston and Dellnitz 1995; Heagy *et al.* 1995; Ashwin and Aston 1998; Maistrenko *et al.* 1998]. Общее описание перехода к ридлингу можно найти в статьях [Heagy *et al.* 1994a; Lai *et al.* 1996; Lai and Grebogi 1996; Maistrenko and Kapitaniak 1996; Billings *et al.* 1997; Lai 1997; Maistrenko *et al.* 1997, 1998, 1999a; Nagai and Lai 1997a,b; Kapitaniak *et al.* 1998; Kapitaniak and Maistrenko 1998; Manscher *et al.* 1998; Astakhov *et al.* 1999].

Эксперименты по полной синхронизации проводились с электронными схемами [Schuster *et al.* 1986; Heagy *et al.* 1994b, 1995; Yu *et al.* 1995; Ćenys *et al.* 1996; Lorenzo *et al.* 1996; Rulkov 1996] и лазерами [Roy and Thornburg 1994; Terry *et al.* 1999]. См. также специальный выпуск журнала CHAOS [Pecora (ed.) 1997] и приведенные там ссылки.

Глава 14

Полная синхронизация II: обобщения и сложные системы

В предыдущей главе мы рассматривали простейшую реализацию полной синхронизации в системе двух симметрично взаимодействующих одномерных отображений. Ниже мы опишем более общие ситуации: много связанных отображений, системы с непрерывным временем, распределенные системы. Кроме того, мы обсудим синхронизацию в более общем контексте как симметричный хаотический режим. В основном мы ограничимся линейным приближением, из которого следует порог синхронизации; только в некоторых случаях мы опишем нелинейные эффекты вблизи порога.

14.1 Идентичные отображения, связь общего вида

Простейшее обобщение теории, развитой в главе 13, состоит в рассмотрении большого ансамбля связанных хаотических систем.

Рассмотрим N идентичных линейно связанных хаотических отображений (13.1). Представим связь с помощью общего линейного оператора \hat{L} , задаваемого матрицей $N \times N$:

$$x_k(t+1) = \sum_{j=1}^N L_{kj} f(x_j(t)). \quad (14.1)$$

Условие диссипативности связи, обсуждавшееся в разделе 13.1, теперь формулируется следующим образом:

- (i) Система (14.1) допускает симметричное полностью синхронизованное решение, в котором состояния всех отображений идентичны

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = U(t).$$

Это выполняется, если постоянный вектор $\mathbf{e}_1 = (1, \dots, 1)$ является собственным вектором матрицы \hat{L} с собственным значением $\sigma_1 = 1$.

- (ii) Все остальные собственные значения \hat{L} по абсолютной величине меньше 1. Это приводит к затуханию неоднородных возмущений под действием связи.

Условие устойчивости синхронного состояния может быть получено путем линеаризации уравнения (14.1). В отличие от простейшего случая главы 13, теперь имеется много поперечных мод, и устойчивость определяется максимальным поперечным показателем Ляпунова. Рассмотрим эволюцию неоднородного возмущения $\delta x_k(0)$ возле хаотического решения $U(t)$. После T итераций получаем

$$\delta x_k(T) = \hat{L}^T \prod_{t=1}^T f'(U(t)) \delta x_k(0).$$

Поскольку множители $f'(U)$ не зависят от k , эволюция возмущения разлагается по собственным векторам матрицы L_{kj} . При больших T доминирует наибольшее неоднородное возмущение, соответствующее второму собственному вектору \mathbf{e}_2 , поскольку его собственное значение σ_2 ближе всего к 1; таким образом, рост возмущения определяется, аналогично (13.14), формулой

$$|\delta x_k(T)| \propto \mathbf{e}_2 |\sigma_2|^T e^{T\lambda} = \mathbf{e}_2 e^{T\lambda_{\perp}}, \quad \lambda_{\perp} = \lambda + \ln |\sigma_2|. \quad (14.2)$$

В этих обозначениях критерий линейной устойчивости синхронного режима совпадает с выведенным в главе 13.2: $\lambda_{\perp} < 0$.

Этот критерий применим как к большим, так и к малым ансамблям хаотических систем. В первом случае естественно возникает вопрос: возможна ли полная синхронизация очень большого числа взаимодействующих подсистем N , и что происходит в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$. Как следует из (14.2), ответ на этот вопрос зависит от поведения спектра оператора \hat{L} . Собственное значение

$\sigma_1 = 1$ всегда присутствует, поэтому мы можем записать критерий устойчивости синхронного режима как

$$\ln |\sigma_1| - \ln |\sigma_2| > \lambda.$$

Это означает, что в спектре линейного оператора связи \hat{L} должна быть щель (запрещенная зона), размером по меньшей мере λ , между первым и вторым собственными значениями. Другими словами, динамика несимметричных мод должна быть достаточно быстрой: затухание из-за связи должно быть сильнее, чем неустойчивость из-за хаоса. Очевидно, не все типы взаимодействия приводят к щели в спектре. Мы рассмотрим ниже в качестве примеров несколько физически важных ситуаций.

14.1.1 Однонаправленная связь

С физической точки зрения, однонаправленная связь означает, что сигнал с одного хаотического осциллятора действует на другой. Такую связь легко реализовать электронно, связывая электронные цепи сигналом, пропущенным через усилитель. Обычно однонаправленная связь рассматривается для случая регулярной цепочки элементов, но она может быть осуществлена и в более сложных ситуациях, см. рис. 14.1.

Для двух систем однонаправленная связь описывается матрицей взаимодействия

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (14.3)$$

Собственные значения легко находятся:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1 - \varepsilon,$$

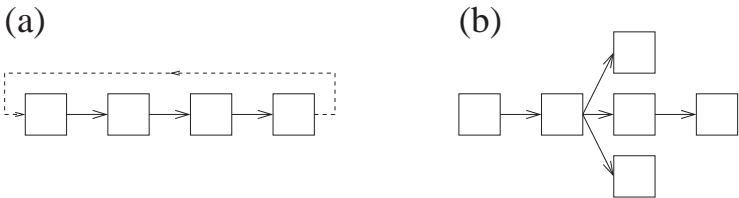


Рис. 14.1. Схематическое представление однонаправленной связи в одномерной цепочке (а) и в сети (б). Цепочка может образовывать кольцо, если последний элемент действует на первый (штриховая линия в (а)).

синхронное состояние линейно устойчиво, если

$$\lambda + \ln |1 - \varepsilon| < 0. \quad (14.4)$$

Этот результат легко обобщается на случай цепочки из N однонаправленно связанных систем (рис. 14.1a), для которых матрица имеет вид

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 - \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (14.5)$$

Здесь второе собственное значение (которое на самом деле является $(N - 1)$ -кратно вырожденным) также равно $\sigma_2 = 1 - \varepsilon$, и для устойчивости синхронного состояния справедливо (14.4), независимо от числа N взаимодействующих систем: оператор, описывающий однонаправленную связь, имеет спектральную щель. Уместно отметить, что существование щели существенно зависит от граничных условий для цепочки. При выводе (14.5) мы предполагали отсутствие взаимодействия между первым и последним элементами цепочки. Если рассмотреть цепочку с однонаправленной связью и *периодическими* граничными условиями (см. рис. 14.1a), где первый элемент связан с последним, то матрица взаимодействия будет выглядеть как

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 - \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix}, \quad (14.6)$$

и спектр становится совершенно другим. Поскольку цепочка однородна, собственные вектора есть Фурье-моды, и спектр можно представить как функцию волнового вектора \mathcal{K}

$$|\sigma(\mathcal{K})|^2 = (1 - \varepsilon)^2 + 2\varepsilon(1 - \varepsilon) \cos \mathcal{K} + \varepsilon^2, \quad -\pi \leq \mathcal{K} < \pi.$$

В этом спектре щель отсутствует (поскольку $|\sigma(\mathcal{K})| \rightarrow 1$ при $\mathcal{K} \rightarrow 0$), при достаточно больших N синхронизация невозможна.

Такое большое влияние граничных условий на динамику цепочки допускает прозрачное физическое толкование. В цепочке с однонаправленной связью локальные неоднородные возмущения на каждом элементе затухают; однако они не исчезают, а распространяются вдоль цепочки. При граничных условиях (14.5) возмущение в конце

концов затухает на последнем элементе, в то время как для системы (14.6) возмущение снова появляется на первом элементе. В терминах теории устойчивости распределенных систем мы имеем дело с *конвективной неустойчивостью*, т.е. возмущение затухает в том месте, где оно возникло, но распространяется и растет вдоль по потоку. Противоположный случай, когда возмущение растет там, где оно было произведено, называется *абсолютной неустойчивостью* (см. например [Лифшиц и Питаевский 1981]).

14.1.2 Асимметричная локальная связь

Случай асимметричной локальной связи можно представить как комбинацию диффузионной (13.3) и однонаправленной (14.5) связи:

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 - \gamma & \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon - \gamma & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 - \varepsilon - \gamma & \gamma & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (14.7)$$

В этой модели, принадлежащей к классу цепочек связанных отображений, хаотические отображения образуют цепочку, в которой взаимодействуют ближайшие соседи. В термодинамическом пределе, когда число взаимодействующих отображений стремится к бесконечности, спектр собственных значений принимает вид

$$\sigma(\mathcal{K}) = 1 - \varepsilon - \gamma + 2\sqrt{\varepsilon\gamma} \cos \mathcal{K}, \quad -\pi < \mathcal{K} < \pi.$$

При $\varepsilon \neq \gamma$ этот спектр имеет щель при $\mathcal{K} = 0$:

$$\sigma(\mathcal{K} \rightarrow 0) = 1 - (\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\gamma})^2 < 1.$$

Эта щель делает возможной полную синхронизацию в цепочке точно так же, как при описанной выше односторонней связи. При чисто диффузионной симметричной связи $\varepsilon = \gamma$ щель исчезает: в длинной цепочке хаотических элементов диффузионная связь не приводит к синхронизации, так как длинноволновые моды с малыми \mathcal{K} всегда неустойчивы.

14.1.3 Глобальная связь (через среднее поле)

При глобальной связи каждый элемент взаимодействует со всеми другими, причем сила связи не зависит от «расстояния» между ними

(см. раздел 4.3, главу 12 и рис. 4.24). В типичной постановке задачи рассматривается N идентичных хаотических отображений (13.1), взаимодействующих друг с другом через диссипативную связь типа (13.3). Поскольку число связей для каждого элемента равно $N - 1$, удобно отнормировать константу связи на N . В результате получаем уравнения

$$x_k(t+1) = (1 - \varepsilon)f(x_k(t)) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j(t)), \quad k = 1, \dots, N. \quad (14.8)$$

Систему (14.8) называют системой глобально связанных отображений. Ее можно интерпретировать и как систему с взаимодействием через среднее поле, поскольку последний член в правой части есть среднее по всем элементам ансамбля.

Матрица взаимодействия \hat{L} может быть представлена в виде

$$\hat{L} = (1 - \varepsilon)\hat{I} + \frac{\varepsilon}{N}\hat{J},$$

где \hat{I} – единичная матрица, а матрица \hat{J} состоит из одних единиц. В режиме полной синхронизации состояния всех элементов идентичны $x_1 = x_2 = \dots = x_N$ и эволюционируют согласно отображению (13.1) – легко видеть, что такое решение удовлетворяет системе (14.8). Собственные значения оператора связи \hat{L} легко вычисляются: одно из них равно 1, а остальные $N - 1$ собственных значений равны $1 - \varepsilon$. Таким образом, из условия устойчивости вытекает условие синхронизации

$$\lambda + \ln |1 - \varepsilon| < 0,$$

где λ – ляпуновский показатель локального отображения. Поскольку устойчивость всех неоднородных мод одинакова (второе собственное значение матрицы связи $(N - 1)$ -кратно вырождено), при неустойчивости синхронного состояния, по линейной теории, все моды растут и состояния всех отображений становятся различными. Однако при численном моделировании (14.8) наблюдаются более упорядоченные режимы. После процесса установления происходит кластеризация: образуются большие группы элементов, находящихся в идентичном состоянии. Это явление иллюстрируется на рис. 14.2. Число кластеров и распределение подсистем по кластерам зависит от начальных условий. При больших N наблюдаются как режимы с небольшим числом кластеров, так и такие, в которых число кластеров порядка N .

Кластерное состояние можно рассматривать как слабую синхронизацию, которая наблюдается, если связь достаточно сильна, чтобы сделать одинаковыми часть систем, но недостаточна для полной синхронизации. Так же, как и в случае двух связанных отображений (см. обсуждение ридлинга в разделе 13.4), кластерные аттракторы могут иметь «дырявые» (riddled) области притяжения и поэтому очень чувствительны к малому шуму. Кластеры могут наблюдаться и вследствие конечной точности численного моделирования (как и в случае численной ловушки для двух связанных систем, см. раздел 13.3): если состояния двух систем в некоторый момент времени совпадают в пределах машинной точности, то все последующие состояния этих систем будут идентичны, даже если синхронный режим неустойчив.

14.2 Системы с непрерывным временем

Исследование полной синхронизации в системах с непрерывным временем проводится точно так же, как для отображений. Простейшая модель состоит из двух взаимодействующих хаотических систем. Каждая M -мерная динамическая система описывается нелинейными

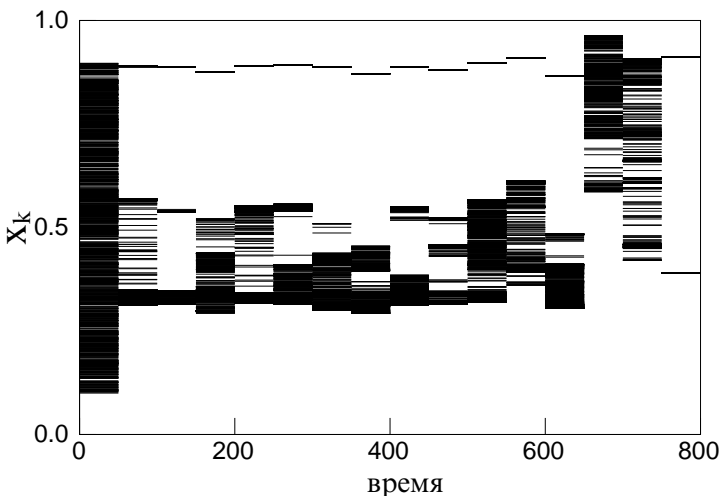


Рис. 14.2. Динамика ансамбля из 1000 глобально связанных логистических отображений $x \rightarrow 4x(1-x)$ с постоянной связью $\varepsilon = 0.28$. Системы имеют случайные начальные условия, равномерно распределенные в интервале $(0.1, 0.9)$. Значения x_k (горизонтальные отрезки) выводятся на каждой 50-й итерации. После примерно 750 итераций образуется двухкластерное состояние.

обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, \dots, x_M, t), \quad k = 1, \dots, M. \quad (14.9)$$

Эти уравнения могут быть неавтономными, т.е. случай вынужденных колебаний также включен в рассмотрение.

Чтобы ввести диссипативную связь в пару идентичных систем,¹ естественно добавить линейные симметричные слагаемые в правые части уравнений (ср. с обсуждением диссипативной связи в разделе 8.2)

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, \dots, x_M, t) + \varepsilon_k(y_k - x_k), \quad (14.10)$$

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(y_1, \dots, y_M, t) + \varepsilon_k(x_k - y_k). \quad (14.11)$$

При такой связи всегда есть синхронное хаотическое решение $x_k(t) = y_k(t) = U_k(t)$, остается только исследовать его устойчивость.

Для отклонений $v_k = y_k(t) - x_k(t)$ получаем линеаризованные уравнения

$$\frac{dv_k}{dt} = J_{kj}v_j - 2\varepsilon_k v_k, \quad (14.12)$$

где $J_{kj} = \partial f_k(U(t))/\partial x_j$ – матрица Якоби, составленная из частных производных. Асимптотически при больших t решения этой линейной системы растут экспоненциально. Поскольку размерность системы (14.12) равна M , существуют M поперечных ляпуновских показателей (аналогично существованию M обычных ляпуновских показателей в M -мерной точечной системе (14.9)), и наибольший из них определяет устойчивость по отношению к неоднородным возмущениям. Поскольку правые части (14.12) зависят от параметров связи ε_k , максимальный ляпуновский показатель λ_{\perp} также зависит от этих параметров, и область синхронизации определяется из условия

$$\lambda_{\perp}(\varepsilon_k) < 0.$$

В простейшем случае все параметры связи равны $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_M = \varepsilon$. Тогда, подставив $v_k = e^{-2\varepsilon t} \tilde{v}_k$, можно свести (14.12) к виду

$$\frac{d\tilde{v}_k}{dt} = J_{kj}\tilde{v}_j, \quad (14.13)$$

¹ Идентичность означает, что явная зависимость правых частей от времени одинакова, т.е. внешние силы, действующие на системы, также идентичны.

т.е. к уравнениям, описывающим динамику линейных возмущений одной хаотической системы; рост этих возмущений задается максимальным ляпуновским показателем λ_{\max} . В этом случае условие синхронизации принимает простой вид

$$2\varepsilon > \lambda_{\max}.$$

В главе 10 мы описали другой тип синхронизации в системах с непрерывным временем – фазовую синхронизацию. В некотором смысле, полная синхронизация – более общее явление, так как ее можно наблюдать для любых хаотических систем, независимо от того, можно ли для них ввести фазы и частоты; ее можно наблюдать как в автономных системах, так и в находящихся под внешним воздействием, а также в системах с дискретным временем (отображениях). С другой стороны, полная синхронизация требует сильной связи и идентичности взаимодействующих систем, в то время как фазовая наблюдается при относительно слабой связи, а также в неидентичных системах.

14.3 Распределенные системы

Хаотические режимы в распределенных динамических системах, при которых корреляции убывают в пространстве и во времени, часто называют *пространственно–временным хаосом*.

К популярным моделям, демонстрирующим пространственно–временной хаос, относятся цепочки связанных отображений, уравнения в частных производных и цепочки связанных осцилляторов (с непрерывным временем). Подробный анализ этих моделей содержится в книгах [Kaneko 1993; Bohr *et al.* 1998] и обзорных статьях [Chaté and Manneville 1992; Cross and Hohenberg 1993].

Различают два типа полной синхронизации пространственно–временного хаоса. В одном случае речь идет о полной идентичности хаотических движений во всех точках пространства. При этом в распределенной системе наблюдаются пространственно однородные, хаотические по времени движения. В другом случае движения хаотичны как во времени, так и в пространстве, но они обладают определенной симметрией. Например, двумерное поле $u(x, y, t)$ может быть однородным по y и в то же время демонстрировать одномерный пространственно–временной хаос по x . Ниже мы обсудим эти два типа полной синхронизации пространственно–временного хаоса.

14.3.1 Пространственно однородный хаос

Модель пространственно–временного хаоса можно построить, взяв за основу конечномерную динамическую систему и составив дискретную или непрерывную среду из этих элементов. Такой подход можно рассматривать как непосредственное обобщение построения среды из колебательных элементов (см. (11.14)). Кроме цепочки связанных отображений (14.7), к этому классу принадлежат две другие популярные модели: цепочка связанных осцилляторов и уравнения реакции–диффузии. Цепочку связанных осцилляторов можно записать аналогично двум взаимодействующим осцилляторам (уравнения (14.10) и (14.11)) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \sum_{\{j\}} \varepsilon(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k),$$

где суммирование производится по соседям элемента k . Уравнения реакции–диффузии описывают непрерывное в пространстве поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = (u_1, \dots, u_M)$ путем обобщения уравнений (14.9)

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = f_k(\mathbf{u}) + D_k \nabla^2 u_k, \quad k = 1, \dots, M. \quad (14.14)$$

Подобная система естественным образом возникает при описании химической турбулентности [Kuramoto 1984; Kapral and Showalter 1995], при этом переменные u_k характеризуют концентрации участвующих в реакции реагентов; их эволюция есть комбинация химической реакции с диффузией.

Синхронное решение этих уравнений есть пространственно однородное хаотическое по времени поле $\mathbf{U}(t)$, эволюция которого задается уравнениями (14.9). Это решение существует, если оно допускается граничными условиями, т.е., если поток через границу отсутствует, $\nabla u_k|_V = 0$ (эти условия естественны для химических систем). В контексте химических реакций, синхронный режим описывает пространственно–однородное распределение реагентов. В распределенной системе существует множество поперечных мод (поперечных не в смысле пространственной ортогональности, а в смысле нарушения однородности), и условие устойчивости синхронного состояния можно сформулировать как отрицательность всех поперечных ляпуновских показателей.

Для системы (14.14) эти моды есть собственные функции оператора Лапласа с соответствующими граничными условиями. Пусть

$v_k^{(l)}(\mathbf{r})$ – собственная функция лапласиана, соответствующая собственному значению σ :

$$D_k \nabla^2 v_k^{(l)} = -\sigma^{(l)} v_k^{(l)}.$$

Тогда устойчивость по отношению к возмущению $v^{(l)}$ определяется линейной системой

$$\frac{dv_k^{(l)}}{dt} = J_{kj} v_j^{(l)} - \sigma v_k^{(l)}, \quad (14.15)$$

которая эквивалентна (14.12). Таким образом, каждой пространственно неоднородной моде линейризованных уравнений (14.15) отвечает спектр поперечных ляпуновских показателей; для устойчивости пространственно однородного хаоса все они должны быть отрицательны. Поскольку связь в (14.14) симметрична (присутствует только диффузия), конвективная неустойчивость, обсуждавшаяся в разделе 14.1.1, не наблюдается. В области с характерным размером L первое ненулевое собственное значение оператора Лапласа порядка L^{-2} . Поэтому в термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$ спектр оператора диффузии не имеет щели: длинноволновые возмущения затухают медленно. Полная синхронизация в этом пределе невозможна; только в малых системах все поперечные ляпуновские показатели отрицательны. С физической точки зрения, в большой системе всегда возможны длинноволновые возмущения с ляпуновскими показателями, близкими к максимальному показателю хаотического пространственно однородного решения, поэтому эти моды неустойчивы.

Здесь следует сделать одно замечание. Выше мы везде предполагали «нормальный» пространственно–временной хаос, т.е. режим с положительными ляпуновскими показателями. Существуют примеры и «аномального» пространственно–временного хаоса, где показатели Ляпунова отрицательны [Crutchfield and Kaneko 1988; Politi *et al.* 1993; Vonaccini and Politi 1997]. Этот «устойчивый» хаос неустойчив по отношению к возмущениям конечной амплитуды, не описываемым линейризованными уравнениями [Torcini *et al.* 1995]. В этой ситуации наши аргументы, основанные на линейном анализе устойчивости, неприменимы.

14.3.2 Поперечная синхронизация пространственно–временного хаоса

Пространственно–временной хаос может быть неоднородным по некоторым направлениям в пространстве, но однородным – син-

хронным – по другим. Простейший пример такой ситуации получается, если две распределенные системы с турбулентной динамикой связаны друг с другом диссипативной связью. В качестве примера рассмотрим два связанных уравнения Курамото–Сивашинского

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \varepsilon(u_2 - u_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= \varepsilon(u_1 - u_2). \end{aligned} \quad (14.16)$$

Уравнение Курамото–Сивашинского демонстрирует пространственно–временной хаос, если размер области достаточно большой (см., например, [Hupman *et al.* 1986; Vohr *et al.* 1998]). Диссипативная связь пропорциональна ε , она стремится уравнивать состояния систем во всех точках пространства во все моменты времени. Мы можем исследовать эту модель точно так же, как систему связанных дифференциальных уравнений (14.10) и (14.11): порог синхронизации определяется максимальным ляпуновским показателем пространственно–временного хаоса:

$$2\varepsilon_c = \lambda_{\max}.$$

Синхронизация в связанных уравнениях Курамото–Сивашинского показана на рис. 14.3.

Интересное явление наблюдается вблизи перехода к полной синхронизации. Как было показано в главе 13, такой переход в сосредоточенной системе сопровождается сильной модуляционной перемежаемостью, вызванной флуктуациями локального показателя роста. В распределенной системе (типа уравнения Курамото–Сивашинского) показатель роста флуктуирует в пространстве и во времени. Поэтому наблюдается перемежающийся процесс, в котором асинхронные всплески появляются, дрейфуют и исчезают, причем весьма нерегулярно [Kurths and Pikovsky 1995].

Поперечно синхронизованный пространственно–временной хаос возникает не только в искусственных моделях типа (14.16), но и в двумерных и трехмерных (по пространству) уравнениях в частных производных. Для этого необходимо, чтобы оператор диффузии был анизотропен по отношению к пространственным координатам. Рассмотрим, например, систему реакции–диффузии (14.14) в прямоугольнике $0 < x < L_x, 0 < y < L_y$ в случае, когда оператор диффузии имеет вид

$$D_x \frac{\partial}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial}{\partial y^2}.$$

Собственные моды $u \propto \cos(\pi n_x x/L_x) \cos(\pi n_y y/L_y)$ соответствуют собственным значениям

$$\sigma = \pi^2(D_x n_x^2 L_x^{-2} + D_y n_y^2 L_y^{-2}), \quad n_{x,y} = 0, 1, 2, \dots$$

Предположим, что $D_x L_x^{-2} \ll D_y L_y^{-2}$, т.е. размер системы L_x в направлении x много больше размера L_y по y . Тогда однородное состояние может быть неустойчиво по отношению ко многим модам, зависящим от x , в то время как однородность по y сохраняется. Таким образом, получается пространственно–временной хаос по координате x , полностью синхронизованный в направлении y .

Для иллюстрации этого явления рассмотрим двумерное анизотропное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау (ср. с (11.15))

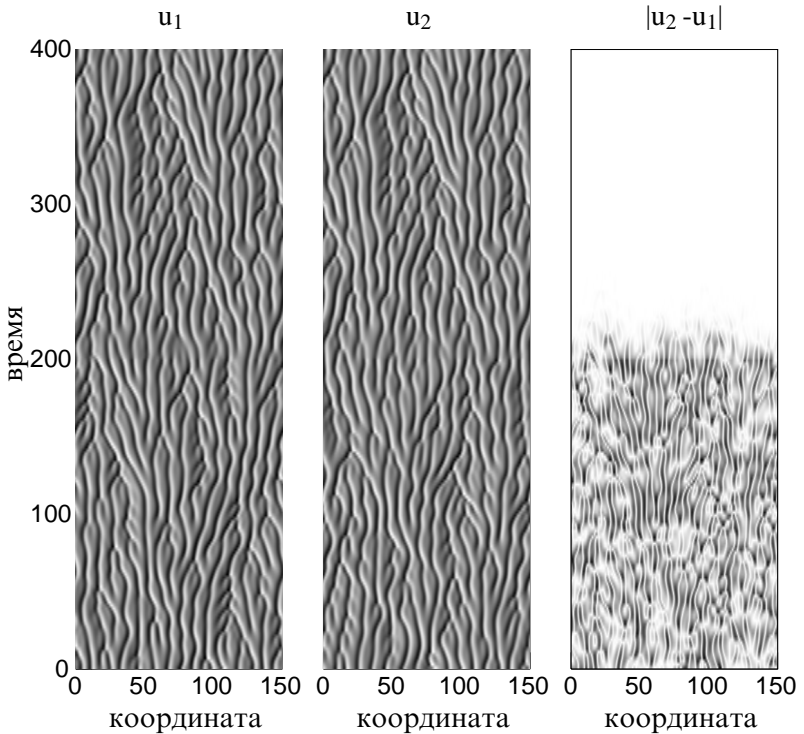


Рис. 14.3. Синхронизация в связанных уравнениях Курамото–Сивашинского (14.16). Эволюция во времени полей $u_{1,2}$ и $|u_1 - u_2|$ показана градиациями серого цвета. В интервале $0 < t < 200$ связь отсутствует $\varepsilon = 0$ и поля независимы. При $t = 200$ включается связь $\varepsilon = 0.1 > \varepsilon_c$, приводящая к синхронному пространственно–временному хаосу $u_1(x, t) = u_2(x, t)$.

$$\frac{\partial a(x, y, t)}{\partial t} = a - (1 + ic_3)|a|^2 a + (1 + ic_1) \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + d_1 \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}. \quad (14.17)$$

Чисто диффузионная связь в направлении y может подавить поперечную неустойчивость, и наблюдаемый режим будет однороден по y (рис. 14.4b). Если коэффициент диффузии d_1 мал, то поле меняется нерегулярно по обоим направлениям (рис. 14.4a).

14.3.3 Синхронизация в связанных клеточных автоматах

Клеточные автоматы (см. [Gutowitz 1990] и содержащиеся там ссылки) демонстрируют не такой сильный хаос, как цепочки связанных отображений. Действительно, в клеточных автоматах дискретны не только пространство и время, но и само поле принимает только дискретные значения (обычно рассматриваются автоматы с двумя состояниями «0» и «1»). Тем не менее, в некоторых клеточных автоматах наблюдается нерегулярная динамика (это возможно только в бесконечных цепочках). Диссипативную связь в клеточных автоматах ввести не так просто, как в отображениях, поскольку состояния между «0» и «1» не существуют. Поэтому используют статистическое взаимодействие: состояния в некоторых точках пространства (выбранных с вероятностью p) становятся идентичными, а в остальных точках ничего не происходит. Вероятность p играет роль параметра связи: при $p = 1$ полная синхронизация наступает уже на первом шаге по времени, а при $p = 0$ не наступает никогда. Полная синхронизация наблюдается, если вероятность связи p превышает

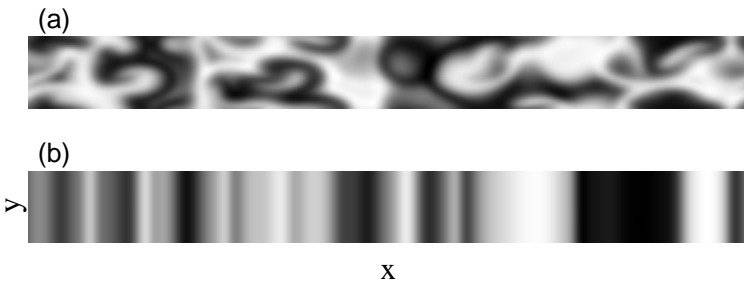


Рис. 14.4. Пространственное распределение действительной части решения комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау (14.17) $a(x, y, t)$. Рисунки (a) и (b) отличаются значением коэффициента диффузии d_1 : в асинхронном режиме (a) $d_1 = 0.5$, а в синхронном (в направлении y) состоянии (b) $d_1 = 2$. Остальные параметры $c_1 = -1$ и $c_3 = 1.5$ в обоих случаях одинаковы.

критическое значение p_c . Переход к синхронизации такой же, как при направленной перколяции (см., например, [Grassberger 1995] и приведенные там ссылки): область пространства, в которой состояния двух клеточных автоматов различны,² на пороге синхронизации образует бесконечный фрактал; в синхронном режиме она конечна, а в асинхронном бесконечна и имеет постоянную плотность.

14.4 Синхронизация как симметричное состояние общего вида

До сих пор мы рассматривали синхронизацию как результат взаимодействия двух идентичных физических систем. В более общем контексте синхронный режим можно рассматривать просто как симметричное состояние и исследовать, при каких условиях такое состояние возможно и когда оно устойчиво. При этом может оказаться, что мы не можем разделить систему на отдельные части, но «синхронизация» – в том или ином смысле – все же будет наблюдаться.

Пусть два набора переменных

$$x_1, \dots, x_M \quad \text{и} \quad y_1, \dots, y_M$$

описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = F_k^x(x, y, t), \quad \frac{dy_k}{dt} = F_k^y(x, y, t), \quad (14.18)$$

при единственном предположении о существовании симметричного хаотического решения $x_k(t) = y_k(t) = U_k(t)$ при всех k . Отметим, что мы не считаем саму систему симметричной (см., например, случай однонаправленной связи в разделе 14.1.1, где связь асимметрична, но существует симметричное хаотическое решение) и не требуем, чтобы диагональ $x_k = y_k$ была инвариантной. Симметричное состояние можно интерпретировать как синхронное, и для исследования его устойчивости по отношению к поперечным возмущениям нужно линеаризовать (14.18). Некоторые возмущения не нарушают симметрию, а асимметричные в общем случае растут (убывают) экспоненциально с соответствующими поперечными ляпуновскими показателями. Максимальный показатель определяет устойчивость симметричного состояния; в зависимости от параметров оно может быть притягивающим или отталкивающим.

² В теории клеточных автоматов эту область называют кластером.

В качестве простого примера несимметричной системы рассмотрим популярную модель двух связанных одномерных отображений

$$\begin{aligned}x(t+1) &= f(x(t)) + \varepsilon_1(y(t) - x(t)), \\y(t+1) &= f(y(t)) + \varepsilon_2(x(t) - y(t)).\end{aligned}$$

Отметим, что, хотя связь выглядит линейной, она на самом деле более сложная и не обязательно приводит к синхронизации. Устойчивость симметричного режима $x = y = U$ по отношению к пространственным возмущениям приводит к линейному уравнению для $v = x - y$

$$v(t+1) = v(t)[f'(U(t)) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2].$$

Отсюда следует, что поперечный ляпуновский показатель

$$\lambda_{\perp} = \langle \ln |f'(U(t)) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2| \rangle.$$

Его зависимость от параметров $\varepsilon_{1,2}$ может быть нетривиальной; важно определить области отрицательных λ_{\perp} , соответствующие линейно устойчивым симметричным режимам. Простое выражение для поперечных ляпуновских показателей удастся написать только для связанных отображений типа косоугольного тента (13.5) (ср. с (13.30)):

$$\lambda_{\perp} = a \ln \left| \frac{1}{a} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right| + (1-a) \ln \left| \frac{1}{a-1} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right|.$$

Из этого примера видно, что поперечные показатели не связаны непосредственно с ляпуновскими показателями симметричного хаоса.

14.4.1 Копированные системы

Особый случай полной синхронизации в симметричных системах был рассмотрен Пекорой и Кэрроллом [Pecora and Carroll 1990]. Пусть имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений (14.9); сделаем копию (герлица) одного (или нескольких) из этих уравнений. Для простоты запишем это для автономной системы третьего порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_x(x, y, z), \\ \dot{y} &= f_y(x, y, z), \\ \dot{z} &= f_z(x, y, z), \quad \dot{z}' = f_z(x, y, z').\end{aligned}$$

Здесь мы скопировали уравнение для z , с той же самой правой частью f_z , но для новой переменной z' . Очевидно, что всегда существует симметричное решение $x = x^0(t)$, $y = y^0(t)$, $z = z' = z^0(t)$. Для проверки его устойчивости запишем уравнение для малого возмущения $v = z - z'$:

$$\dot{v} = f'_z(x^0(t), y^0(t), z^0(t))v.$$

Это возмущение растет экспоненциально,

$$v \propto \exp(\lambda_{\perp} t),$$

и поперечный показатель (иногда его называют условным показателем) λ_{\perp} равен

$$\lambda_{\perp} = \langle f'_z \rangle.$$

Если этот показатель отрицателен, то синхронный режим с $z = z'$ линейно устойчив. Отметим, что поперечный показатель есть один из ляпуновских показателей симметричного движения в полной четырехмерной системе (x, y, z, z') (поскольку нарушающее симметрию возмущение v не зависит от других возмущений). Однако он не имеет ничего общего с ляпуновскими показателями исходной трехмерной системы (x, y, z) (поскольку в исходной системе возмущение переменной z зависит от возмущений переменных x и y).

Идея синхронизации системы и копии непосредственно обобщается на M -мерные динамические системы, в которых создается копия $m < M$ уравнений. Копированные переменные называют вынуждаемой, или подчиненной подсистемой, а исходные – вынуждающей, или управляющей. Отметим, что при такой синхронизации нет параметра связи: можно сказать, что связь всегда сильная, но частичная – связаны только m переменных. Поэтому синхронизацией нельзя управлять, можно только проверить, получается ли полная синхронизация для выбранных копированных переменных. В некотором смысле, синхронизация системы и копии отражает свойство хаотических систем иметь устойчивые и неустойчивые направления в фазовом пространстве; иногда устойчивость можно ассоциировать с определенными переменными или группами переменных.

В качестве примера на рис. 14.5 показана синхронизация системы и копии в модели Лоренца (10.4); копированы переменные y и z . Разности $|y' - y|$ и $|z' - z|$ убывают, и в конце концов в полной пятимерной системе устанавливается симметрический режим. Ресога and Carroll [1990] обнаружили, что при копировании переменной z поперечный ляпуновский показатель положителен и синхронизации не наблюдается.

14.5 Библиографические заметки

Связь общего вида для хаотических систем рассматривалась в работах [de Sousa Vieira *et al.* 1992; Heagy *et al.* 1994b; Gade 1996; Güémez and Matías 1996; Lorenzo *et al.* 1996; Pecora and Carroll 1998; Femat and Solis-Perales 1999; Pasemann 1999]. Частному случаю глобальной связи посвящены статьи [Kaneko 1990, 1991, 1997, 1998; Crisanti *et al.* 1996; Hasler *et al.* 1998; Zanette and Mikhailov 1998a,b; Balmforth *et al.* 1999; Glendinning 1999; Mendes 1999; Maistrenko *et al.* 2000]. Wang *et al.* [2000a] провели эксперименты с глобально связанными электрохимическими осцилляторами. Gade [1996] и Manrubia and Mikhailov [1999] рассматривали случайную связь между хаотическими системами. Dolnik and Epstein [1996] исследовали синхронизацию двух связанных хаотических химических осцилляторов. Полной синхронизации в распределенных системах посвящены работы [Pikovsky 1984a; Yamada and Fujisaka 1984]. Частичная синхронизация в цепочке лазеров исследовалась теоретически и экспериментально в работе [Terry *et al.* 1999], см. также [Vieira 1999].

Синхронизация двух систем с пространственно-временным хаосом обсуждалась в статьях [Pikovsky and Kurths 1994; Kurths and

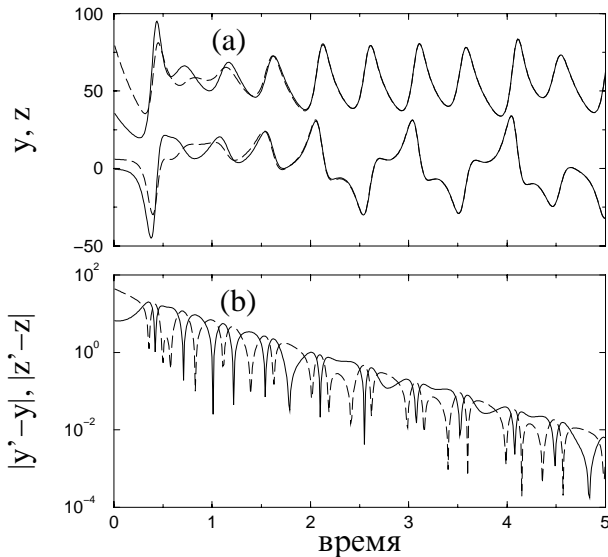


Рис. 14.5. Синхронизация системы и копии в модели Лоренца. (а) Эволюция переменных z и z' (верхняя кривая) и y и y' (нижняя кривая); копированные переменные показаны пунктиром. (б) Разности $|y - y'|$ (сплошная линия) и $|z - z'|$ (пунктир) убывают во времени.

Pikovsky 1995; Parekh *et al.* 1996; Sauer and Kaiser 1996; Hu *et al.* 1997; Kocarev *et al.* 1997; Jiang and Parmananda 1998; Boccaletti *et al.* 1999; Grassberger 1999]. Синхронизация в клеточных автоматах рассматривалась в [Morelli and Zanette 1998; Urias *et al.* 1998; Bagnoli *et al.* 1999; Bagnoli and Rechtman 1999; Grassberger 1999].

Синхронизация системы и копии обсуждалась в работах [Pecora and Carroll 1990, 1998; Carroll and Pecora 1993a,b, 1998; Gupte and Amritkar 1993; Heagy and Carroll 1994; Tresser *et al.* 1995; González-Miranda 1996a,b; Konnur 1996; Balmforth *et al.* 1997; Boccaletti *et al.* 1997; de Sousa Vieira and Lichtenberg 1997; Duane 1997; Güémez *et al.* 1997; Kim 1997; Pecora *et al.* 1997b,c; Zonghua and Shigang 1997a,b; Carroll and Johnson 1998; Johnson *et al.* 1998; He and Vaidya 1999; Mainieri and Rehacek 1999; Matsumoto and Nishi 1999; Morgül 1999; Voss 2000]. Асимптотическая устойчивость этой синхронизации исследовалась He and Vaidya [1992] с использованием функций Ляпунова. Экспериментальная реализация этого эффекта в лазерах описана в [Sugawara *et al.* 1994]. Некоторые аспекты синхронизации копированных систем обсуждались в связи с проблемой передачи информации [Cuomo and Oppenheim 1993; Cuomo *et al.* 1993a,b; Gonzalez-Miranda 1999; Morgül and Feki 1999].

Глава 15

Синхронизация сложной динамики внешним воздействием

В этой главе мы опишем синхронизацию внешними силами; обсуждаемые здесь эффекты отличаются от описанных в главах 7 и 10. Содержание главы довольно неоднородно: мы обсудим системы и силы различных типов. Тем не менее, оказывается возможным установить общее для всех ситуаций свойство: синхронизация наблюдается, если собственная динамика системы подавляется и она полностью подчиняется внешней силе. Другими словами, движения в системе синхронизируются, если они становятся устойчивыми к внутренним возмущениям. Количественно это измеряется максимальным показателем Ляпунова: отрицательный показатель приводит к синхронизации (отметим, что речь идет не о поперечном или условном показателе Ляпунова, а о «каноническом» показателе Ляпунова динамической системы). Это общее правило не зависит от типа силы и от вида системы, тем не менее ряд свойств синхронизации зависит от конкретной постановки задачи. Поэтому в последующих разделах мы рассмотрим случаи периодической, шумовой и хаотической силы по отдельности. Пока же интересно отметить, что захват фазы периодических колебаний (глава 7) также можно интерпретировать как стабилизацию динамики внешней силой: асинхронное движение (в отсутствие силы или вне области синхронизации) имеет нулевой максимальный ляпуновский показатель, в то время как в синхронном

режиме он отрицателен.¹

Другой важный подход, на котором мы остановимся в этой главе, состоит в исследовании чувствительности к возмущениям вынуждающего сигнала. В отличие от чувствительности к начальным условиям, которая характеризуется ляпуновским показателем, чувствительность к внешнему воздействию таких универсальных количественных характеристик не имеет. Более того, о чувствительности можно говорить только в случае воздействий, для которых возможны малые возмущения. Они существуют для хаотических и квазипериодических воздействий, поскольку в этих случаях сила задается достаточно сложной динамикой; для периодических сигналов таких возмущений нет. Мы увидим, что синхронное состояние (в описанном выше смысле) может быть чувствительно или нечувствительно к внешней силе, этим двум случаям соответствуют гладкая и негладкая (фрактальная) зависимости вынужденных переменных от вынуждающих.

15.1 Синхронизация периодической силой

Во многих системах хаос исчезает при приложении периодической внешней силы достаточно большой амплитуды. В этом контексте синхронизация означает, что наблюдается не хаос, а вынужденные периодические колебания. Общие свойства этой разрушающей хаос синхронизации не универсальны: обычно при очень сильном воздействии наблюдаются регулярные режимы, но их зависимость от амплитуды и частоты не подчиняется каким-либо общим законам. Во всяком случае, в вынужденной системе аттрактором является периодическая траектория, так что соотношение между вынуждающими и вынуждаемыми переменными задаются гладкой функцией.

Ниже представлены результаты численного исследования системы Лоренца с периодической внешней силой

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 10(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= 28x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{8}{3}z + xy + \varepsilon \sin \omega t.\end{aligned}\tag{15.1}$$

¹ Напомним, что есть и исключения из этого общего правила. Так, в разделе 14.3 упоминался «устойчивый» (в смысле отрицательности ляпуновских показателей) пространственно-временной хаос.

Область периодических колебаний показана на рис. 15.1. Порог синхронизации лежит высоко: при амплитудах силы меньших 20 периодические режимы не наблюдаются. Два типичных устойчивых аттрактора показаны на рис. 15.2.

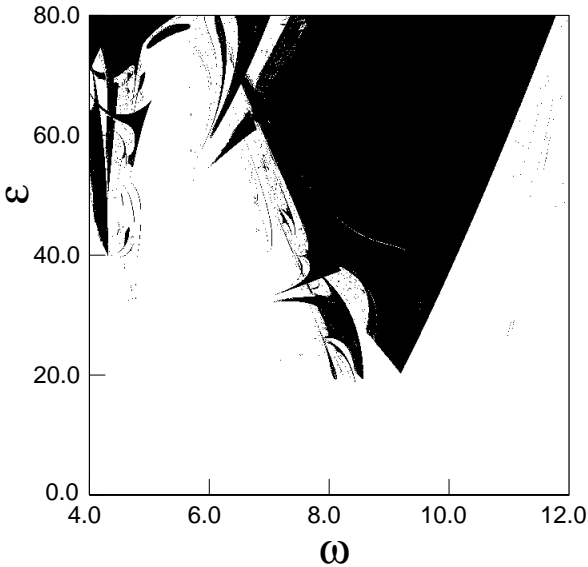


Рис. 15.1. Область периодических режимов (черные точки) в системе Лоренца с внешней силой (15.1) на плоскости параметров внешнего воздействия. Счет всегда начинался с начальных условий $x = y = 0.001$, $z = 0$, так что возможная мультистабильность (т.е. сосуществование периодических и хаотических решений) не выявлялась.

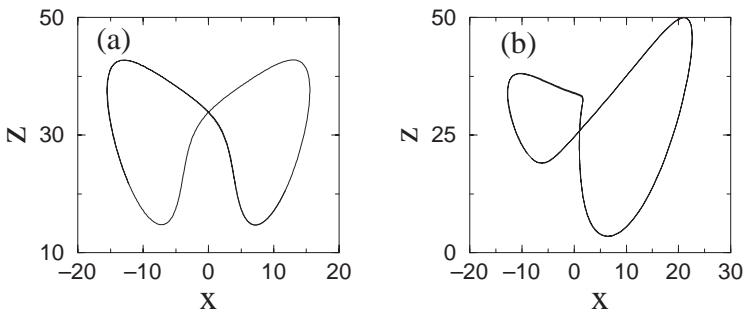


Рис. 15.2. Два периодических режима в системе Лоренца с внешней силой. (a) $\varepsilon = 60$, $\omega = 10$. (b) $\varepsilon = 80$, $\omega = 4$.

15.2 Синхронизация шумовым воздействием

Синхронизация внешним шумом заключается в том, что система «забывает» собственную динамику и свои начальные условия и следует за вынуждающим шумом. В одной системе переход к синхронизации не виден, но его можно наблюдать, если вместе с системой рассмотреть ее копию, т.е., если мы будем сравнивать две *идентичные* системы, возбуждаемые *одним и тем же* шумом, но начинающие движение с разных начальных условий. (Эта постановка задачи объясняет, какая устойчивость характеризуется ляпуновским показателем в системе с шумом: это устойчивость по отношению к возмущениям начальных условий, а не устойчивость по отношению к шуму.) При рассмотрении двух систем разница между положительным и отрицательным ляпуновским показателем легко видна: при положительном показателе траектории сохраняют зависимость от начальных условий и остаются различными, в то время как при отрицательном показателе начальные условия забываются и траектории сближаются, т.е. системы синхронизируются. Это совпадение движений в двух системах под действием общего шума тривиально, если системы линейны:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \xi(t), \quad \frac{dy}{dt} = -y + \xi(t).$$

Тогда движение каждой системы состоит из затухающих свободных колебаний, зависящих от начальных условий (однородная часть), и из вынужденных колебаний, зависящих только от шума (неоднородная часть). На больших временах зависимость от начальных условий исчезает, и состояния становятся идентичными ($x = y$); это видно из уравнения для разности $x - y$. То же самое происходит и в нелинейных системах, но задача исследования их устойчивости менее тривиальна.

Синхронизация общим шумом происходит без какого-либо прямого взаимодействия между осцилляторами и не зависит от их числа. Поэтому этот эффект может наблюдаться в сколь угодно большом ансамбле идентичных нелинейных систем, на которые действует один и тот же шум: все системы будут синхронизованы, если ляпуновский показатель отрицателен. Ниже мы рассмотрим случаи воздействия шума на периодические и хаотические колебания.

15.2.1 Периодические колебания под действием шума

Эффект воздействия шума на периодические колебания обсуждался выше в главе 9. Там нас интересовали свойства диффузии фазы, теперь же для нас важны характеристики устойчивости движения. Они нетривиальны, поскольку в автономном периодическом осцилляторе один ляпуновский показатель равен нулю (он соответствует фазе). При наличии внешнего шума этот показатель будет, в общем случае, ненулевым – и главный вопрос состоит в том, будет он положительным или отрицательным.

Как отмечалось в разделе 9.1, в присутствии шума простейшее уравнение для фазы имеет вид

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \xi(t).$$

Правая часть не зависит от фазы и поэтому ляпуновский показатель равен нулю, $\lambda = \langle d\dot{\phi}/d\phi \rangle = 0$. Другими словами, фаза остается нейтральной по отношению к возмущениям начальных условий. Это вырождение снимается, если вынуждающая сила зависит от фазы (ср. с (9.1)):

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, \xi(t)),$$

где ε характеризует амплитуду силы. В этой общей ситуации ляпуновский показатель будет ненулевым.

В качестве конкретного примера автоколебаний с шумом рассмотрим обобщение модели с импульсной силой, описанной в разделе 7.3.3. Там мы исследовали динамику осциллятора под действием периодической последовательности δ -импульсов (7.64). Теперь мы рассмотрим последовательность импульсов

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \delta(t - t_n) \quad (15.2)$$

со случайными амплитудами ξ_n и случайными временами появления t_n . Отображение окружности (7.68) очевидным образом обобщается на этот случай, приводя к стохастическому отображению (для простоты считаем, что параметр α равен нулю):

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \omega_0 T_n + \varepsilon \xi_n \cos \phi_n. \quad (15.3)$$

Из-за случайности интервалов между импульсами T_n и их амплитуд ξ_n , фаза меняется нерегулярно, так что нельзя говорить о

синхронизации или захвате фазы в обычном смысле. Мы покажем, однако, что фаза может быть привязана к внешней силе, и в этом смысле можно говорить об определенной синхронизации.

Нас интересует чувствительность фазы ϕ_n по отношению к изменениям начальной фазы ϕ_0 . Другими словами, мы должны вычислить ляпуновский показатель:

$$\lambda = \frac{\langle \ln |d\phi_{n+1}/d\phi_n| \rangle}{\langle T \rangle} = \frac{\langle \ln |1 - \varepsilon \xi \sin \phi| \rangle}{\langle T \rangle}. \quad (15.4)$$

Здесь $\langle T \rangle$ – средний промежуток между импульсами. Полученная численно зависимость ляпуновского показателя от амплитуды импульсной силы ε немонотонна (рис. 15.3): при малых амплитудах показатель отрицателен, при больших – положителен.

Эти свойства показателя можно вывести аналитически. При малых ε можно разложить (15.4) в ряд по ε и получить

$$\lambda \approx \frac{1}{\langle T \rangle} \left(-\varepsilon \langle \xi \sin \phi \rangle - \frac{\varepsilon^2}{2} \langle \xi^2 \sin^2 \phi \rangle \right).$$

В общем случае, для того, чтобы выполнить усреднение, нужно знать распределение фазы. При малых ε и больших флуктуациях межимпульсных интервалов T_n это распределение почти однородно, так что первый член равен нулю, и ведущий член приводит к отрицательному ляпуновскому показателю:

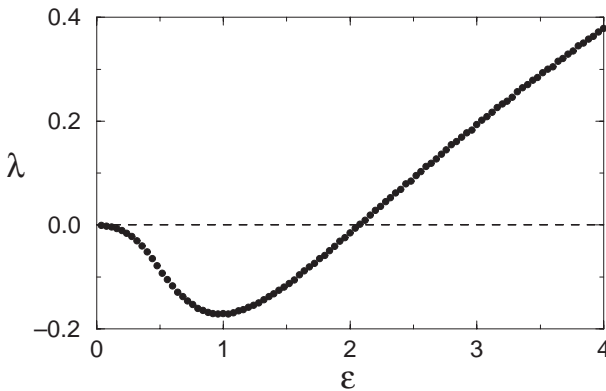


Рис. 15.3. Ляпуновский показатель λ стохастического отображения (15.3) в зависимости от амплитуды шума ε . Интервалы между импульсами $\omega_0 T_n$ – независимые случайные величины, распределенные экспоненциально со средним, равным 1; амплитуды импульсов ξ_n распределены по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией.

$$\lambda \propto -\frac{\varepsilon^2}{\langle T \rangle}.$$

Отрицательный ляпуновский показатель означает, что по прошествии определенного времени фаза осциллятора «забывает» свое начальное значение и следует за внешней силой (рис. 15.4). Этому эффекту можно дать следующее наглядное объяснение. Будем рассматривать случайную последовательность импульсов как набор периодических пачек. Каждая из пачек, согласно теории синхронизации (глава 7), приводит либо к синхронному (с отрицательным ляпуновским показателем), либо к квазипериодическому (с нулевым показателем) движению. Случайно «переключая» пачки, мы смешиваем эти два режима, получая в результате отрицательный в среднем показатель.

При большой амплитуде импульсов ε , можно использовать другое приближение,² и пренебречь постоянным членом под логарифмом в (15.4):

² Хотя при выводе (15.3) сила предполагалась малой, можно рассматривать стохастическое отображение (15.3) как самостоятельную модель и исследовать ее при всех значениях параметров.

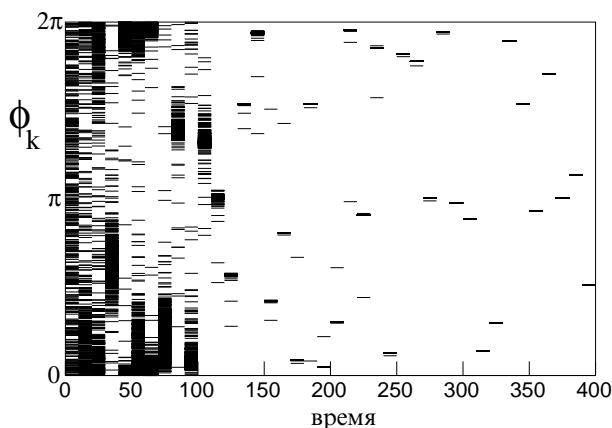


Рис. 15.4. Эволюция в ансамбле из 500 осцилляторов, подчиняющихся стохастическому отображению (15.3). Фазы показаны горизонтальными полосками для каждой десятой итерации. Статистическое распределение величин T_n , ξ_n – как на рис. 15.3. Амплитуда силы $\varepsilon = 0.4$ выбрана такой, чтобы ляпуновский показатель был отрицательным: все фазы, вначале распределенные равномерно, после ≈ 300 итераций сходятся к одному состоянию.

$$\lambda \approx \frac{\langle \ln |\varepsilon \xi \sin \phi| \rangle}{\langle T \rangle} \propto \frac{\ln \varepsilon + \langle \ln |\xi \sin \phi| \rangle}{\langle T \rangle}.$$

Отсюда следует, что ляпуновский показатель положителен при больших ε . Для одного осциллятора с внешней силой это ничего не значит. Но, если мы подготовим две копии системы с близкими начальными условиями и будем действовать на них одним и тем же шумом, то различие между состояниями систем будет расти экспоненциально, и через короткое время колебания в них будут независимыми – происходит десинхронизация.

В заключение отметим, что в математической литературе объект, возникающий при эволюции ансамбля идентичных систем под действием общего шума, называют *случайным аттрактором* [Crauel and Flandoli 1994; Arnold 1998].

15.2.2 Синхронизация хаотических колебаний внешним шумом

При хаосе максимальный ляпуновский показатель положителен, но под действием внешнего шума он может менять знак. Один возможный механизм стабилизации заключается в шуме, зависящем от координат (модулированном), подобно случаю периодических колебаний, описанному в разделе 15.2.1. Другая возможность состоит в том, что шум не влияет на устойчивость непосредственно, но изменяет функцию распределения в фазовом пространстве. В результате этого некоторые «устойчивые» области в фазовом пространстве могут посещаться более часто, приводя к уменьшению ляпуновского показателя. Этот механизм работает и при аддитивном шуме. Рассмотрим для примера два одномерных отображения под действием одного и того же шума:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t)) + \xi(t), \\ y(t+1) &= f(y(t)) + \xi(t). \end{aligned}$$

Очевидно, что синхронное состояние $x(t) = y(t) = U(t)$ есть решение этих уравнений. Для определения его устойчивости, рассмотрим эволюцию малой разности $v = x - y$, подчиняющейся линеаризованному уравнению,

$$v(t+1) = f'(U(t))v(t). \quad (15.5)$$

Это уравнение в точности совпадает с линеаризованным уравнением для возмущений в одном отображении, и рост величины v определяется ляпуновским показателем

$$\lambda = \langle \ln |f'(U)| \rangle. \quad (15.6)$$

Усреднение в (15.6) производится по инвариантной мере в отображении с шумом, а оно зависит от интенсивности последнего. Поэтому при изменении шума и/или параметров отображения может наблюдаться переход ляпуновского показателя от положительных значений к отрицательным, т.е. переход от асинхронного режима к синхронному.

Подчеркнем, что (15.5) близко к уравнению (13.10), описывающему линейную стадию синхронизации связанных автономных хаотических отображений. Таким образом, вся статистическая теория, развитая в разделе 13.3, справедлива и для систем с шумом. На пороге синхронизации наблюдается модуляционная перемежаемость со свойствами, описанными в разделе 13.3. В частности, численная ловушка, описанная в разделе 13.3, существует и для систем с общим шумом: даже если ляпуновский показатель положителен, две (или более) системы могут выглядеть при численных расчетах синхронными, если компьютерные представления их состояний в какой-то момент совпали (т.е., если разность состояний меньше, чем точность представления чисел в компьютере). Этот эффект, конечно, исчезает, если системы не идентичны.

В отличие от чисто детерминированного случая мы не можем проследить за топологическими свойствами аттракторов в фазовом пространстве, как это было сделано в разделе 13.4. В самом деле, шум размывает топологическую структуру детерминированных систем (периодические орбиты и т.д.). Нетривиальные топологические свойства могут наблюдаться при хаотической силе, см. раздел 15.3.1.

15.3 Синхронизация хаотических колебаний хаотической силой

15.3.1 Полная синхронизация

Одна возможная реализация хаотической силы уже обсуждалась выше в главе 14 при рассмотрении однонаправленной связи. Перепишем систему с оператором связи (14.3) в виде

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad (15.7)$$

$$y(t+1) = (1-\varepsilon)f(y(t)) + \varepsilon f(x(t)). \quad (15.8)$$

Хаотическая сила, генерируемая отображением (15.7), действует на систему (15.8) так, что возможна полная синхронизация $x = y$.

Устойчивость синхронного режима может быть исследована на базе теории, развитой в главах 13 и 14. При экспериментальной реализации не обязательно создавать две идентичные системы: достаточно записать сигнал, генерируемый одной системой, и использовать его как силу (см. [Tsukamoto *et al.* 1996, 1997]). Синхронизацию легко идентифицировать по совпадению генерируемого процесса с внешней силой.

15.3.2 Обобщенная синхронизация

Полная синхронизация при хаотическом воздействии возможна только в системах, обладающих определенной симметрией, так что возможно равенство переменных в вынуждающей и в вынуждаемой системах. Если такая симметрия отсутствует, то вынуждаемая система все же может следовать за силой, но в более слабом смысле. Рассмотрим общий случай однонаправленной связи:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (15.9)$$

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)), \quad (15.10)$$

где \mathbf{x} и \mathbf{y} вектора. Переменные \mathbf{x} описывают вынуждающую систему, а переменные \mathbf{y} – вынуждаемую. Мы не предполагаем никакой симметрии между \mathbf{x} и \mathbf{y} , более того, размерности этих векторов могут быть различны. Режим, в котором состояние вынуждаемой системы \mathbf{y} полностью определяется состоянием вынуждающей системы, называют **обобщенной синхронизацией**. На математическом языке предполагается существование однозначного отображения из \mathbf{x} в \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{x}). \quad (15.11)$$

Технически иногда более удобно установить отображение между $\mathbf{y}(t+1)$ и $\mathbf{x}(t)$, записывая $\mathbf{y}(t+1) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}(t))$ (см., например, рис. 15.5 ниже), потому что эти переменные непосредственно связаны через (15.10). Если отображение (15.9) обратимо, такая запись эквивалентна определению (15.11).

Другой способ описать обобщенную синхронизацию состоит в копировании вынуждаемой системы. В этом случае мы дополняем уравнения (15.9) и (15.10) до системы

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$\mathbf{y}'(t+1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}').$$

Подобная система может рассматриваться в контексте синхронизации системы и копии (раздел 14.4): при устойчивом отклике наблюдается симметричное решение $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$.

Негладкая обобщенная синхронизация

Уравнения (15.10) описывают динамику вынуждаемой системы; ясно, что состояние \mathbf{y} следует за силой \mathbf{x} независимо от начальных условий $\mathbf{y}(0)$ только, если динамика \mathbf{y} устойчива, т.е. максимальный ляпуновский показатель в подсистеме \mathbf{y} отрицателен. Это условие необходимо, но не достаточно. Действительно, может наблюдаться мультистабильность по \mathbf{y} , т.е. одной траектории $\mathbf{x}(t)$ может соответствовать два (или больше) устойчивых отклика $\mathbf{y}(t)$. Другая особенность состоит в том, что устойчивость по \mathbf{y} может обеспечить существование функции \mathbf{H} , но не ее гладкость. Как мы увидим, функция \mathbf{H} может быть фрактальной.

Продемонстрируем это на примере одномерной³ вынуждаемой системы с отрицательным ляпуновским показателем λ_y . Сравним, следуя Паоли и др. [Paoli *et al.* 1989b], ляпуновские размерности⁴ аттрактора в вынуждающей и полной (т.е. вынуждаемой плюс вынуждающей) системах; мы обозначим их соответственно $D_x^{(L)}$ и $D_{xy}^{(L)}$. При гладком взаимоотношении между y и x размерность полной системы должна быть такая же, как в вынуждающей; если $D_{xy}^{(L)} > D_x^{(L)}$, то взаимоотношение негладкое. Поскольку связь однонаправленная, ляпуновские показатели λ_j вынуждающей системы не зависят от вынужденных колебаний, поэтому D_{xy} не может быть меньше, чем D_x . Ляпуновская размерность задается формулой Каплана-Йорке [Kaplan and Yorke 1979]:

$$D_x^{(L)} = \mathcal{D} + \frac{1}{|\lambda_{\mathcal{D}+1}|} \sum_{j=1}^{\mathcal{D}} \lambda_j, \quad (15.12)$$

где ляпуновские показатели отсортированы в убывающем порядке, и целая часть \mathcal{D} размерности определяется как наибольшее целое число, такое, что

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{D}} \lambda_j > 0.$$

³ Легко видеть, что точно так же исследуется и вынуждаемая система произвольной размерности.

⁴ Обсуждение ляпуновских размерностей можно найти, например, в книгах [Шустер 1988; Ott 1992; Кузнецов 2001].

В полной системе размерность определяется показателями λ_j и λ_y . Поскольку только первые $\mathcal{D}+1$ ляпуновские показатели фигурируют в (15.12), то, если $\lambda_y < \lambda_{\mathcal{D}+1}$, то $D_{xy}^{(L)} = D_x^{(L)}$. Пусть теперь $\lambda_{\mathcal{D}} > \lambda_y > \lambda_{\mathcal{D}+1}$. Тогда

$$D_{xy}^{(L)} = \mathcal{D} + \frac{1}{|\lambda_y|} \sum_{j=1}^{\mathcal{D}} \lambda_j > D_x^{(L)}.$$

Размерность возрастает еще больше, если $\lambda_{\mathcal{D}} < \lambda_y$. Это увеличение размерности при воздействии одной системы на другую означает, что отклик \mathbf{y} – не гладкая функция от \mathbf{x} , иначе размерность не возростала бы. Таким образом, обобщенная синхронизация с гладким соотношением (15.11) может наблюдаться только при достаточно сильной устойчивости вынужденных движений.

Из сказанного выше следует, в частности, что, если вынуждающая хаотическая система есть одномерное отображение (например, логистическое или типа тент), то функция \mathbf{H} всегда фрактальна. Действительно, одномерное отображение можно рассматривать как предельный случай двумерного отображения, отрицательный ляпуновский показатель которого стремится к $-\infty$. Поэтому такое отображение имеет ляпуновские показатели $\lambda_1, -\infty$. Формула Каплана–Йорке для полной системы дает $D_{xy}^{(L)} = \min(2, 1 + \lambda_1/|\lambda_y|)$, где λ_y – максимальный показатель вынужденных движений; эта размерность больше единицы. Следовательно, чтобы наблюдать нетривиальный переход от гладких к негладким функциям \mathbf{H} , нужно иметь как минимум двумерное вынуждающее хаотическое отображение.

Пример гладкой и негладкой обобщенной синхронизации

Функция \mathbf{H} может быть фрактальна даже в таком простом случае, когда подсистема (15.10) линейна:

$$y(t+1) = \gamma y(t) + q(\mathbf{x}(t)). \quad (15.13)$$

Отклик устойчив (т.е. выполняется условие (15.11)), если $\lambda_y = \ln |\gamma| < 0$; для определенности будем считать, что $\gamma > 0$.

Детальный анализ этой задачи при обобщенном преобразовании пекаря (см. (15.16) ниже) в качестве вынуждающей силы и при линейном отображении (15.13) в качестве отклика был выполнен Paoli *et al.* [1989a]. В этой работе был найден спектр особенностей отклика (т.н. $f(\alpha)$ -спектр) и описано его изменение при вариации коэффициента затухания γ вынужденных движений. $f(\alpha)$ -спектр

есть преобразование Лежандра от обобщенных размерностей (детали можно найти в [Badii and Politi 1997]). Из результатов Паоли и др. следует, что при малых γ размерности не меняются. С ростом γ , при превышении им наименьшего коэффициента сжатия преобразования пекаря, некоторые обобщенные размерности отклика начинают отличаться от размерностей вынуждающей системы. Это указывает на негладкость функции H . При больших γ отличаются уже все размерности.

Ниже мы изложим упрощенный вариант теории [Paoli *et al.* 1989a], следуя работе [Hunt *et al.* 1997]. Начнем с итерации уравнения (15.13)

$$\begin{aligned} y(t+1) &= q(\mathbf{x}(t)) + \gamma y(t) \\ &= q[\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}(t+1))] + \gamma\{\gamma y(t-1) + q[\mathbf{f}^{-2}(\mathbf{x}(t+1))]\} = \dots, \end{aligned}$$

дающей формальное выражение функции H , связывающей $y(t+1)$ и $\mathbf{x}(t+1)$:

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{j-1} q(\mathbf{f}^{-j}(\mathbf{x})). \quad (15.14)$$

Ясно, что эта функция существует, если $\gamma < 1$ и сила q ограничена. Для проверки гладкости продифференцируем (15.14) и получим

$$\nabla H = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{j-1} J[\mathbf{f}^{-j}(\mathbf{x})] \nabla q(\mathbf{f}^{-j}(\mathbf{x})), \quad (15.15)$$

где J – якобиан. Достаточное условие существования производной в точке \mathbf{x} – это сходимость ряда (15.15), что выполняется если значения $\gamma^j \|\mathbf{J}\mathbf{f}^{-j}(\mathbf{x})\|$ убывают в геометрической прогрессии. Наиболее опасны для сходимости большие значения якобиана $\|\mathbf{J}\mathbf{f}^{-j}(\mathbf{x})\|$, которые вычисляются по *обратным* итерациям отображения (15.9). Это соответствует малым значениям производной, вычисленной при итерациях *вперед* по времени, т.е. по наиболее устойчивому направлению отображения (15.9). Снова мы видим, что гладкость функции H определяется соотношением между ляпуновским показателем вынужденных движений $\lambda_y = \ln \gamma$ и максимальным по модулю из отрицательных показателей вынуждающей системы (15.9).

Предположим, что вынуждающее отображение (15.9) двумерно и имеет один положительный и один отрицательный ляпуновский показатель; последний мы обозначим λ_x . Тогда из (15.15) следует, что функция H непрерывна «в среднем» (т.е., что производная существует почти во всех точках), если

$$\lambda_y - \lambda_x < 0,$$

т.е., если средняя степень сжатия вынужденных движений больше, чем средняя степень сжатия в вынуждающей системе. Нетрудно видеть, что это как раз условие неувеличения ляпуновской размерности согласно (15.12).

Для более детального анализа удобно определить зависящий от (\mathbf{x}, y) ляпуновский показатель, по аналогии с использованным в главе 13 подходом, основанном на термодинамическом формализме. Определим так называемый ляпуновский показатель по предыстории: для вынуждающей системы запишем

$$\|J\mathbf{f}^{-T}(\mathbf{x})\| \propto e^{-T\Lambda_x(\mathbf{x})},$$

а для вынужденных движений –

$$\frac{dy(t)}{dy(t-T)} \propto e^{T\Lambda_y(\mathbf{x}, y)}$$

(в частном случае (15.13), $\Lambda_y = \ln \gamma$, но в общей ситуации показатель зависит от координат). Тогда функция H дифференцируема в точке (\mathbf{x}, y) , если

$$\Lambda_y(\mathbf{x}, y) - \Lambda_x(\mathbf{x}) < 0.$$

Если отрицательный ляпуновский показатель $\Lambda_x(\mathbf{x})$ отображения (15.9) меняется от точки к точке, то функция H может быть дифференцируемой в некоторых точках и фрактальной в других.

Переход от гладкой к негладкой обобщенной синхронизации проиллюстрирован на рис. 15.5. Здесь вынуждающей системой служит двумерное обобщенное преобразование пекаря, определенное на единичном интервале $0 \leq x_1, x_2 < 1$,

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \beta x_1(t) \\ x_2(t)/\alpha \end{bmatrix} & \text{если } x_2(t) < \alpha, \\ \begin{bmatrix} \beta + (1-\beta)x_1(t) \\ (x_2(t) - \alpha)/(1-\alpha) \end{bmatrix} & \text{если } x_2(t) > \alpha. \end{cases} \quad (15.16)$$

Оба параметра α и β не превышают $1/2$. Вынуждаемая система линейна:

$$y(t+1) = \gamma y(t) + \cos(2\pi x_1(t)). \quad (15.17)$$

Легко видеть, что неустойчивое направление в вынуждающей системе есть x_2 , а устойчивое направление – x_1 . Естественная мера равномерна по направлению x_2 и сложным образом меняется по x_1 ,

если только $\alpha \neq \beta$. Чтобы вычислить ляпуновский показатель по предыстории в данной точке x_1, x_2 , нужно определить прообразы x_1, x_2 . Обозначая

$$a_- = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_-}{T}, \quad a_+ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_+}{T},$$

где T_- (T_+) – число прообразов с $x_2 < \alpha$ ($x_2 > \alpha$), получим для показателя по предыстории

$$\Lambda(x_1, x_2) = a_- \ln \beta + a_+ \ln(1 - \beta).$$

Значения a_{\pm} различны для разных траекторий; их можно определить, используя метод символической динамики. Естественное символическое описание состоит в присвоении двух символов областям

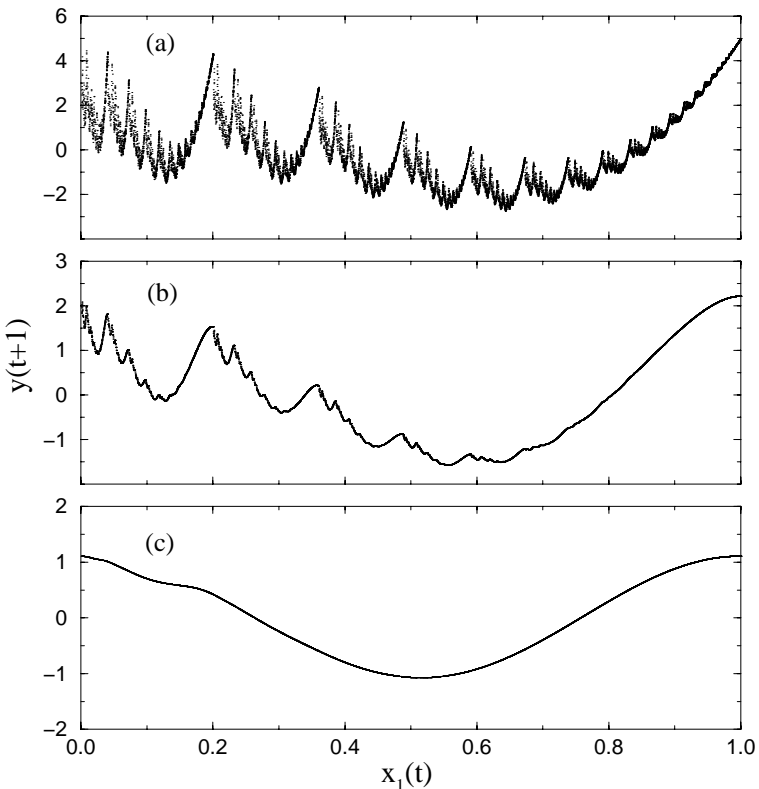


Рис. 15.5. Три типа обобщенной синхронизации в системе (15.16) и (15.17), при $\alpha = 0.1$ и $\beta = 0.2$. (а) $\gamma = 0.8$; кривая \dot{H} фрактальна. (б) $\gamma = 0.6$; кривая не дифференцируема в плотном множестве точек, но дифференцируема «в среднем». (с) $\gamma = 0.1$; гладкая кривая.

$x < \alpha$ и $x > \alpha$, при этом разрешены все возможные последовательности этих символов, поэтому существуют траектории со всеми возможными значениями $0 \leq a_{\pm} \leq 1$. Это означает, что

$$\ln \beta \leq \Lambda(x_1, x_2) \leq \ln(1 - \beta).$$

Так как наиболее вероятные значения a_{\pm} есть $a_- = \alpha$, $a_+ = 1 - \alpha$, то средний отрицательный ляпуновский показатель отображения равен

$$\lambda_x = \alpha \ln \beta + (1 - \alpha) \ln(1 - \beta).$$

Ляпуновский показатель вынужденных движений постоянен ($\lambda_y = \ln \gamma$). Таким образом, согласно формуле Каплана–Йорке, ляпуновская размерность всей системы больше, чем вынуждающей, если $|\lambda_x| > |\ln \gamma|$. Однако даже при выполнении этого неравенства в области

$$|\lambda_x| < |\ln \gamma| < |\ln \beta|,$$

существуют точки x_1, x_2 , для которых ляпуновский показатель по предыстории Λ больше, чем $\ln \gamma$. В этих точках (они всюду плотны, хотя их мера равна нулю) функция H не дифференцируема. Различные случаи обобщенной синхронизации в системе (15.16) и (15.17) показаны на рис. 15.5.

15.3.3 Обобщенная синхронизация квазипериодической силой

Интересно отметить, что переход от гладкой к негладкой обобщенной синхронизации возможен не только при хаотической внешней силе, но и при квазипериодической. В последнем случае вынуждающей динамике соответствует тор в фазовом пространстве. Если вынужденные движения тоже квазипериодические, то и в полном фазовом пространстве траектория лежит на торе. Но есть и другая возможность – когда вынужденные движения, хотя и являются устойчивыми, принадлежат *странному нехаотическому аттрактору*. У странного нехаотического аттрактора максимальный ляпуновский показатель отрицателен (поэтому он нехаотический), но в фазовом пространстве он образует фрактал (отсюда – странный). Аналогично случаю негладкой обобщенной синхронизации хаоса, соотношение между вынуждающей и вынуждаемой системами для странного нехаотического аттрактора весьма нетривиально: функциональное соотношение между квазипериодической силой и вынужденным движением либо задается фрактальной кривой, либо вообще не существует.

Для иллюстрации странного нехаотического аттрактора мы выбрали логистическое отображение с квазипериодической силой

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) + \omega, \\y(t+1) &= a - y^2(t) + b \cos 2\pi x(t).\end{aligned}\quad (15.18)$$

Здесь $\omega = (\sqrt{5}-1)/2$ есть иррациональная частота внешней силы. На рис. 15.6 показаны случаи с гладким и с фрактальным соотношением между y и x . В обоих случаях ляпуновский показатель вынужденных движений отрицателен, так что режим на рис. 15.6b – нехаотический.

15.4 Библиографические заметки

Численному исследованию различных хаотических систем с внешней силой посвящены работы [Aizawa and Uezu 1982; Анищенко и Астахов 1983; Кузнецов и др. 1985; Безаева и др. 1987; Ланда и Перминов 1987; Ланда и др. 1989; Dykman *et al.* 1991; Rosenblum 1993; Franz and Zhang 1995; Tamura *et al.* 1999]. Экспериментальное исследование соответствующих режимов в лампе обратной волны выполнено Безручко [1980] и Безручко и др. [1981].

Синхронизация идентичных нелинейных систем общим шумом описана в [Pikovsky 1984b; Пиковский 1984a; Pikovsky 1992; Yu *et al.* 1990]. Наше изложение следует работам [Pikovsky 1984b; Пиковский 1984a]. Зависимость максимального ляпуновского показателя от шума в хаотических системах исследовалась в [Matsumoto and Tsuda

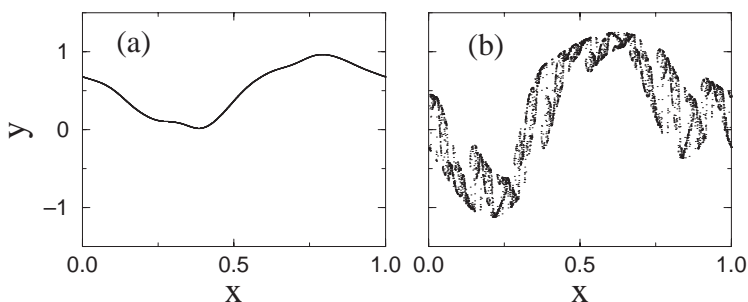


Рис. 15.6. Аттракторы в логистическом отображении с квазипериодической силой (15.18). (a) При $\varepsilon = 0.3$ и $a = 0.9$ вынужденное движение y есть гладкая функция от x , поэтому можно говорить о гладкой обобщенной синхронизации между x и y . (b) При $\varepsilon = 0.45$ и $a = 0.8$ наблюдается фрактальный странный нехаотический аттрактор: хотя вынужденные движения следуют за силой, соотношение между переменными y и x негладкое.

1983]. Примеры хаотических систем под действием общего шума можно найти в [Maritan and Banavar 1994; Khoury *et al.* 1996, 1998; Ali 1997; Longa *et al.* 1997; Sánchez *et al.* 1997; Minai and Anand 1998, 1999a; Shuai and Wong 1998]. В частности, в работах [Maritan and Banavar 1994; Shuai and Wong 1998] из-за конечной точности вычислений наблюдалась «ложная» синхронизация, обсуждение этого артефакта можно найти в [Pikovsky 1994; Herzel and Freund 1995]. Эксперименты с действием шума на электронные устройства описаны в [Khoury *et al.* 1998].

Однонаправленная связь хаотических систем изучалась теоретически и численно в [Pecora and Carroll 1991; Rulkov *et al.* 1995; Abarbanel *et al.* 1996; Kapitaniak *et al.* 1996; Kocarev and Parlitz 1996; Konnur 1996; Pyragas 1996, 1997; Rulkov and Suschik 1996; Ali and Fang 1997; Brown and Rulkov 1997a,b; Hunt *et al.* 1997; Liu and Chen 1997; Parlitz *et al.* 1997; Carroll and Johnson 1998; Johnson *et al.* 1998; Baker *et al.* 1999; Liu *et al.* 1999; Minai and Anand 1999b; Parlitz and Kocarev 1999; Santoboni *et al.* 1999]. В нашем изложении гладкой и негладкой обобщенной синхронизации мы следуем работам [Paoli *et al.* 1989a; Hunt *et al.* 1997] и [Stark 1997], см. также статьи [Kaplan *et al.* 1984; Badii *et al.* 1988; Mitschke *et al.* 1988; Paoli *et al.* 1989b; Mitschke 1990; Pecora and Carroll 1996], где рассматривался отклик линейных систем на хаотическую силу, а также [de Sousa Vieira and Lichtenberg 1997]. Экспериментальные наблюдения обобщенной синхронизации можно найти в [Peterman *et al.* 1995; Abarbanel *et al.* 1996; Gauthier and Bienfang 1996; Rulkov and Suschik 1996; Tsukamoto *et al.* 1997; Tang *et al.* 1998b]. В статьях [Peng *et al.* 1996] и [Tamasevicius and Čenys 1997] обсуждается возможность синхронизации гиперхаоса одним скалярным сигналом.

Странные нехаотические аттракторы в системах с квазипериодической силой были введены в [Grebogi *et al.* 1984] и с тех пор исследовались теоретически [Romeiras *et al.* 1987; Ding *et al.* 1989; Brindley and Kapitaniak 1991; Heagy and Hammel 1994; Pikovsky and Feudel 1994, 1995; Kuznetsov *et al.* 1995; Keller 1996; Lai 1996b; Nishikawa and Kaneko 1996; Yalcinkaya and Lai 1997; Prasad *et al.* 1998 и ссылки в них же] и экспериментально [Ditto *et al.* 1990; Zhou *et al.* 1992; Yang and Bilimgut 1997; Zhu and Liu 1997].

Приложение П1

Открытие синхронизации Христиааном Гюйгенсом

В этом приложении мы приводим перевод оригинальных текстов Христиаана Гюйгенса [Huygens 1967a,b], где он описывает открытие синхронизации.

П1.1 Письмо Христиаана Гюйгенса его отцу, Константину Гюйгенсу¹

26 Февраля 1665.

Мой Отец,

...

В то время, как я был вынужден оставаться в постели в течение нескольких дней и наблюдал за двумя часами в моей мастерской, я заметил удивительный эффект, о котором ранее никто даже и не думал. Двое часов, висящих на стене друг рядом с другом на расстоянии одного или двух футов, поддерживали согласованность хода с такой высокой точностью, что их маятники всегда качались вместе, без отклонений. Наблюдая это с восхищением в течение некоторого времени, я, наконец, пришел к выводу, что это происходит вследствие некоторой симпатии: когда я придавал маятникам разный ход, то я обнаружил, что через полчаса они всегда возвращаются

¹ Перевод с французского на английский Карстена Хенкеля.

к синхронизму, и поддерживают его до тех пор, пока я не нарушу их ход. После этого я поместил их на большем расстоянии друг от друга, одни в одной стороне комнаты, а другие на 15 футов в стороне. Через день я увидел, что разница в их показаниях составила 5 секунд, и, следовательно, наблюдаемая ранее согласованность была следствием некоторой симпатии, которая, по моему мнению, не может быть вызвана ничем иным, кроме как незаметным движением воздуха, вызванным движением маятников. Часы помещены в закрытый корпус, который вместе со свинцовыми грузами весит чуть менее ста фунтов. Колебания маятников, достигших синхронизма, не таковы, что они двигаются параллельно друг другу, а, наоборот, они приближаются и удаляются противоположным образом. Когда я снова поместил часы ближе друг к другу, я увидел, что маятники вновь стали двигаться таким образом. Далее я взял квадратный стол толщиной один дюйм и поместил его между двумя часами, так что внизу он касался пола и был достаточно высок, чтобы полностью закрыть часы и тем самым отделить их друг от друга. Несмотря на это, синхронизм сохранялся и далее, в течение нескольких дней и ночей; даже когда я его нарушил, то он вскоре восстановился. Сейчас я планирую достичь согласования часов, когда они далеко друг от друга и определить расстояние, на которое распространяется упомянутая симпатия. Основываясь на том, что я уже видел, я полагаю, что оно будет между пятью и шестью футами. Но чтобы получить большую уверенность в этих вопросах Вам придется подождать, пока я глубже их изучу и выявлю причину. Тем не менее, мы обнаружили, что двое часов находятся в полном согласовании, что кажется абсолютно невероятным, и тем не менее абсолютно истинно. Ранее никакие часы не были способны на такую согласованность, как эти вновь изобретенные часы, из чего можно увидеть, насколько они точны, если нечто столь малое способно их согласовать.

П1.2 Морские часы (симпатия часов). Часть V²

22 Февраля 1665.

В течение четырех или пяти дней я заметил удивительное согласование между двумя новыми часовыми механизмами, содержащими малые цепи (рис. П1.1), так что одни часы даже в малейшей степени

² Перевод с латыни на английский Доротеи Прелл.

не опережали другие. Но качания обоих маятников оставались строго противоположными. Следовательно, так как расстояние между часами было небольшим, я начал подозревать существование некоей симпатии, как если бы одни часы были подвержены влиянию других. Чтобы изучить это экспериментально, я изменил движение одного из маятников, так что они не двигались более вместе в одно и то же время, но через четверть или половину часа я нашел их вновь согласованными.

Каждые часы свисали с собственной балки, толщиной примерно в 3 дюйма, концы которой опирались на два стула. Балки были всё время рядом; часы *B* были расположены не непосредственно сбоку от часов *A*, а немного впереди. *B* были также несколько короче, чем *A* и не имели груза в нижней части, каковой в часах *A* обозначен как *D*. Оба часовых механизма висели рядом, с грузами около 80 или 90 фунтов, укрепленными в их нижней части для поддержания равновесия, и со слегка большим грузом у *A* из-за груза *D*. Длина маятников была 7 дюймов. Их качания были таковы, что они всегда приближались и удалялись друг от друга одновременно; вынужденные к другому движению, они не оставались в таком состоянии, а автоматически возвращались [к синхронному] и оставались так без изменения.

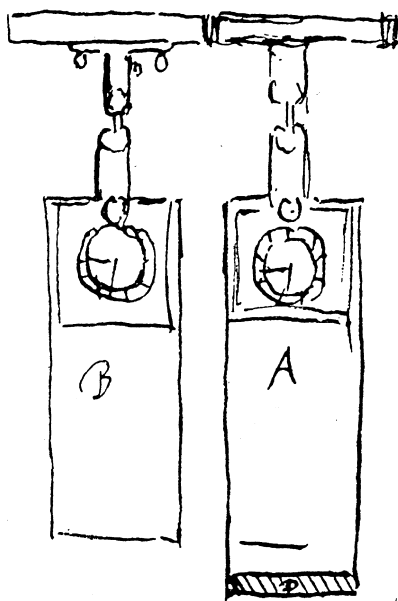


Рис. П1.1.

22 февраля я повернул часы так, что их циферблаты смотрели друг на друга; в этом положении согласованность не была длительной: часы *A* имели некоторое опережение до тех пор пока я не вернул их в предыдущее положение. Вечером я отодвинул *B* на 4 фута от *A* таким образом, что боковая сторона часов *B* была напротив циферблата часов *A*. Утром, точнее через $10\frac{1}{2}$ часа, я увидел, что *A* опережали *B*, но всего лишь на 2 секунды.

23 февраля. Я слегка ускорил маятник часов *B*. Я увидел, немного позднее, что маятники вернулись к согласованному движению, хотя при этом их ход был не одинаков, а со смешанными биениями, и в таком состоянии они оставались весь день. Тем не менее, около 9 вечера *B* в конце концов оказались впереди на половину колебания. Возможно, что холодный вечерний воздух нарушил согласованность, так как не удивительно, что на таком расстоянии согласованность может быть нарушена малейшим возмущением. Боковая сторона часов *B* была напротив лицевой стороны часов *A*.

В половину одиннадцатого вечера 23 февраля я поместил оба часовых механизма на старое место. Они немедленно восстановили согласованный ход, как много раз наблюдалось ранее, с движениями в противоположном направлении.

24 февраля. В 9 часов утра они кажутся идеально согласованными.

24 февраля. Я слегка повернул циферблат часов *A* к боковой части *B*. При этом согласование не сохранилось, а *B* были впереди, и так продолжалось, пока я не поместил их, как ранее.

Далее я раздвинул часы на расстояние шести с половиной футов в то время как ранее они были лишь на 2 дюйма друг от друга. В течение часа или двух они оставались со смешанными движениями, но после этого вернулись к согласованному ходу, как это было при меньшем расстоянии. В 3 часа после полудня я поместил между часовыми механизмами прямоугольную доску длиной 2 фута, что должно было остановить движение воздуха, по крайней мере в нижней части. В верхней части часы выступали примерно на полфута, но здесь движение (воздуха), если и есть, то минимальное. Тем не менее, часы продолжали быть в согласовании, как и ранее.

25 февраля. Хотя предыдущим вечером я и поместил другую планку, 3 фута длиной и примерно один дюйм толщиной, между ними, полностью скрыв одни часы от других, тем не менее этим утром я обнаружил, что они двигались в согласовании в течение всей ночи. Они оставались в таком состоянии до 6 часов вечера, когда часы *B* остановились из-за поломки в большей цепи. После того, как это препятствие было устранено, они после получасовой задержки вновь

вернулись к согласованному ходу, и оставались в этом состоянии до 11 часов, когда я начал новое испытание, раздвинув их более чем на 12 футов.

26 февраля. В половине девятого утра я обнаружил, что часы *B* ушли на 5 секунд вперед, и тем самым было установлено, как далеко распространяется симпатия (по-видимому, путем коммуникации через движение воздуха).

27 февраля. Я уменьшил скорость часов *B*, так чтобы они двигались в лучшем согласовании между собой на том же расстоянии в 12 футов, но я не был свободен, чтобы заниматься этим дальше. В 9 часов вечера я подстроил их более точно.

28 февраля. В 9 часов утра я обнаружил, что часы *A* ушли вперед менее чем на 1 секунду; они шли со смешанными биениями, и они оставались в таком состоянии до шести вечера. В половине седьмого они двигались одновременно, причем часы *B* были впереди на эту половину колебания. Я сомневаюсь, что такое согласование могло продолжаться 9 часов без помощи симпатии, но она не могла противостоять вечернему изменению воздуха (который был значительно более теплым, так как холод прекратился после того, как он был с нами в течение трех дней). Так как изначально были впереди часы *A*, а впоследствии *B*, то они не могли быть с большей точностью подстроены друг к другу.

1 марта. В 10 часов утра *A* были на три секунды впереди.

Оба часовых механизма имели в качестве опоры два стула (см. рис. 1.2 в разделе 1.1), чье малейшее и абсолютно невидимое движение, вызванное маятником, было причиной предсказанной симпатии, и заставляло маятники постоянно двигаться с противоположными отклонениями. Каждый маятник тянет собой основание с наиболь-

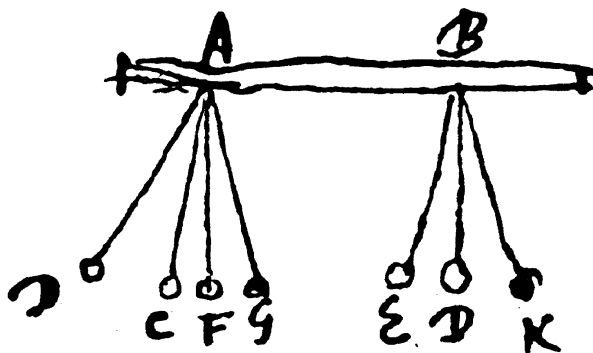


Рис. П1.2.

шей силой в момент, когда он проходит через нижнее положение. Таким образом, если маятник B находится в положении BD (рис. П1.2), в то время как A – только в AC , и B движется налево, а A направо, то точка подвеса A сдвигается влево, при этом вибрация маятника A ускоряется. Когда B опять проходит через BE и A находится в положении AF , подвес B сдвигается вправо, и, следовательно, вибрация маятника B замедляется. B опять проходит через положение BD , когда A находится в AG , при этом подвес A утягивается вправо, и, следовательно, вибрация маятника A ускоряется. B опять в BK , когда A возвращается в положение AF , при этом подвес B утягивается влево и, следовательно, вибрация маятника B замедляется. Итак, когда вибрация маятника B постоянно замедляется, а A ускоряется, необходимым образом некоторое короткое время они должны двигаться с противоположными отклонениями: в одно и то же время A движется направо, а B – налево, и наоборот. В этот момент они не могут выйти из согласованности, потому что по этим же причинам они немедленно будут возвращены обратно тем же образом. Подвесы, естественно, являются неподвижными, но, если согласованность хотя бы слегка нарушается, то она будет восстановлена за счет малейших движений подвесов. Эти движения, конечно, не могут быть наблюдаемы и поэтому неудивительно, что это явилось причиной ошибки [в толковании].

Приложение П2

Мгновенные фаза и частота сигнала

П2.1 Аналитический сигнал и преобразование Гильберта

Непротиворечивый способ определения фазы *произвольного сигнала* известен в теории обработки данных как метод аналитического сигнала [Panter 1965; Рабинер и Голд 1975; Вайнштейн и Вакман 1983; Woashash 1992; Smith and Mersereau 1992]. Этот общий подход, предложенный Габором [Gabor 1946] и основанный на *преобразовании Гильберта* (ПГ), позволяет однозначно получить *мгновенные фазу и амплитуду* сигнала $s(t)$ путем конструирования *аналитического сигнала* $\zeta(t)$, который является комплексной функцией времени

$$\zeta(t) = s(t) + is_H(t) = A(t)e^{i\phi(t)}, \quad (\text{П2.1})$$

где функция $s_H(t)$ есть ПГ от $s(t)$

$$s_H(t) = \pi^{-1} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (\text{П2.2})$$

и P.V. означает, что интеграл берется в смысле главного значения Коши. Таким образом, мгновенные амплитуда $A(t)$ и фаза $\phi(t)$ сигнала $s(t)$ однозначно определяются из (П2.1). Подчеркнем, что ПГ не содержит параметров. Заметим также, что вычисление мгновенных характеристик сигнала требует его знания на всем интервале времени, т.е. ПГ нелокально во времени. Тем не менее, основной вклад

в интеграл (П2.2) вносит непосредственная окрестность выбранного момента времени.

Как можно видеть из (П2.2), ПГ является сверткой функций $s(t)$ и $1/\pi t$. По свойствам свертки, преобразование Фурье $S_H(\zeta)$ от $s_H(t)$ является произведением преобразований Фурье от $s(t)$ и $1/\pi t$. Для физически значимых частотных компонент $\zeta > 0$ имеем $S_H(\zeta) = -iS(\zeta)$. Это означает, что ПГ может быть реализовано идеальным фильтром с единичной амплитудной характеристикой, вносящим постоянную фазовую задержку $\pi/2$ для всех частотных компонент.

Гармоническое колебание $s(t) = A \cos \omega t$ часто представляют в комплексном виде как $A \cos \omega t + iA \sin \omega t$. Это означает, что действительное колебание дополняют мнимой частью, которая отстает по фазе на $\pi/2$, т.е. связана с $s(t)$ преобразованием Гильберта. Аналитический сигнал есть естественное расширение такого представления, т.к. ПГ осуществляет сдвиг фазы $-\pi/2$ для каждой спектральной компоненты $s(t)$.

Хотя формально $A(t)$ и $\phi(t)$ могут быть вычислены для произвольного $s(t)$, они имеют четкий физический смысл только для узкополосных сигналов $s(t)$ (см. подробное обсуждение в [Boashash 1992]). В этом случае амплитуда $A(t)$ совпадает с огибающей $s(t)$ и *мгновенная частота* $d\phi/dt$ соответствует частоте максимума спектра мощности, вычисленного в скользящем временном окне.

П2.2 Примеры

Проиллюстрируем свойства преобразования Гильберта следующими примерами.

Затухающие колебания

Промоделируем измеряемый сигнал свободными колебаниями линейного осциллятора,

$$\ddot{x} + 0.05\dot{x} + x = 0, \quad (\text{П2.3})$$

и нелинейного осциллятора Дуффинга,

$$\ddot{x} + 0.05\dot{x} + x + x^3 = 0. \quad (\text{П2.4})$$

Вычислим по $x(t)$ мгновенные амплитуды $A(t)$ и частоту $d\phi/dt$ (рис. П2.1). Амплитуды, показанные жирными линиями, действительно являются огибающими затухающих процессов. Частота линейного осциллятора постоянна, в то время как частота осцилля-

тора Дуффинга зависит от амплитуды, как и следовало ожидать. Заметим, что хотя всего лишь около 20 периодов колебаний было использовано для этих вычислений, нелинейные свойства системы удалось выявить благодаря тому, что частота и амплитуда оцениваются не в среднем, а в каждой точке временного ряда. Такой метод используется в инженерном деле для идентификации свойств упругости и затухания механических систем [Feldman 1994]. Этот пример иллюстрирует важное свойство ПГ: оно может быть применено к *нестационарным сигналам*.

Периодический сигнал

В качестве следующего примера возьмем решение уравнения Ван-дер-Поля (ср. с (7.2))

$$\ddot{x} - (1 - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (\text{П2.5})$$

Для данных значений параметров форма колебаний существенно отличается от синусоидальной (рис. П2.2а), а фазовый портрет системы (П2.5) – от окружности. Соответственно, мгновенная амплитуда $A(T)$ не является константой, а осциллирует (рис. П2.2а) с частотой $2\omega = 2 \cdot 2\pi/T$, где T период колебаний. Рост мгновенной фазы не является строго линейным; действительно, $\phi(t) - \omega t$ колеблется с

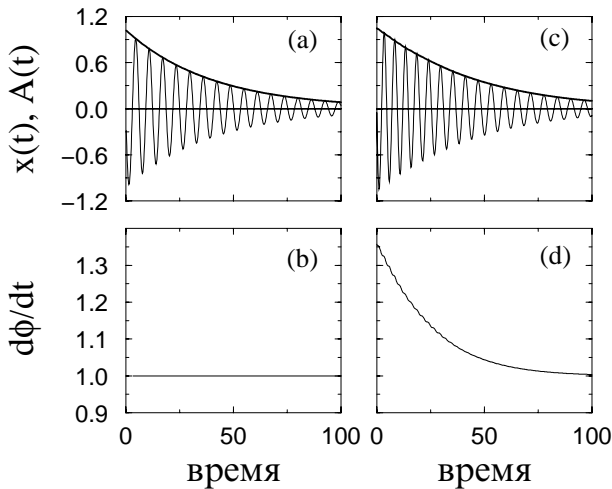


Рис. П2.1. Свободные колебания $x(t)$ линейного осциллятора (а) и нелинейного осциллятора Дуффинга (с). Мгновенные амплитуды $A(t)$, вычисленные с помощью преобразования Гильберта, показаны жирными линиями. Соответствующие мгновенные частоты $d\phi/dt$ показаны в (b) и (d). Из [Rosenblum and Kurths 1998], рис. 1, Copyright Springer-Verlag.

частотой 2ω (рис. П2.2b,c). Напомним, что метод аналитического сигнала дает лишь оценку истинной фазы (см. главу 7), которая должна возрастать линейно во времени.

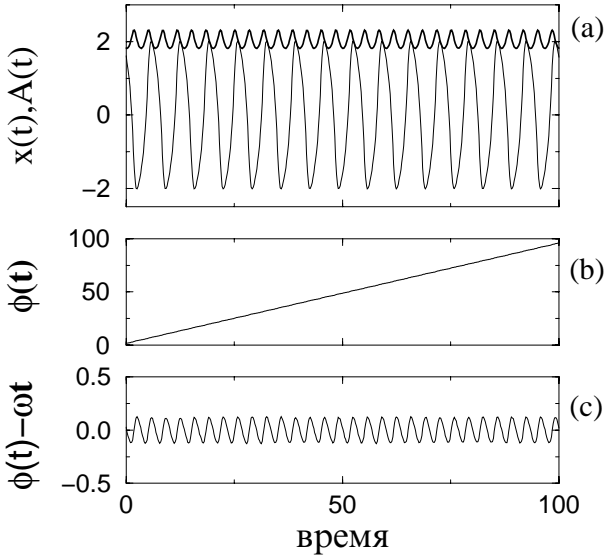


Рис. П2.2. Решение $x(t)$ уравнения Ван-дер-Поля и мгновенная амплитуда $A(t)$ (жирная линия) (а). Мгновенная фаза ϕ растет практически линейно (b); тем не менее, малые колебания видны при большом увеличении (c); здесь ω – это средняя частота.

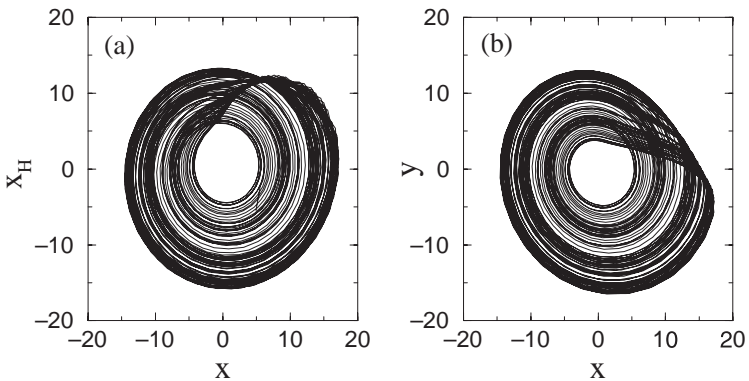


Рис. П2.3. Фазовый портрет системы Рёсслера в координатах (x, x_H) (a) и исходных координатах (x, y) (b).

Хаотический сигнал

С точки зрения теории анализа временных рядов (см., например, [Kantz and Schreiber 1997]) ПГ можно рассматривать как двумерную реконструкцию сигнала в координатах (s, s_H) . Выберем в качестве наблюдаемой x -компоненту системы Рёсслера (10.2). Фазовый портрет этой системы в координатах (x, x_H) показан на рис. П2.3а; можно видеть, что он очень близок к «истинному» портрету системы Рёсслера в координатах (x, y) (рис. П2.3б).¹ Мгновенные амплитуда и фаза показаны на рис. П2.4. Хотя фаза ϕ растет практически линейно, заметны малые нерегулярные флуктуации этого роста. Это согласуется с тем известным фактом, что, хотя колебания системы Рёсслера хаотические, спектр мощности от $x(t)$ содержит очень острый пик.

Электрокардиограмма человека

Как пример сложного сигнала возьмем запись ЭКГ человека (рис. П2.5). Мы видим, что точка в плоскости (s, s_H) делает два оборота, соответствующие так называемым R- и T-зубцам (малые

¹ Отметим, что ПГ дает оптимальную в некотором смысле реконструкцию. Действительно, если фазовый портрет системы реконструируется методом Такенса [Takens 1981] по сигналу с периодом T , то временная задержка $T/4$ обеспечивает то, что аттрактор не вытянут вдоль диагонали. Применение ПГ эквивалентно выбору такой оптимальной задержки для каждой компоненты сигнала.

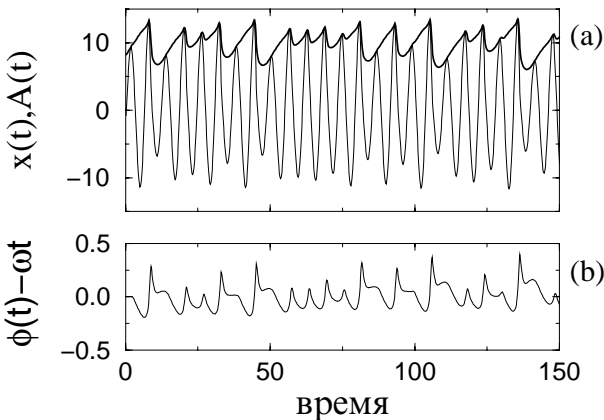


Рис. П2.4. Решение системы Рёсслера $x(t)$ и его мгновенная амплитуда $A(t)$ (жирная линия) (а). Мгновенная фаза ϕ растет практически линейно, тем не менее, малые колебания видны при большом увеличении (б). Из [Rosenblum and Kurths 1998], рис. 2, Copyright Springer-Verlag.

петли, соответствующие Р-зубцам не видны при данном увеличении). Важно, что траектории в (s, s_H) проходят через начало координат, и, следовательно, фаза не всегда определена. Мы не сталкивались с этой проблемой в предыдущих примерах благодаря достаточно простой структуре сигналов. Действительно, обычно перед применением ПГ из сигнала вычитают его среднее значение. Часто это обеспечивает то, что траектории охватывают начало координат; ранее мы неявно использовали это свойство. Для вычисления фазы кардиограммы необходимо сдвинуть начало координат в некую точку s^*, s_H^* и вычислить фазу и амплитуду в соответствии с

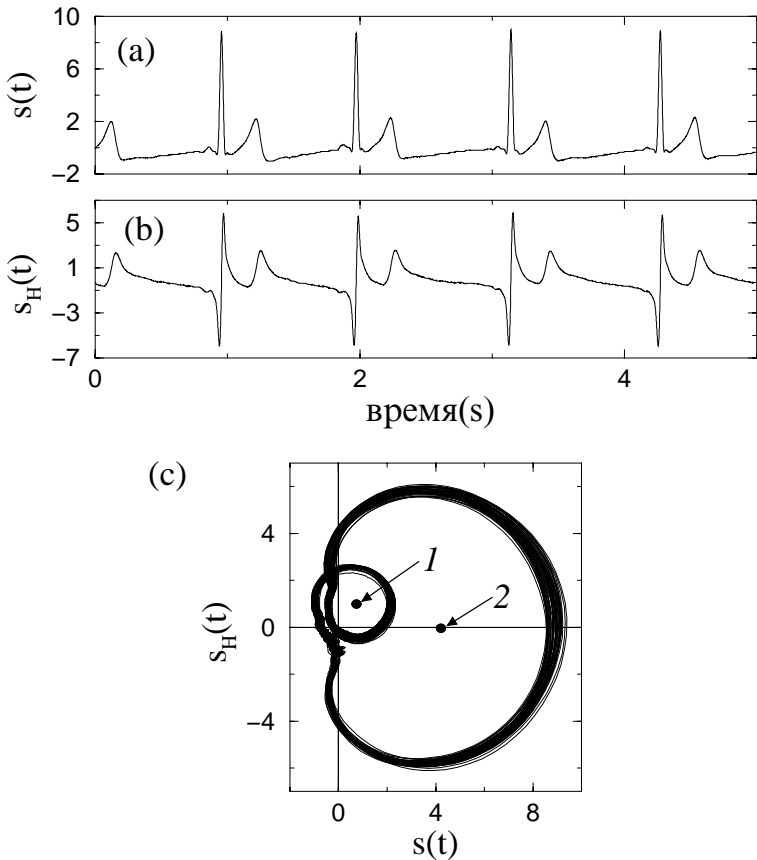


Рис. П2.5. ЭКГ человека (а), ее преобразование Гильберта (б) и их зависимость друг от друга (с). Определение фазы зависит от выбора начала координат в плоскости (s, s_H) ; два разумных выбора показаны стрелками в (с).

$$A(t)e^{i\phi(t)} = (s - s^*) + i(s_H - s_H^*). \quad (\text{П2.6})$$

Конечно, при таком способе теряется однозначность определения фазы: теперь она зависит от выбора точки отсчета. Два разумных выбора показаны на рис. П2.5с стрелками. Очевидно, что в зависимости от нового начала координат один сердечный цикл (интервал между двумя сокращениями сердца) будет соответствовать набегу фазы 2π или 4π . Это отражает тот факт, что наше понимание того, что есть «одно колебание», зависит от конкретной проблемы и от нашей физической интуиции.

П2.3 Численные проблемы и практические рекомендации

Важное преимущество метода аналитического сигнала состоит в том, что он легко может быть реализован численно. Выделим основные шаги в вычислении.

Вычисление ПГ в частотной области

Самый простой способ вычислить ПГ состоит в том, чтобы сделать быстрое преобразование Фурье (БПФ) от исходного временного ряда, сдвинуть фазу каждой частотной компоненты на $-\pi/2$ и применить обратное БПФ.² Чтобы сделать длину временного ряда подходящей для применения БПФ, надо добавить к нему нули (zero padding). Чтобы уменьшить краевые эффекты, желательно не использовать порядка десяти характерных периодов в начале и в конце сигнала для вычисления мгновенных характеристик. Вычисления с двойной точностью позволяют получить ПГ с погрешностью около 1%. (Погрешность оценивалась путем вычисления дисперсии от $s(t) + H^2(s(t))$, где H^2 означает, что ПГ было выполнено дважды; теоретически $s(t) + H^2(s(t)) \equiv 0$.)

Вычисление ПГ во временной области

Численно это может быть осуществлено с помощью свертки экспериментальной реализации с заранее вычисленной характеристикой фильтра (преобразователя Гильберта) [Рабинер и Голд 1975; Little and Shure 1992; Smith and Mersereau 1992]. Такие фильтры

² Фазовый сдвиг может быть легко реализован, если поменять местами мнимую и действительную часть преобразования Фурье: $\text{Re}(\omega_i) \rightarrow \text{tmp}$, $\text{Im}(\omega_i) \rightarrow \text{Re}(\omega_i)$, $-\text{tmp} \rightarrow \text{Im}(\omega_i)$, где tmp - промежуточная переменная.

могут быть, например, реализованы с помощью пакетов программ MATLAB [Little and Shure 1992] и RLAB (public domain, URL: <http://rlab.sourceforge.net>). Хотя ПГ требует вычисления на всей временной оси (т.е. преобразователь Гильберта является фильтром с бесконечной импульсной характеристикой), приемлемая погрешность порядка 1% может быть получена с помощью 256-точечной характеристики фильтра. Частота дискретизации должна быть выбрана таким образом, чтобы иметь по крайней мере 20 точек на характерный период колебаний. В процессе вычисления свертки $L/2$ точек теряется с каждого конца временного ряда, где L есть длина преобразователя.

Вычисление и разворачивание фазы

Удобный способ вычисления фазы состоит в использовании функций $\text{DATAN2}(s_H, s)$ (FORTRAN) и $\text{atan2}(s_H, s)$ (C), что дает циклическую фазу на интервале $[-\pi, \pi]$. Разность фаз двух сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ может быть получена с помощью ПГ как

$$\phi_1(t) - \phi_2(t) = \tan^{-1} \frac{s_{H,1}(t)s_2(t) - s_1(t)s_{H,2}(t)}{s_1(t)s_2(t) + s_{H,1}(t)s_{H,2}(t)}. \quad (\text{П2.7})$$

Для определения синхронизации часто бывает необходимо использовать фазу, определенную не на окружности, а на всей действительной оси (т.е. фазу, изменяющуюся от $-\infty$ до ∞). Для этой цели фаза (или разность фаз) может быть развернута путем отслеживания скачков $\approx 2\pi$ в зависимости $\phi(t)$.

Чувствительность к низкочастотному тренду

Мы уже обсуждали, что фаза хорошо определена, только если траектория в плоскости (s, s_H) всегда обходит начало координат и s и s_H не обращаются в ноль одновременно. Это условие может быть нарушено, если сигнал содержит низкочастотный тренд, например, из-за дрейфа нуля измерительного прибора. В результате некоторые обороты траектории, не охватывающие начало координат, не будут восприняты как цикл, и в набеге фазы будет потеряно 2π . Чтобы проиллюстрировать это, добавим искусственный тренд к ЭКГ; реконструкция такого сигнала в координатах s, s_H показана на рис. П2.6, его следует сравнить с аналогичным графиком для оригинальных данных на рис. П2.5. Очевидно, что начало координат, помеченное на рис. П2.5 первой стрелкой, будет в этом случае неправильным выбором. Чтобы избежать этой проблемы, мы рекомендуем всегда

строить график зависимости ПГ от исходного сигнала и проверять, правильно ли выбрано начало координат.

П2.4 Вычисление мгновенной частоты

Частота непрерывного сигнала

Вычисление мгновенной частоты $\omega(t)$ сигнала является довольно сложной процедурой. Непосредственное вычисление путем численного дифференцирования $\phi(t)$ приводит, естественно, к большим флуктуациям в оценке $\omega(t)$. Более того, может оказаться, что $\omega(t) < 0$ для некоторых t . Это может произойти не только из-за влияния шума, но и как следствие сложной формы сигнала. Так, например, типичные элементы ЭКГ (например, Т-зубцы) приводят к отрицательным значениям мгновенной частоты. С физической точки зрения мы ожидаем, что мгновенная частота является положительной функцией времени, изменяющейся медленно по сравнению с характерным периодом колебаний и имеющей смысл числа колебаний в единицу времени. Это особенно важно в контексте исследования синхронизации, где нас не интересует поведение фазы на масштабах, меньших характерного периода колебаний. Существует несколько методов получения оценки $\omega(t)$ в соответствии с такой точкой зрения; их обсуждение и сравнение можно найти в [Boashash 1992].

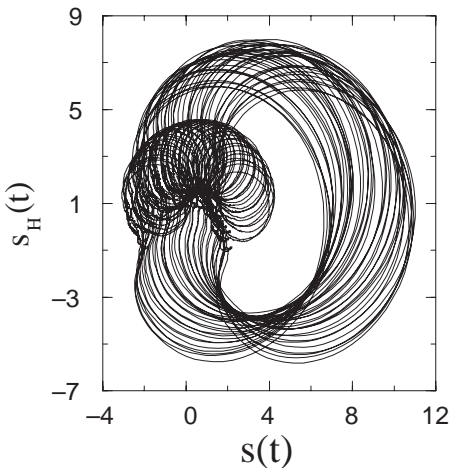


Рис. П2.6. Иллюстрация чувствительности преобразования Гильберта к низкочастотному тренду.

Возьмем для иллюстрации запись дыхания человека (поток воздуха через нос), см. рис. П2.7а, и воспользуемся методом, называемым в [Boashash 1992] «оценкой частоты методом максимального правдоподобия». Пусть мгновенная фаза $\phi(t)$ развернута на бесконечной оси, так что она является возрастающей, хотя и не обязательно монотонной, функцией времени. Выполним для каждого момента времени локальную аппроксимацию полиномом по интервалу, существенно большему характерного периода колебаний. Аналитически

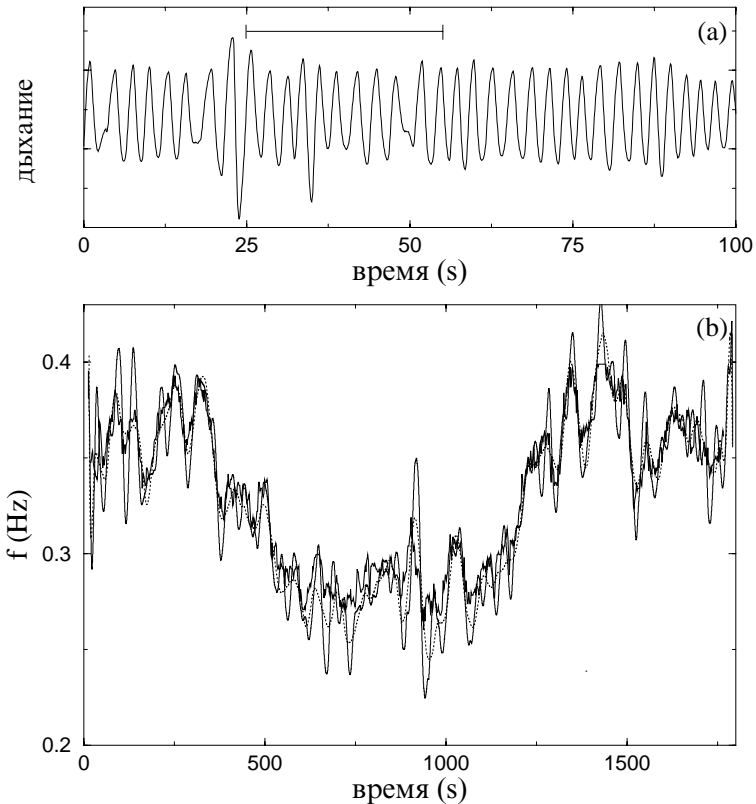


Рис. П2.7. Мгновенная частота дыхания человека. Исходный сигнал – поток воздуха – показан на (а). На (b) жирная линия показывает частоту, соответствующую максимуму спектра мощности, вычисленного методом авторегрессии (методом Бурга [Press *et al.* 1992]) в скользящем окне длительностью 30 секунд. Длина окна показана горизонтальным отрезком на (а); она соответствует примерно 10 характерным периодам дыхания. Непрерывная и пунктирные линии на (b) изображают мгновенную частоту $f(t)$, полученную с помощью ПГ с последующей аппроксимацией полиномом в окне длиной соответственно 30 и 60 секунд.

вычисленная производная полиномиальной функции в данный момент времени даёт всегда положительную оценку частоты. Практически это делается с помощью фильтра Савицкого–Голая (Savitzky–Golay); четвертая степень полинома и длина интервала аппроксимации порядка 10 характерных периодов являются разумным выбором параметров. Мгновенная частота, вычисленная таким способом, практически совпадает с частотой, соответствующей максимуму скользящего спектра, полученного методом авторегрессии, например методом Бурга [Press *et al.* 1992], см. рис. П2.7b.

Частота точечного процесса

Фаза и медленно меняющаяся частота точечного процесса могут быть получены достаточно просто. Действительно, если интервал времени между двумя событиями соответствует полному циклу колебательного процесса, то набег фазы за этот интервал в точности равен 2π . Следовательно, мы можем приписать временам t_i значения фазы $\phi_i = \phi(t_i) = 2\pi i$. С таким временным рядом трудно работать, так как он неэквидистантен по времени. Тем не менее, мы можем воспользоваться тем, что такой сигнал есть монотонно возрастающая функция времени, и обратить ее. Полученный процесс $t(\phi_i)$ эквидистантен, так как шаг по фазе равен 2π . Теперь мы можем применить описанный выше метод полиномиальной аппроксимации, чтобы получить мгновенный период $T_i = T(\phi_i)$. Снова обращая временной ряд, получим частоту $\omega_i = \omega(t_i) = 2\pi/T_i$.

Список литературы

- А. А. Андронов и А. А. Витт. К математической теории захватывания. *Журнал прикладной физики*, 7(4):3, 1930а.
- А. А. Андронов и А. А. Витт. Zur Theorie des Mitnehmens von van der Pol. *Archiv für Elektrotechnik*, 24(1):99–110, 1930b. Русский перевод в: А. А. Андронов. *Собрание трудов*, стр. 70–84. Из-во АН СССР, М., 1956.
- А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин. *Теория колебаний*. Гостехиздат, М., 1937; Физматгиз, М., 1959; Наука, М., 1981.
- В. С. Анищенко. *Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства хаоса в радиотехнических системах*. Наука, М., 1990.
- В. С. Анищенко и В. В. Астахов. Бифуркационные явления в автостохастическом генераторе при внешнем воздействии. *ЖТФ*, 53(11):2165–2170, 1983.
- В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, Д. Э. Постнов и М. А. Сафонова. Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса. *Радиотехника и электроника*, 36(2):338–351, 1991.
- В. В. Антюхов, А. Ф. Глова, О. Р. Качурин, Ф. В. Лебедев, В. В. Лиханский, А. П. Напартович и В. Д. Письменный. Эффективная фазовая синхронизация набора ОКГ. *Письма в ЖЭТФ*, 44(2):63–75, 1986.
- В. И. Арнольд. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности в окружность. *Изв. Акад. Наук Сер. Мат.*, 25(1):21–86, 1961.
- В. И. Арнольд. Замечания о теории возмущений для задач типа Матье. *Усп. Мат. Наук*, 38(4):189–203, 1983.
- В. С. Афраймович и Л. П. Шильников. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность. В *Методы качественной теории*

- дифференциальных уравнений*, стр. 3–28. Горький, 1983.
- Л. Г. Безаева, Л. Н. Капцов и П. С. Ланда. Порог синхронизации как критерий стохастичности в генераторе с инерционной нелинейностью. *ЖТФ*, 56(9):1849–1853, 1986.
- Б. П. Безручко. *Экспериментальное исследование нестационарных и хаотических эффектов в распределенной автоколебательной системе электронный пучок – электромагнитная волна*. Автореферат канд. дисс., Саратовский Университет, 1980.
- Б. П. Безручко, Л. В. Булгакова, С. П. Кузнецов и Д. И. Трубецков. Экспериментальное и теоретическое исследование стохастических автоколебаний в лампе обратной волны. В *Лекции по высокочастотной электронике (5-ая Зимняя Школа)*, Саратов 1981, стр. 25–77, Изд-во Саратовского Университета, 1981.
- Б. П. Безручко, С. П. Кузнецов и Д. И. Трубецков. Экспериментальное наблюдение стохастических автоколебаний в динамической системе электронный пучок – обратная электромагнитная волна. *Письма в ЖЭТФ*, 29(3):180–184, 1979.
- И. И. Блехман. *Синхронизация динамических систем*. Наука, М., 1971
- И. И. Блехман. *Синхронизация в природе и технике*. Наука, М., 1981
- Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Физматгиз, М., 1958.
- А. В. Бондаренко, А. Ф. Глова, С. Н. Козлов, Ф. В. Лебедев, В. В. Лиханский, А. П. Напартович, В. Д. Письменный и В. П. Ярцев. Бифуркации и хаос в системе оптически связанных CO₂-лазеров. *ЖЭТФ*, 95(3): 807–816, 1989.
- В. Я. Бродский. Околочасовые ритмы в клеточной популяции. Проблема синхронизации. *Бюлл. Эксп. Биол. Мед.*, 124(12):604–609, 1997.
- Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев. *Введение в теорию нелинейных колебаний*. Наука, М., 1987.
- Л. А. Вайнштейн и Д. Е. Вакман *Разделение частот в теории колебаний и волн*. Наука, М., 1983.
- И. М. Гельфанд, С. А. Ковалев и Л. М. Чайлахян. Внутриклеточное раздражение различных отделов сердца лягушки. *ДАН СССР*, 148(4): 973–976, 1963.
- Л. Гласс и М. Мэки. *От часов к хаосу: Ритмы жизни*. Мир, М., 1991.
- А. Ф. Глова, С. Ю. Курчатова, В. В. Лиханский, А. Ю. Лысиков и А. П. Напартович. О когерентной генерации линейного набора волноводных CO₂-лазеров с пространственным фильтром. *Квант. электрон.*, 23(6): 515–517, 1996.
- В. С. Гурфинкель, Я. М. Коц и М. Л. Шик. *Регуляция позы человека*. Наука, М., 1965.
- Ж. Йосс и Д. Джозеф. *Элементарная теория устойчивости и бифуркаций*. Мир, М., 1983.

- А. Б. Каток и Б. Хассельблат *Введение в современную теорию динамических систем*. Факториал, М., 1999.
- В. Г. Колинко, Т. А. Архангельская и Ю. М. Романовский. Движение протоплазмы плазмодия миксомицета *Physarum* в условиях изменяющейся температуры. *Stud. Biophys.*, 106(3):215–222, 1985.
- И. П. Корнфельд, С. В. Фомин и Я. Г. Синай. *Эргодическая теория*. Наука, М., 1980.
- С. П. Кузнецов, *Динамический хаос*. Физматлит, М., 2001.
- С. П. Кузнецов и А. С. Пиковский. Переход от симметричного к несимметричному режиму хаотической динамики в системе диссипативно связанных рекуррентных отображений. *Изв. ВУЗов – Радиофизика*, 32(1):41–45, 1989.
- Ю. И. Кузнецов, П. С. Ланда, А. Ф. Ольховой и С. М. Перминов. Связь между амплитудным порогом синхронизации и энтропией в стохастических автоколебательных системах. *ДАН СССР*, 281(2):291–294, 1985.
- И. О. Кулик и И. К. Янсон. *Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах*. Наука, М., 1970.
- П. С. Ланда. *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы*. Наука, М., 1980.
- П. С. Ланда. *Нелинейные колебания и волны*. Наука, М., 1997.
- П. С. Ланда и С. М. Перминов. Взаимодействие периодических и стохастических автоколебаний. *Изв. ВУЗов – Радиофизика*, 25(3):424–427, 1985.
- П. С. Ланда и С. М. Перминов. Синхронизация хаотических колебаний в системе Маккея–Гласса. *Изв. ВУЗов – Радиофизика*, 30(3):437–439, 1987.
- П. С. Ланда, Ю. С. Рендель и В. А. Шер. Синхронизация колебаний в системе Лоренца. *Изв. ВУЗов – Радиофизика*, 32:1172–1174, 1989.
- П. С. Ланда и М. Г. Розенблюм. О синхронизации хаотических автоколебательных систем. *ДАН СССР*, 324(1):63–68, 1992.
- П. С. Ланда и Н. Д. Таранкова. Синхронизация генератора при модуляции его собственной частоты. *Радиотехника и электроника*, 21(2):260, 1976.
- Е. М. Лифшиц и Л. П. Питаевский. *Физическая кинетика*. Наука, М., 1979.
- А. Н. Малахов. *Флуктуации в автоколебательных системах*. Наука, М., 1968.
- И. Г. Малкин. *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*. Гостехиздат, М., 1956.
- В. М. Митюшин, Л. Л. Литинская и Л. Б. Каминир. О синхронном изменении клеточных ядер. В *Колебательные процессы в биологических и химических системах*, стр. 325–331, Наука, М., 1967.
- Ф. Мун. *Хаотические колебания: Вводный курс для научных сотрудников и инженеров*. Мир, М., 1990.
- А. Найфэ. *Введение в методы возмущений*. Мир, М., 1984.

- Ю. И. Неймарк и П. С. Ланда. *Стохастические и хаотические колебания*. Наука, М., 1987.
- А. А. Непомнящий. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости. *Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа*, (3):28–34, 1974.
- Я. Г. Пановко и И. И. Губанова. *Устойчивость и колебания упругих систем*. Наука, М., 1964.
- А. С. Пиковский. Синхронизация и стохастизация ансамбля автогенераторов внешним шумом. *Изв. ВУЗов–Радиофизика*, 27(5):576–581, 1984а.
- А. С. Пиковский. Синхронизация фазы стохастических автоколебаний периодическим внешним сигналом. *Радиотехника и электроника*, 30(10):1970–1974, 1984б.
- Л. Рабинер и Б. Голд. *Теория и применение цифровой обработки сигналов*. Мир, М., 1978.
- М. И. Рабинович и Д. И. Трубецков. *Введение в теорию колебаний и волн*. Рег. Хаот. Дин., Ижевск, 2000.
- Д. В. Рэлей (Стретт). *Теория звука*. Гостехиздат, М., 1955.
- Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова и Д. С. Чернавский. *Математическое моделирование в биофизике*. Наука, М., 1975.
- Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова и Д. С. Чернавский. *Математическая биофизика*. Наука, М., 1984.
- С. М. Рыгов. *Введение в статистическую радиофизику*. Наука, М., 1976.
- Р. Л. Стратонович. *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике*. Сов. Радио, М., 1961.
- К. Ф. Теодорчик. *Автоколебательные системы*. Гостехиздат, М., 1952.
- В. Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Мир, М., 1984.
- А. А. Харкевич. *Основы радиотехники*. Связьиздат, М., 1962.
- Т. Хаяси. *Нелинейные колебания в физических системах*. Мир, М., 1968.
- В. Хорстхемке и Р. Лефевр. *Индукцированные шумом переходы*. Мир, М., 1987.
- М. Л. Цетлин. *Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем*. Наука, М., 1969.
- Р. Шмидт и Г. Тевс. *Физиология человека*. Мир, М., 1986.
- Г. Шустер. *Детерминированный хаос. Введение*. Мир, М., 1988.
- H. D. I. Abarbanel. *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1996.
- H. D. I. Abarbanel, N. F. Rulkov, and M. M. Suschik. Generalized synchronization of chaos: The auxillary system approach. *Phys. Rev. E*, 53(5):4528–4535, 1996.
- L. F. Abbott and C. van Vreeswijk. Asynchronous states in networks of pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 48(2):1483–1490, 1993.
- J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, S. De Leo, and R. Spigler. Breaking the symmetry

- in bimodal frequency distributions of globally coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 57(5):5287–5290, 1998.
- U. Achenbach and K. E. Wohlfarth-Bottermann. Synchronization and signal transmission in protoplasmatic strands of *Physarum*. Reaction to varying temperature gradient. *Planta*, 150:180–188, 1980.
- U. Achenbach and K. E. Wohlfarth-Bottermann. Synchronization and signal transmission in protoplasmatic strands of *Physarum*. Effects of externally applied substances and mechanical influences. *Planta*, 151:574–583, 1981.
- R. Adler. A study of locking phenomena in oscillators. *Proc. IRE*, 34:351–357, 1946. Reprinted in *Proc. IEEE*, 61(10):1380–1385, 1973.
- V. S. Afraimovich, V. I. Nekorkin, G. V. Osipov, and V. D. Shalfeev. *Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks*. World Scientific, Singapore, 1994.
- Y. Aizawa and T. Uezu. Global aspects of the dissipative dynamical systems. II. Periodic and chaotic responses in the forced Lorenz system. *Prog. Theor. Phys.*, 68(6):1864–1879, 1982.
- M. K. Ali. Synchronization of a chaotic map in the presence of common noise. *Phys. Rev. E*, 55(4):4804–4805, 1997.
- M. K. Ali and J.-Q. Fang. Synchronization of chaos and hyperchaos using linear and nonlinear feedback functions. *Phys. Rev. E*, 55(5):5285–5290, 1997.
- K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, New York, 1997.
- P. Alstrøm, B. Christiansen, and M. T. Levinsen. Characterization of a simple class of modulated relaxation oscillators. *Phys. Rev. B*, 41(3):1308–1319, 1990.
- R. Andretic, S. Chaney, and J. Hirsh. Requirement of circadian genes for cocaine sensitization in *Drosophila*. *Science*, 285:1066–1068, 1999.
- V. S. Anishchenko, A. G. Balanov, N. B. Janson, N. B. Igosheva, and G. V. Bordyugov. Entrainment between heart rate and weak noninvasive forcing. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 10:2339–2348, 2000.
- V. S. Anischenko, T. E. Vadivasova, D. E. Postnov, and M. A. Safonova. Synchronization of chaos. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 2(3):633–644, 1992.
- T. Aoyagi and Y. Kuramoto. Frequency order and wave patterns of mutual entrainment in two-dimensional oscillator lattices. *Phys. Lett. A*, 155(6,7):410–414, 1991.
- E. V. Appleton. The automatic synchronization of triode oscillator. *Proc. Cambridge Phil. Soc. (Math. and Phys. Sci.)*, 21:231–248, 1922.
- J. Argyris, G. Faust, and M. Haase. *An Exploration of Chaos*. North-Holland, Amsterdam, 1994.
- J. Arnhold, P. Grassberger, K. Lehnertz, and C. E. Elger. A robust method for detecting interdependences: Application to intracranially recorded EEG. *Physica D*, 134(4):419–430, 1999.
- L. Arnold. *Random Dynamical Systems*. Springer, Berlin, 1998.

- V. I. Arnold. Cardiac arrhythmias and circle mappings. *Chaos*, 1:20–24, 1991.
- D. G. Aronson, M. A. Chory, G. R. Hall, and R. P. McGehee. Bifurcations from an invariant circle for two parameter families of maps of the plane: A computer-assisted study. *Commun. Math. Phys.*, 83:303–353, 1982.
- D. G. Aronson, G. B. Ermentrout, and N. Koppel. Amplitude response of coupled oscillators. *Physica D*, 41:403–449, 1990.
- D. G. Aronson, R. P. McGehee, I. G. Kevrekidis, and R. Aris. Entrainment regions for periodically forced oscillations. *Phys. Rev. A*, 33(3):2190–2192, 1986.
- R. Artuso, E. Aurell, and P. Cvitanović. Recycling of strange sets. I. Cycle expansions. *Nonlinearity*, 3:325–359, 1990a.
- R. Artuso, E. Aurell, and P. Cvitanović. Recycling of strange sets. II. Applications. *Nonlinearity*, 3:361–386, 1990b.
- J. Aschoff, S. Daan, and G. A. Groos. *Vertebrate Circadian Systems. Structure and Physiology*. Springer, Berlin, 1982.
- P. Ashwin and P. J. Aston. Blowout bifurcations of codimension two. *Phys. Lett. A*, 244(4):261–270, 1998.
- P. Ashwin, J. Buescu, and I. Stewart. Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Lett. A*, 193:126–139, 1994.
- P. Ashwin, J. Buescu, and I. Stewart. From attractor to chaotic saddle: a tale of transverse instability. *Nonlinearity*, 9(3):703–737, 1996.
- P. Ashwin, J. R. Terry, K. S. Thornburg, and R. Roy. Blowout bifurcation in a system of coupled chaotic lasers. *Phys. Rev. E*, 58(6):7186–7189, 1998.
- V. Astakhov, T. Kapitaniak, A. Shabunin, and V. Anishchenko. Non-bifurcational mechanism of loss of chaos synchronization in coupled non-identical systems. *Phys. Lett. A*, 258(2–3):99–102, 1999.
- P. J. Aston and M. Dellnitz. Symmetry breaking bifurcations of chaotic attractors. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 5(6):1643–1676, 1995.
- R. Badii, G. Broggi, B. Derighetti, M. Ravani S. Ciliberto, A. Politi, and M. A. Rubio. Dimension increase in filtered chaotic signals. *Phys. Rev. Lett.*, 60: 979–982, 1988.
- R. Badii and A. Politi. *Complexity. Hierarchical Structures and Scaling in Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- F. Bagnoli, L. Baroni, and P. Palmerini. Synchronization and directed percolation in coupled map lattices. *Phys. Rev. E*, 59(1):409–416, 1999.
- F. Bagnoli and R. Rechtman. Synchronization and maximum Lyapunov exponents of cellular automata. *Phys. Rev. E*, 59(2):R1307–R1310, 1999.
- G. L. Baker, J. A. Blackburn, and H. J. T. Smith. A stochastic model of synchronization for chaotic pendulums. *Phys. Lett. A*, 252(3–4):191–197, 1999.
- J. Baker and J. Gollub. *Chaotic Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- N. Balmforth, C. Tresser, P. Worfolk, and C. W. Wu. Master–slave synchronization and the Lorenz equation. *Chaos*, 7(3):392–394, 1997.

- N. J. Balmforth, A. Jacobson, and A. Provenzale. Synchronized family dynamics in globally coupled maps. *Chaos*, 9(3):738–754, 1999.
- N. J. Balmforth and R. Sassi. A shocking display of synchrony. *Physica D*, 143(1–4):21–55, 2000.
- M. Banaji and P. Glendinning. Towards a quasi-periodic mean flow theory for globally coupled oscillators. *Phys. Lett. A*, 251:297–302, 1994.
- A.-L. Barabási and H. E. Stanley. *Fractal Concepts in Surface Growth*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- S. Barbay, G. Giacomelli, and F. Marin. Stochastic resonance in vertical cavity surface emitting lasers. *Phys. Rev. E*, 61(1):157–166, 2000.
- A. Barone and G. Paterno. *Physics and Applications of the Josephson Effect*. Wiley, New York, 1982.
- C. Beck and F. Schlögl. *Thermodynamics of Chaotic Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- J. Benford, H. Sze, W. Woo, R. R. Smith, and B. Harteneck. Phase locking of relativistic magnetrons. *Phys. Rev. Lett.*, 62(8):969–971, 1989.
- T. B. Benjamin and J. E. Feir. The disintegration of wave trains on deep water. *J. Fluid Mech.*, 27:417, 1967.
- R. E. Best. *Phase-Locked Loops*. McGraw-Hill, New York, 1984.
- L. Billings, J. H. Curry, and E. Phipps. Lyapunov exponents, singularities, and a riddling bifurcation. *Phys. Rev. Lett.*, 79(6):1018–1021, 1997.
- B. Blasius, A. Huppert, and L. Stone. Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems. *Nature*, 399:354–359, 1999.
- I. I. Blekhan, P. S. Landa, and M. G. Rosenblum. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems. *Appl. Mech. Rev.*, 48(11):733–752, 1995.
- B. Boashash. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. *Proc. IEEE*, 80(4):520–568, 1992.
- S. Boccaletti, J. Bragard, F. T. Arecchi, and H. Mancini. Synchronization in nonidentical extended systems. *Phys. Rev. Lett.*, 83(3):536–539, 1999.
- S. Boccaletti, A. Farini, and F. T. Arecchi. Adaptive synchronization of chaos for secure communication. *Phys. Rev. E*, 55(5):4979–4981, 1997.
- T. Bohr, M. H. Jensen, G. Paladin, and A. Vulpiani. *Dynamical Systems Approach to Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- R. Bonaccini and A. Politi. Chaotic-like behavior in chains of stable nonlinear oscillators. *Physica D*, 103:362, 1997.
- L. L. Bonilla, J. M. Casado, and M. Morillo. Self-synchronization of populations of nonlinear oscillators in the thermodynamic limit. *J. Stat. Phys.*, 48(3/4):571–591, 1987.
- L. L. Bonilla, J. C. Neu, and R. Spigler. Nonlinear stability of incoherence and collective synchronization in a population of coupled oscillators. *J. Stat. Phys.*, 67(1/2):313–330, 1992.
- L. L. Bonilla, C. J. Pérez Vicente, F. Ritort, and J. Soler. Exactly solvable

- phase oscillator models with synchronization dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 81(17):3643–3646, 1998.
- L. L. Bonilla, C. J. Pérez Vicente, and J. M. Rubi. Glassy synchronization in a population of coupled oscillators. *J. Stat. Phys.*, 70(3/4):921–936, 1993.
- S. Bottani. Pulse-coupled relaxation oscillators: From biological synchronization to self-organized criticality. *Phys. Rev. Lett.*, 74(21):4189–4192, 1995.
- S. Bottani. Synchronization of integrate and fire oscillators with global coupling. *Phys. Rev. E*, 54(3):2334–2350, 1996.
- C. Boyd. On the structure of the family of Cherry fields on the torus. *Ergod. Theor. Dynam. Syst.*, 5:27–46, 1985.
- M. Bračič and A. Stefanovska. Synchronization and modulation in the human cardiorespiratory system. *Physica A*, 283:451–461, 2000.
- Y. Braiman, W. L. Ditto, K. Wiesenfeld, and M. L. Spano. Disorder-enhanced synchronization. *Phys. Lett. A*, 206:54–60, 1995.
- D. M. Bramble and D. R. Carrier. Running and breathing in mammals. *Science*, 219:251–256, 1983.
- H. Bremmer. The scientific work of Balthasar van der Pol. *Philips Tech. Rev.*, 22(2):36–52, 1960/61.
- P. C. Bressloff and S. Coombes. Symmetry and phase-locking in a ring of pulse-coupled oscillators with distributed delays. *Physica D*, 126(1–2):99–122, 1999.
- J. Brindley and T. Kapitaniak. Analytic predictors for strange non-chaotic attractors. *Phys. Lett. A*, 155:361–364, 1991.
- R. Brown and N. Rulkov. Designing a coupling that guarantees synchronization between identical chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 78(22):4189–4192, 1997a.
- R. Brown and N. Rulkov. Synchronization of chaotic systems: Transverse stability of trajectories in invariant manifolds. *Chaos*, 7(3):395–413, 1997b.
- L. Brunnet and H. Chaté. Phase coherence in chaotic oscillatory media. *Physica A*, 257:347–356, 1998.
- L. Brunnet, H. Chaté, and P. Manneville. Long-range order with local chaos in lattices of diffusively coupled ODEs. *Physica D*, 78:141–154, 1994.
- P. Bryant and C. Jeffries. The dynamics of phase locking and points of resonance in a forced magnetic resonator. *Physica D*, 25:196–232, 1987.
- J. Buck and E. Buck. Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies. *Science*, 159:1319–1327, 1968.
- J. Buck, E. Buck, F. E. Hanson, J. F. Case, L. Mets, and G. J. Atta. Control of flashing in fireflies. IV. Free run pacemaking in a synchronic *Pteroptyx*. *J. Comp. Physiol.*, 144:277–286, 1981.
- C. J. Buczek, R. J. Freiberg, and M. L. Skolnick. Laser injection locking. *Proc. IEEE*, 61(10):1411–1431, 1973.
- P. J. Butler and A. J. Woakes. Heart rate, respiratory frequency and wing beat frequency of free flying barnacle geese. *J. Exp. Biol.*, 85:213–226, 1980.

- J. L. Cardy, Editor. *Finite-Size Scaling*. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- T. L. Carroll. Amplitude-independent chaotic synchronization. *Phys. Rev. E*, 53(4):3117–3122, 1996.
- T. L. Carroll, J. F. Heagy, and L. M. Pecora. Transforming signals with chaotic synchronization. *Phys. Rev. E*, 54(5):4676–4680, 1996.
- T. L. Carroll and G. A. Johnson. Synchronizing broadband chaotic systems to narrow-band signals. *Phys. Rev. E*, 57(2):1555–1558, 1998.
- T. L. Carroll and L. M. Pecora. Cascading synchronized chaotic systems. *Physica D*, 67:126–140, 1993a.
- T. L. Carroll and L. M. Pecora. Synchronizing nonautonomous chaotic circuits. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 40:646, 1993b.
- T. L. Carroll and L. M. Pecora. Synchronizing hyperchaotic volume-preserving maps and circuits. *IEEE Trans. Circ. Syst. I*, 45(6):656–659, 1998.
- M. L. Cartwright and J. E. Littlewood. On nonlinear differential equations of the second order. *J. London Math. Soc.*, 20:180–189, 1945.
- A. Čenys, A. N. Anagnostopoulos, and G. L. Bleris. Distribution of laminar lengths for noisy on–off intermittency. *Phys. Lett. A*, 224(6):346–352, 1997a.
- A. Čenys, A. N. Anagnostopoulos, and G. L. Bleris. Symmetry between laminar and burst phases for on–off intermittency. *Phys. Rev. E*, 56(3):2592–2596, 1997b.
- A. Čenys, A. Namajunas, A. Tamasevicius, and T. Schneider. On–off intermittency in chaotic synchronization experiment. *Phys. Lett. A*, 213:259–264, 1996.
- J. Cernacek. Stabilography in neurology. *Agressologie D*, 21:25–29, 1980.
- H. Chaté and P. Manneville. Collective behaviors in spatially extended systems with local interactions and synchronous updating. *Prog. Theor. Phys.*, 87(1):1–60, 1992.
- H. Chaté and P. Manneville. Phase diagram of the two-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. *Physica A*, 224:348, 1996.
- H. Chaté, A. Pikovsky, and O. Rudzick. Forcing oscillatory media: Phase kinks vs. synchronization. *Physica D*, 131(1–4):17–30, 1999.
- Chia-Chu Chen. Threshold effects on synchronization of pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 49:2668–2672, 1994.
- M. Y. Choi, H. J. Kim, D. Kim, and H. Hong. Synchronization in a system of globally coupled oscillators with time delay. *Phys. Rev. E*, 61(1):371–381, 2000.
- B. Christiansen, P. Alstrøm, and M. T. Levinsen. Routes to chaos and complete phase locking in modulated relaxational oscillators. *Phys. Rev. A*, 42(4):1891–1900, 1990.
- B. Christiansen, P. Alstrøm, and M. T. Levinsen. Collective dynamics of coupled modulated oscillators with random pinning. *Physica D*, 56:23–35, 1992.

- J. J. Collins and I. N. Stewart. Coupled nonlinear oscillators and the symmetries of animal gaits. *J. Nonlinear Sci.*, 3:349–392, 1993.
- S. Coombes. Liapunov exponents and mode-locked solutions for integrate-and-fire dynamical systems. *Phys. Lett. A*, 255(1–2):49–57, 1999.
- S. Coombes and P. C. Bressloff. Mode locking and Arnold tongues in integrate-and-fire neural oscillators. *Phys. Rev. E*, 60(2):2086–2096, 1999.
- Á. Corral, C. J. Pérez, A. Díaz-Guilera, and A. Arenas. Self-organized criticality and synchronization in a lattice model of integrate-and-fire oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 74(1):118–121, 1995a.
- Á. Corral, C. J. Pérez, A. Díaz-Guilera, and A. Arenas. Synchronization in a lattice model of pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 75(20):3697–3700, 1995b.
- D. Cortez and S. J. Elledge. Conducting the mitotic symphony. *Nature*, 406:354–356, 2000.
- P. Coullet and K. Emilsson. Pattern formation in the strong resonant forcing of spatially distributed oscillators. *Physica A*, 188:190–200, 1992a.
- P. Coullet and K. Emilsson. Strong resonances of spatially distributed oscillators: A laboratory to study patterns and defects. *Physica D*, 61:119–131, 1992b.
- H. Crauel and F. Flandoli. Attractors for random dynamical systems. *Probab. Theory Relat. Fields*, 100:365–393, 1994.
- J. D. Crawford. Amplitude expansions for instabilities in populations of globally-coupled oscillators. *J. Stat. Phys.*, 74(5/6):1047–1084, 1994.
- J. D. Crawford. Scaling and singularities in the entrainment of globally coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 74(21):4341–4344, 1995.
- J. D. Crawford and K. T. R. Davies. Synchronization of globally coupled phase oscillators: Singularities and scaling for general couplings. *Physica D*, 125(1–2):1–46, 1999.
- A. Crisanti, M. Falconi, and A. Vulpiani. Broken ergodicity and glassy behavior in a deterministic chaotic map. *Phys. Rev. Lett.*, 76(4):612–615, 1996.
- A. Crisanti, G. Paladin, and A. Vulpiani. *Products of Random Matrices in Statistical Physics*. Springer, Berlin, 1993.
- M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65:851–1112, 1993.
- J. P. Crutchfield and K. Kaneko. Are attractors relevant to turbulence? *Phys. Rev. Lett.*, 60:2715–2718, 1988.
- K. M. Cuomo and A. V. Oppenheim. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Phys. Rev. Lett.*, 71(1):65–68, 1993.
- K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim, and S. H. Strogatz. Robustness and signal recovery in a synchronized chaotic system. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 3(6):1629–1638, 1993a.
- K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim, and S. H. Strogatz. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE*

- Trans. Circ. Syst.*, 40:626–633, 1993b.
- C. A. Czeisler, J. S. Allan, S. H. Strogatz, J. M. Ronda, R. Sánchez, C. D. Ríos, W. O. Freitag, G. S. Richardson, and R. E. Kronauer. Bright light resets the human circadian pacemaker independent of the timing of the sleep–wake cycle. *Science*, 233:667–671, 1986.
- C. A. Czeisler, J. F. Duffy, T. L. Shanahan, E. N. Brown, J. F. Mitchell, D. W. Rimmer, J. M. Ronda, E. J. Silva, J. S. Allan, J. S. Emens, D.-J. Dijk, and R. E. Kronauer. Stability, precision, and near-24-hour period of the human circadian pacemaker. *Science*, 284:2177–2181, 1999.
- H. Daido. Intrinsic fluctuations and a phase transition in a class of large population of interacting oscillators. *J. Stat. Phys.*, 60(5/6):753–800, 1990.
- H. Daido. Order function and macroscopic mutual entrainment in uniformly coupled limit-cycle oscillators. *Prog. Theor. Phys.*, 88(6):1213–1218, 1992a.
- H. Daido. Quasientrainment and slow relaxation in a population of oscillators with random and frustrated interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 68(7):1073–1076, 1992b.
- H. Daido. Critical conditions of macroscopic mutual entrainment in uniformly coupled limit-cycle oscillators. *Prog. Theor. Phys.*, 89(4):929–934, 1993a.
- H. Daido. A solvable model of coupled limit-cycle oscillators exhibiting perfect synchrony and novel frequency spectra. *Physica D*, 69:394–403, 1993b.
- H. Daido. Multi-branch entrainment and multi-peaked order-functions in a phase model of limit-cycle oscillators with uniform all-to-all coupling. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 28:L151–L157, 1995.
- H. Daido. Onset of cooperative entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all interactions: Bifurcation of the order function. *Physica D*, 91:24–66, 1996.
- D. Dawson and J. Gärtner. Large deviations from the McKean–Vlasov limit for weakly interacting diffusions. *Stochastics*, 20:247–308, 1987.
- M. de Sousa Vieira and A. J. Lichtenberg. Nonuniversality of weak synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 56(4):R3741–3744, 1997.
- M. de Sousa Vieira, A. J. Lichtenberg, and M. A. Lieberman. Synchronization of regular and chaotic systems. *Phys. Rev. A*, 46(12):R7359–R7362, 1992.
- M. de Sousa Vieira, A. J. Lichtenberg, and M. A. Lieberman. Self synchronization of many coupled oscillations. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 4(6):1563–1577, 1994.
- A. Denjoy. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. Math. Pure Appl.*, 11:333–375, 1932.
- R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, Reading MA, 1989.
- N. E. Diamant and A. Bortoff. Nature of the intestinal slow-wave frequency. *Am. J. Physiol.*, 216(2):301–307, 1969.
- A. Díaz-Guilera, C. J. Pérez, and A. Arenas. Mechanisms of synchronization and pattern formation in a lattice of pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 57(4):3820–3828, 1998.

- M. Ding, C. Grebogi, and E. Ott. Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic. *Phys. Rev. A*, 39(5):2593–2598, 1989.
- M. Ding and W. Yang. Stability of synchronous chaos and on–off intermittency in coupled map lattices. *Phys. Rev. E*, 56(4):4009–4016, 1997.
- W. L. Ditto, M. L. Spano, H. T. Savage, S. N. Raueo, J. Heagy, and E. Ott. Experimental observation of a strange nonchaotic attractor. *Phys. Rev. Lett.*, 65:533, 1990.
- M. Dolnik and I. R. Epstein. Coupled chaotic chemical oscillators. *Phys. Rev. E*, 54(4):3361–3368, 1996.
- B. Drossel. Self-organized criticality and synchronization in a forest-fire-model. *Phys. Rev. Lett.*, 76(6):936–939, 1996.
- G. S. Duane. Synchronized chaos in extended systems and meteorological teleconnections. *Phys. Rev. E*, 56(6):6475–6493, 1997.
- J. Dudel and W. Trautwein. Der Mechanismus der automatischen rhythmischen Impulsbildung der Herzmusclefaser. *Pflügers Arch.*, 313:553, 1958.
- G. I. Dykman, P. S. Landa, and Yu. I. Neymark. Synchronizing the chaotic oscillations by external force. *Chaos, Solit. Fract.*, 1(4):339–353, 1991.
- W. H. Eccles and J. H. Vincent. British Patent Spec. clxiii p.462, 1920. Application date 17.02.1920.
- R. J. Elble and W. C. Koller. *Tremor*. John Hopkins University Press, Baltimore, 1990.
- C. Elphick, A. Hagberg, and E. Meron. Multiphase patterns in periodically forced oscillatory systems. *Phys. Rev. E*, 59(5):5285–5291, 1999.
- R. C. Elson, A. I. Selverston, R. Huerta, N. F. Rulkov, M. I. Rabinovich, and H. D. I. Abarbanel. Synchronous behavior of two coupled biological neurons. *Phys. Rev. Lett.*, 81(25):5692–5695, 1998.
- C. Elton and M. Nicholson. The ten-year cycle in numbers of the lynx in Canada. *J. Anim. Ecol.*, 11:215–244, 1942.
- J. Engel and T. A. Pedley. *Epilepsy: A Comprehensive Textbook*. Lippincott-Raven, Philadelphia, 1975.
- G. B. Ermentrout. The behavior of rings of coupled oscillators. *J. Math. Biol.*, 23:55–74, 1985.
- G. B. Ermentrout. Oscillator death in populations of “all to all” coupled nonlinear oscillators. *Physica D*, 41:219–231, 1990.
- G. B. Ermentrout and N. Kopell. Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillators, I. *SIAM J. Math. Anal.*, 15(2):215–237, 1984.
- G. B. Ermentrout and J. Rinzel. Beyond a pacemaker’s entrainment limit: Phase walk-through. *Am. J. Physiol.*, 246:R102–106, 1984.
- U. Ernst, K. Pawelzik, and T. Geisel. Synchronization induced by temporal delays in pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 74(9):1570–1573, 1995.
- U. Ernst, K. Pawelzik, and T. Geisel. Delay-induced multistable synchronization of biological oscillators. *Phys. Rev. E*, 57(2):2150–2162,

- 1998.
- M. S. Feldman. Non-linear system vibration analysis using Hilbert transform I. Free vibration analysis method "FREEVIB". *Mech. Syst. Signal Proc.*, 8 (2):119–127, 1994.
- R. Femat and G. Solis-Perales. On the chaos synchronization phenomena. *Phys. Lett. A*, 262(1):50–60, 1999.
- M. Franz and M. Zhang. Suppression and creation of chaos in a periodically forced Lorenz system. *Phys. Rev. E*, 52(4):3558–3565, 1995.
- H.-J. Freund. Motor unit and muscle activity in voluntary motor control. *Physiol. Rev.*, 63(2):387–436, 1983.
- H. Fujigaki, M. Nishi, and T. Shimada. Synchronization of nonlinear systems with distinct parameters: Phase synchronization and metamorphosis. *Phys. Rev. E*, 53(4):3192–3197, 1996.
- H. Fujigaki and T. Shimada. Phase synchronization and nonlinearity decision in the network of chaotic flows. *Phys. Rev. E*, 55(3):2426–2433, 1997.
- H. Fujisaka, H. Ishii, M. Inoue, and T. Yamada. Intermittency caused by chaotic modulation II. *Prog. Theor. Phys.*, 76(6):1198–1209, 1986.
- H. Fujisaka, S. Matsushita, and T. Yamada. Fluctuation-controlled transient below the on-off intermittency transition. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 30(16):5697–5707, 1997.
- H. Fujisaka, K. Ouchi, H. Hata, B. Masaoka, and S. Miyazaki. On-off intermittency in oscillatory media. *Physica D*, 114(3–4):237–250, 1998.
- H. Fujisaka and T. Yamada. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Prog. Theor. Phys.*, 69(1):32–47, 1983.
- H. Fujisaka and T. Yamada. A new intermittency in coupled dynamical systems. *Prog. Theor. Phys.*, 74(4):918–921, 1985.
- H. Fujisaka and T. Yamada. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. IV. Instability of synchronized chaos and new intermittency. *Prog. Theor. Phys.*, 75(5):1087–1104, 1986.
- H. Fujisaka and T. Yamada. Intermittency caused by chaotic modulation. III. Self-similarity and higher order correlation functions. *Prog. Theor. Phys.*, 77(5):1045–1056, 1987.
- J. M. Furman. Posturography: Uses and limitations. In *Baillière's Clinical Neurology*, volume 3, pages 501–513. Baillière Tindall, London, 1994.
- D. Gabor. Theory of communication. *J. IEE (London)*, 93(3):429–457, 1946.
- P. M. Gade. Synchronization of oscillators with random nonlocal connectivity. *Phys. Rev. E*, 54(1):64–70, 1996.
- J. A. C. Gallas, P. Grassberger, H. J. Herremann, and P. Ueberholz. Noisy collective behaviour in deterministic cellular automata. *Physica A*, 180:19–41, 1992.
- L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni. Stochastic resonance. *Rev. Mod. Phys.*, 70:223–288, 1998.
- C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods*. Springer, Berlin, 1990.
- D. J. Gauthier and J. C. Bienfang. Intermittent loss of synchronization

- in coupled chaotic oscillators: Toward a new criterion for high-quality synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 77(9):1751–1754, 1996.
- W. Gerstner. Time structure of the activity in neural network models. *Phys. Rev. E*, 51(1):738–758, 1995.
- L. Glass. Cardiac arrhythmias and circle maps. *Chaos*, 1:13–19, 1991.
- L. Glass. Synchronization and rhythmic processes in physiology. *Nature*, 410:277–284, 2001.
- L. Glass and A. Shrier. Low-dimensional dynamics in the heart. In L. Glass, P. Hunter, and A. McCulloch, Editors, *Theory of Heart*, pages 289–312. Springer, New York, 1991.
- P. Glendinning. *Stability, Instability and Chaos*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- P. Glendinning. The stability boundary of synchronized states in globally coupled dynamical systems. *Phys. Lett. A*, 259:129–134, 1999.
- P. Glendinning, U. Feudel, A. Pikovsky, and J. Stark. The structure of mode-locking regions in quasi-periodically forced circle maps. *Physica D*, 140(1):227–243, 2000.
- P. Glendinning and M. Proctor. Travelling waves with spatially resonant forcing: Bifurcation of a modified Landau equation. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 3(6):1447–1455, 1993.
- N. R. J. Glossop, L. C. Lyons, and P. E. Hardin. Interlocked feedback loops within the *Drosophila* circadian oscillator. *Science*, 286:766–768, 1999.
- L. Goldberg, H. F. Taylor, and J. F. Weller. Injection locking of coupled-stripe diode laser arrays. *Appl. Phys. Lett.*, 46(3):236–238, 1985.
- D. Golomb, D. Hansel, B. Shraiman, and H. Sompolinsky. Clustering in globally coupled phase oscillators. *Phys. Rev. A*, 45(6):3516, 1992.
- D. L. Gonzalez and O. Piro. Symmetric kicked self-oscillators: Iterated maps, strange attractors, and symmetry of the phase-locking Farey hierarchy. *Phys. Rev. Lett.*, 55(1):17–20, 1985.
- J. M. González-Miranda. Chaotic systems with a null conditional Lyapunov exponent under nonlinear driving. *Phys. Rev. E*, 53(1):R5–R8, 1996a.
- J. M. González-Miranda. Synchronization of symmetric chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 53(6):5656–5669, 1996b.
- J. M. Gonzalez-Miranda. Communications by synchronization of spatially symmetric chaotic systems. *Phys. Lett. A*, 251(2):115–120, 1999.
- M. Gorman, P. J. Widmann, and K. A. Robbins. Chaotic flow regimes in a convective loop. *Phys. Rev. Lett*, 52(25):2241–2244, 1984.
- M. Gorman, P. J. Widmann, and K. A. Robbins. Nonlinear dynamics of a convection loop: a quantitative comparison of experiment with theory. *Physica D*, 19(2):255–267, 1986.
- A. Goryachev, H. Chaté, and R. Kapral. Synchronization defects and broken symmetry in spiral waves. *Phys. Rev. Lett.*, 80(4):873–876, 1998.
- A. Goryachev and R. Kapral. Spiral waves in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 76(10):1619–1622, 1996.

- P. Grassberger. Are damage spreading transitions generically in the universality class of directed percolation? *J. Stat. Phys.*, 79(1–2):13, 1995.
- P. Grassberger. Synchronization of coupled systems with spatiotemporal chaos. *Phys. Rev. E*, 59(3):R2520–R2522, 1999.
- C. Graves, L. Glass, D. Laporta, R. Meloche, and A. Grassino. Respiratory phase locking during mechanical ventilation in anesthetized human subjects. *Am. J. Physiol.*, 250:R902–R909, 1986.
- C. M. Gray, P. König, A. K. Engel, and W. Singer. Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties. *Nature*, 338:334–337, 1989.
- C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, and J. A. Yorke. Strange attractors that are not chaotic. *Physica D*, 13:261–268, 1984.
- G. Grinstein, D. Mukamel, R. Seidin, and C. H. Bennett. Temporally periodic phases and kinetic roughening. *Phys. Rev. Lett.*, 70(23):3607–3610, 1993.
- J. Guckenheimer. Isochrons and phaseless sets. *J. Math. Biol.*, 1:259–273, 1975.
- J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, 1986.
- J. Güémez, C. Martín, and M. A. Matías. Approach to the chaotic synchronized state of some driving methods. *Phys. Rev. E*, 55(1):124–134, 1997.
- J. Güémez and M. A. Matías. Synchronization in small assemblies of chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 53(4):3059–3067, 1996.
- M. R. Guevara. Iteration of the human atrioventricular (AV) nodal recovery curve predicts many rhythms of AV block. In L. Glass, P. Hunter, and A. McCulloch, Editors, *Theory of Heart*, pages 313–358. Springer, New York, 1991.
- M. R. Guevara, L. Glass, and A. Shrier. Phase-locking, period-doubling bifurcations and irregular dynamics in periodically stimulated cardiac cells. *Science*, 214:1350–1353, 1981.
- M. R. Guevara, A. Shrier, and L. Glass. Phase-locked rhythms in periodically stimulated cardiac cells. *Am. J. Physiol.*, 254:H1–10, 1989.
- N. Gupte and R. E. Amritkar. Synchronization of chaotic orbits: The influence of unstable periodic orbits. *Phys. Rev. E*, 48(3):R1620–R1623, 1993.
- H. Gutowitz, Editor. *Cellular Automata: Theory and Experiment*. North-Holland, Amsterdam, 1990.
- R. Guttman, S. Lewis, and J. Rinzel. Control of repetitive firing in squid axon membrane as a model for a neuron oscillator. *J. Physiol. (London)*, 305:377–395, 1980.
- H. Haken. *Information and Self-Organization. A Macroscopic Approach to Complex Systems*. Springer, Berlin, 1988; 2nd edition, 1999.
- H. Haken. *Advanced Synergetics: Instability Hierarchies of Self-Organizing Systems*. Springer, Berlin, 1993.
- H. Haken, J. A. S. Kelso, and H. Bunz. A theoretical model of phase transitions in human hand movements. *Biol. Cybern.*, 51:347–356, 1985.

- V. Hakim and W. J. Rappel. Dynamics of the globally coupled complex Ginzburg–Landau equation. *Phys. Rev. A*, 46(12):R7347–R7350, 1992.
- J. K. Hale and H. Koçak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer, New York, 1991.
- G. M. Hall, S. Bahar, and D. J. Gauthier. Prevalence of rate-dependent behaviors in cardiac muscle. *Phys. Rev. Lett.*, 82(14):2995–2998, 1999.
- T. Halpin-Healy and Y.-C. Zhang. Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. *Physics Reports*, 254:215–414, 1995.
- M. Hämäläinen, R. Hari, R. J. Ilmoniemi, J. Knuutila, and O. V. Lounasmaa. Magnetoencephalography – Theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain. *Rev. Mod. Phys.*, 65: 413–497, 1993.
- P. W. Hammer, N. Platt, S. M. Hammel, J. F. Heagy, and B. D. Lee. Experimental observation of on–off intermittency. *Phys. Rev. Lett.*, 73 (8):1095–1098, 1994.
- S. K. Han, C. Kurrer, and Y. Kuramoto. Dephasing and bursting in coupled neural oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3190–3193, 1995.
- S. K. Han, Ch. Kurrer, and Y. Kuramoto. Diffusive interaction leading to dephasing of coupled neural oscillators. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 7(4):869–876, 1997.
- D. Hansel, G. Mato, and C. Meunier. Clustering and slow switching in globally coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E*, 48(5):3470–3477, 1993.
- M. Hasler, Yu. Maistrenko, and O. Popovych. Simple example of partial synchronization of chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 58(5):6843–6846, 1998.
- R. He and P. G. Vaidya. Time delayed chaotic systems and their synchronization. *Phys. Rev. E*, 59(4):4048–4051, 1999.
- J. F. Heagy and T. L. Carroll. Chaotic synchronization in Hamiltonian systems. *Chaos*, 4:385, 1994.
- J. F. Heagy, T. L. Carroll, and L. M. Pecora. Experimental and numerical evidence for riddled basins in coupled chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 73(26):3528, 1994a.
- J. F. Heagy, T. L. Carroll, and L. M. Pecora. Synchronous chaos in coupled oscillator systems. *Phys. Rev. E*, 50(3):1874–1884, 1994b.
- J. F. Heagy, T. L. Carroll, and L. M. Pecora. Desynchronization by periodic orbits. *Phys. Rev. E*, 52(2):R1253–R1256, 1995.
- J. F. Heagy and S. M. Hammel. The birth of strange nonchaotic attractors. *Physica D*, 70:140–153, 1994.
- J. F. Heagy, N. Platt, and S. M. Hammel. Characterization of on–off intermittency. *Phys. Rev. E*, 49(2):1140–1150, 1994c.
- M. R. Herman. Une méthode pour minorer les exposants de Lyapunov et quelques exemples montrant le caractère local d’un théorème d’Arnold et de Moser sur le tori de dimension 2. *Comment. Math. Helvetici*, 58:453, 1983.
- A. V. Herz and J. J. Hopfield. Earthquake cycles and neural reverberations:

- Collective oscillations in systems with pulse-coupled threshold elements. *Phys. Rev. Lett.*, 75(6):1222–1225, 1995.
- H. Herzog and J. Freund. Chaos, noise, and synchronization reconsidered. *Phys. Rev. E*, 52(3):3238, 1995.
- R. C. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, Oxford, New York, 1994.
- P. Holmes and D. R. Rand. Bifurcations of the forced van der Pol oscillator. *Quart. Appl. Math.*, 35:495–509, 1978.
- H. Hong, M. Y. Choi, K. Park, B. G. Yoon, and K. S. Soh. Synchronization and resonance in a driven system of coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 60(4):4014–4020, 1999a.
- H. Hong, M. Y. Choi, J. Yi, and K.-S. Soh. Inertia effects on periodic synchronization in a system of coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 59(1):353–363, 1999b.
- H. Hong, M. Y. Choi, B.-G. Yoon, K. Park, and K.-S. Soh. Noise effects on synchronization in systems of coupled oscillators. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32:L9–L15, 1999c.
- J. J. Hopfield. Neurons, dynamics and computation. *Phys. Today*, pages 40–46, February 1994.
- J. J. Hopfield and A. V. M. Herz. Rapid local synchronization of action potentials: Toward computation with coupled integrate-and-fire neurons. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 92:6655–6662, 1995.
- F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich. *Weakly Connected Neural Networks*. Springer, Berlin, 1997.
- F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich. Oscillatory neurocomputers with dynamic connectivity. *Phys. Rev. Lett.*, 82(14):2983–2986, 1999.
- D. Hoyer, O. Hader, and U. Zwiener. Relative and intermittent cardiorespiratory coordination. *IEEE Eng. Med. Biol.*, 16(6):97–104, 1997.
- G. Hu, J. Xiao, J. Yang, F. Xie, and Zh. Qu. Synchronization of spatiotemporal chaos and its applications. *Phys. Rev. E*, 56(3):2738–2746, 1997.
- B. R. Hunt, E. Ott, and J. A. Yorke. Differentiable generalized synchronization of chaos. *Phys. Rev. E*, 55(4):4029–4034, 1997.
- Ch. Huygens (Hugenii). *Horologium Oscillatorium*. Apud F. Muguet, Parisiis, France, 1673. English translation: *The Pendulum Clock*, Iowa State University Press, Ames, 1986. Русский перевод: Х. Гюйгенс. *Три мемуара по механике*. Изд-во АН СССР, М., 1951.
- Ch. Huygens. *Œuvres Complètes*, volume 15. Swets & Zeitlinger B. V., Amsterdam, 1967a.
- Ch. Huygens. *Œuvres Complètes*, volume 17. Swets & Zeitlinger B. V., Amsterdam, 1967b.
- J. M. Hyman, B. Nicolaenko, and S. Zaleski. Order and complexity in the Kuramoto–Sivashinsky model of weakly turbulent interfaces. *Physica D*, 23(1–3):265–292, 1986.

- A. K. Jain, K. K. Likharev, J. E. Lukens, and J. E. Sauvageau. Mutual phase-locking in Josephson junction arrays. *Phys. Reports*, 109(6):309–426, 1984.
- J. Jalife and C. Antzelevitch. Phase resetting and annihilation of pacemaker activity in cardiac tissue. *Science*, 206:695–697, 1979.
- M. H. Jensen, P. Bak, and T. Bohr. Complete devil's staircase, fractal dimension and universality of mode-locking structure in the circle map. *Phys. Rev. Lett*, 50(21):1637–1639, 1983.
- M. H. Jensen, P. Bak, and T. Bohr. Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. I. Circle maps. *Phys. Rev. A*, 30(4):1960–1969, 1984.
- Y. Jiang and P. Parmananda. Synchronization of spatiotemporal chaos in asymmetrically coupled map lattices. *Phys. Rev. E*, 57(4):4135–4139, 1998.
- G. A. Johnson, D. J. Mar, T. L. Carroll, and L. M. Pecora. Synchronization and imposed bifurcations in the presence of large parameter mismatch. *Phys. Rev. Lett.*, 80(18):3956–3959, 1998.
- L. Junge and U. Parlitz. Phase synchronization of coupled Ginzburg–Landau equations. *Phys. Rev. E*, 62(1):438–441, 2000.
- E. Kaempfer. *The History of Japan (With a Description of the Kingdom of Siam)*. Sloane, London, 1727. Posthumous translation; or reprint by McLehose, Glasgow, 1906.
- P. B. Kahn. *Mathematical Methods for Scientists and Engineers: Linear and Nonlinear Systems*. Wiley, New York, 1990.
- K. Kaneko. Clustering, coding, switching, hierarchical ordering and control in network of chaotic elements. *Physica D*, 41:137–172, 1990.
- K. Kaneko. Globally coupled circle maps. *Physica D*, 54(1):5–19, 1991.
- K. Kaneko, Editor. *Theory and Applications of Coupled Map Lattices*. Wiley, Chichester, 1993.
- K. Kaneko. Dominance of Milnor attractors and noise-induced selection in a multiattractor system. *Phys. Rev. Lett.*, 78(14):2736–2739, 1997.
- K. Kaneko. On the strength of attractors in a high-dimensional system: Milnor attractor network, robust global attraction, and noise-induced selection. *Physica D*, 124:322–344, 1998.
- H. Kantz and T. Schreiber. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- T. Kapitaniak, Y. Maistrenko, A. Stefanski, and J. Brindley. Bifurcations from locally to globally riddled basins. *Phys. Rev. E*, 57(6):R6253–R6256, 1998.
- T. Kapitaniak and Yu. L. Maistrenko. Chaos synchronization and riddled basins in two coupled one-dimensional maps. *Chaos Solit. Fract.*, 9(1–2):271–282, 1998.
- T. Kapitaniak, J. Wojewoda, and J. Brindley. Synchronization and desynchronization in quasi-hyperbolic chaotic systems. *Phys. Lett. A*, 210:283–289, 1996.
- D. Kaplan and L. Glass. *Understanding Nonlinear Dynamics*. Springer, New York, 1995.

- J. L. Kaplan, J. Mallet-Paret, and J. A. Yorke. The Lyapunov dimension of a nowhere differentiable attracting torus. *Ergod. Theor. Dynam. Syst.*, 4: 261–281, 1984.
- J. L. Kaplan and J. A. Yorke. Chaotic behavior of multidimensional difference equations. In H. O. Walter and H.-O. Peitgen, Editors, *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*, volume 730 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 204–227. Springer, Berlin, 1979.
- R. Kapral and K. Showalter, Editors. *Chemical Waves and Patterns*. Kluwer, Dordrecht, 1995.
- G. Keller. A note on strange nonchaotic attractors. *Fund. Math.*, 151:139–148, 1996.
- T. Kenner, H. Pessenhofer, and G. Schwabeger. Method for the analysis of the entrainment between heart rate and ventilation rate. *Pflügers Arch.*, 363:263–265, 1976.
- P. Khoury, M. A. Lieberman, and A. J. Lichtenberg. Degree of synchronization of noisy maps on the circle. *Phys. Rev. E*, 54(4):3377–3388, 1996.
- P. Khoury, M. A. Lieberman, and A. J. Lichtenberg. Experimental measurement of the degree of chaotic synchronization using a distribution exponent. *Phys. Rev. E*, 57(5):5448–5466, 1998.
- C.-M. Kim. Mechanism of chaos synchronization and on-off intermittency. *Phys. Rev. E*, 56(3):3697–3700, 1997.
- V. Kirk and E. Stone. Effect of a refractory period on the entrainment of pulse-coupled integrate-and-fire oscillators. *Phys. Lett. A*, 232:70–76, 1997.
- L. Kocarev and U. Parlitz. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 76(11):1816–1819, 1996.
- L. Kocarev, Z. Tasev, and U. Parlitz. Synchronizing spatiotemporal chaos of partial differential equations. *Phys. Rev. Lett.*, 79(1):51–54, 1997.
- H. P. Koepchen. Physiology of rhythms and control systems: An integrative approach. In H. Haken and H. P. Koepchen, Editors, *Rhythms in Physiological Systems*, volume 55 of *Springer Series in Synergetics*, pages 3–20, Springer, Berlin, 1991.
- R. Konnur. Equivalence of synchronization and control of chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77(14):2937–2940, 1996.
- N. Kopell and G. B. Ermentrout. Symmetry and phase locking in chains of weakly coupled oscillators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39:623–660, 1986.
- N. Koshiya and J. C. Smith. Neuronal pacemaker for breathing visualized *in vitro*. *Nature*, 400:360–363, 1999.
- Y. Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators. In H. Araki, Editor, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, volume 39 of *Springer Lecture Notes in Physics*, page 420, Springer, New York, 1975.
- Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Springer, Berlin, 1984.

- Y. Kuramoto, T. Aoyagi, I. Nishikawa, T. Chawanya, and K. Okuda. Neural network model carrying phase information with application to collective dynamics. *Prog. Theor. Phys.*, 87(5):1119–1126, 1992.
- Y. Kuramoto and T. Tsuzuki. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. *Prog. Theor. Phys.*, 55: 356, 1976.
- K. Kurokawa. Injection locking of microwave solid-state oscillators. *Proc. IEEE*, 61(10):1386–1410, 1973.
- C. Kurrer. Synchronization and desynchronization of weakly coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 56(4):3799–3802, 1997.
- J. Kurths, Editor. A focus issue on phase synchronization in chaotic systems. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 10:2289–2667, 2000.
- J. Kurths and A. S. Pikovsky. Symmetry breaking in distributed systems and modulational spatio-temporal intermittency. *Chaos Solit. Fract.*, 5(10): 1893–1899, 1995.
- S. Kuznetsov, A. Pikovsky, and U. Feudel. Birth of a strange nonchaotic attractor: A renormalization group analysis. *Phys. Rev. E*, 51(3):R1629–R1632, 1995.
- Y.-Ch. Lai. Symmetry-breaking bifurcation with on-off intermittency in chaotic dynamical systems. *Phys. Rev. E*, 53(5):4267–4270, 1996a.
- Y.-Ch. Lai. Transition from strange nonchaotic to strange chaotic attractors. *Phys. Rev. E*, 53(1):57–65, 1996b.
- Y.-Ch. Lai. Scaling laws for noise-induced temporal riddling in chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 56(4):3897–3908, 1997.
- Y.-Ch. Lai and C. Grebogi. Noise-induced riddling in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77(25):5047–5050, 1996.
- Y.-Ch. Lai, C. Grebogi, J. A. Yorke, and S. C. Venkataramani. Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77(1):55–58, 1996.
- B. C. Lampkin, T. Nagao, and A. M. Mauer. Synchronization of the mitotic cycle in acute leukaemia. *Nature*, 222:1274–1275, 1969.
- P. S. Landa and M. G. Rosenblum. Synchronization and chaotization of oscillations in coupled self-oscillating systems. *Appl. Mech. Rev.*, 46(7): 414–426, 1993.
- K. J. Lee, Y. Kwak, and T. K. Lim. Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 81(2):321–324, 1998.
- G. V. Levina and A. A. Nepomnyaschiy. Analysis of an amplitude equation for autovibrational flow regimes at resonance external forces. *A. Angew. Math. Mech.*, 66(6):241–246, 1986.
- A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer, New York, 1992.
- K. K. Likharev. *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*. Gordon and Breach, Philadelphia, 1991.

- A. L. Lin, M. Bertram, K. Martinez, H. L. Swinney, A. Ardelea, and G. F. Carey. Resonant phase patterns in a reaction–diffusion system. *Phys. Rev. Lett.*, 84(18):4240–4243, 2000.
- W. C. Lindsey and C. M. Chie, Editors. *Phase-Locked Loops*. IEEE Press, New York, 1985.
- M. Lipp and N. S. Longridge. Computerized dynamic posturography: Its place in the evaluation of patients with dizziness and imbalance. *J. Otolaryngology*, 23(3):177–183, 1994.
- J. N. Little and L. Shure. *Signal Processing Toolbox for Use with MATLAB. User's Guide*. Mathworks, Natick, MA, 1992.
- Z. Liu and S. Chen. Symbolic analysis of generalized synchronization of chaos. *Phys. Rev. E*, 56(6):7297–7300, 1997.
- Z. H. Liu, S. G. Chen, and B. B. Hu. Coupled synchronization of spatiotemporal chaos. *Phys. Rev. E*, 59(3):2817–2821, 1999.
- L. Longa, S. P. Dias, and E. M. F. Curado. Lyapunov exponents and coalescence of chaotic trajectories. *Phys. Rev. E*, 56(1):259–263, 1997.
- A. Longtin, A. Bulsara, D. Pierson, and F. Moss. Bistability and the dynamics of periodically forced sensory neurons. *Biol. Cybernetics*, 70:569–578, 1994.
- A. Longtin and D. R. Chialvo. Stochastic and deterministic resonances for excitable systems. *Phys. Rev. Lett.*, 81(18):4012–4015, 1998.
- R. Lopez-Ruiz and Y. Pomeau. Transition between two oscillation modes. *Phys. Rev. E*, 55(4):R3820–R3823, 1997.
- E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141, 1963.
- E. N. Lorenz. *The Essence of Chaos*. University of Washington Press, Seattle, 1993.
- M. N. Lorenzo, I. P. Mariño, V. Pérez-Muñuzuri, M. A. Matías, and V. Pérez-Villar. Synchronization waves in arrays of driven chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 54(4):3094–3097, 1996.
- C. Ludwig. Beiträge zur Kenntnis des Einflusses der Respirationsbewegung auf den Blutlauf im Aortensystem. *Arch. Anat. Physiol.*, 13:242–302, 1847.
- W. A. MacKay. Synchronized neuronal oscillations and their role in motor processes. *Trends Cogn. Sci.*, 1:176–183, 1997.
- R. Mainieri and J. Rehacek. Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 82(15):3042–3045, 1999.
- Y. Maistrenko and T. Kapitaniak. Different types of chaos synchronization in two coupled piecewise linear maps. *Phys. Rev. E*, 54(4):3285–3292, 1996.
- Y. Maistrenko, T. Kapitaniak, and P. Szuminski. Locally and globally riddled basins in two coupled piecewise-linear maps. *Phys. Rev. E*, 56(6):6393–6399, 1997.
- Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, O. Popovych, and E. Mosekilde. Desynchronization of chaos in coupled logistic maps. *Phys. Rev. E*, 60(3):2817–2830, 1999a.
- Yu. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, O. Popovych, and E. Mosekilde. Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic

- maps. *Phys. Rev. E*, 57(3):2713–2724, 1998.
- Yu. L. Maistrenko, O. Popovych, and M. Hasler. On strong and weak chaotic partial synchronization. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 10(1):179–204, 2000.
- S. C. Manrubia and A. S. Mikhailov. Mutual synchronization and clustering in randomly coupled chaotic dynamical networks. *Phys. Rev. E*, 60(2):1579–1589, 1999.
- M. Manscher, M. Nordham, E. Mosekilde, and Yu. L. Maistrenko. Riddled basins of attraction for synchronized type-I intermittency. *Phys. Lett. A*, 238:358–364, 1998.
- A. Maritan and J. R. Banavar. Chaos, noise, and synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 72:1451–1454, 1994.
- S. Martin and W. Martienssen. Circle maps and mode locking in the driven electrical conductivity of barium sodium niobate crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 56(15):1522–1525, 1986.
- G. Matsumoto, K. Aihara, Y. Hanyu, N. Takahashi, S. Yoshizawa, and J. Nagumo. Chaos and phase locking in normal squid axons. *Phys. Lett. A*, 123:162–166, 1987.
- K. Matsumoto and I. Tsuda. Noise-induced order. *J. Stat. Phys.*, 31(1):87–106, 1983.
- T. Matsumoto and M. Nishi. Subsystem decreasing for exponential synchronization of chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 59(2):1711–1718, 1999.
- P. C. Matthews, R. E. Mirollo, and S. H. Strogatz. Dynamics of a large system of coupled nonlinear oscillators. *Physica D*, 52:293–331, 1991.
- P. C. Matthews and S. H. Strogatz. Phase diagram for the collective behavior of limit-cycle oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 65(14):1701–1704, 1990.
- M. K. McClintock. Menstrual synchrony and suppression. *Nature*, 229:244–245, 1971.
- R. V. Mendes. Clustering and synchronization with positive Lyapunov exponents. *Phys. Lett. A*, 257:132–138, 1999.
- R. Mettin, U. Parlitz, and W. Lauterborn. Bifurcation structure of the driven van der Pol oscillator. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 3(6):1529–1555, 1993.
- A. S. Mikhailov. *Foundations of Synergetics 1. Distributed Active Systems*. Springer, Berlin, 1994.
- M. Milan, S. Campuzano, and A. Garcia-Bellido. Cell cycling and patterned cell proliferation in the *Drosophila* wing during metamorphosis. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 93(21):11687–11692, 1996.
- J. Milnor. On the concept of attractor. *Commun. Math. Phys.*, 99:177–195, 1985.
- A. A. Minai and T. Anand. Chaos-induced synchronization in discrete-time oscillators driven by a random input. *Phys. Rev. E*, 57(2):1559–1562, 1998.
- A. A. Minai and T. Anand. Synchronization of chaotic maps through a noisy coupling channel with application to digital communication. *Phys. Rev. E*, 59(1):312–320, 1999a.

- A. A. Minai and T. Anand. Synchronizing multiple chaotic maps with a randomized scalar coupling. *Physica D*, 125(3-4):241–259, 1999b.
- N. Minorsky. *Nonlinear Oscillations*. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1962.
- R. Mirollo and S. Strogatz. Amplitude death in an array of limit-cycle oscillators. *J. Stat. Phys.*, 60:245–262, 1990a.
- R. Mirollo and S. Strogatz. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM J. Appl. Math.*, 50:1645–1662, 1990b.
- F. Mitschke. Acausal filters for chaotic signals. *Phys. Rev. A*, 41:1169–1171, 1990.
- F. Mitschke, M. Möller, and H. W. Lange. Measuring filtered chaotic signals. *Phys. Rev. A*, 37:4518–4521, 1988.
- S. Miyazaki and H. Hata. Universal scaling law of the power spectrum in the on–off intermittency. *Phys. Rev. E*, 58(6):7172–7175, 1998.
- R. Y. Moore. A clock for the ages. *Science*, 284:2102–2103, 1999.
- L. G. Morelli and D. H. Zanette. Synchronization of stochastically coupled cellular automata. *Phys. Rev. E*, 58(1):R8–R11, 1998.
- O. Morgül. Necessary condition for observer-based chaos synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 82(1):77–80, 1999.
- O. Morgül and M. Feki. A chaotic masking scheme by using synchronized chaotic systems. *Phys. Lett. A*, 251(3):169–176, 1999.
- F. Mormann, K. Lehnertz, P. David, and C. E. Elger. Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients. *Physica D*, 144(3–4):358–369, 2000.
- F. Moss, A. Bulsara, and M. Shlesinger, Editors. The proceedings of the NATO advanced research workshop: Stochastic resonance in physics and biology. *J. Stat. Phys.*, 70:1–512, 1993.
- F. Moss, D. Pierson, and D. O’Gorman. Stochastic resonance: Tutorial and update. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 4(6):1383–1397, 1994.
- N. Mousseau. Synchronization by disorder in coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77:968–971, 1996.
- R. Mrowka, A. Patzak, and M. G. Rosenblum. Quantitative analysis of cardiorespiratory synchronization in infants. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 10(11):2479–2518, 2000.
- Y. Nagai and Y.-Ch. Lai. Characterization of blowout bifurcation by unstable periodic orbits. *Phys. Rev. E*, 55(2):1251–1254, 1997a.
- Y. Nagai and Y.-Ch. Lai. Periodic-orbit theory of the blowout bifurcation. *Phys. Rev. E*, 56(4):4031–4041, 1997b.
- N. Nakagawa and Y. Kuramoto. Collective chaos in a population of globally coupled oscillators. *Prog. Theor. Phys.*, 89(2):313–323, 1993.
- N. Nakagawa and Y. Kuramoto. From collective oscillations to collective chaos in a globally coupled oscillator system. *Physica D*, 75:74–80, 1994.
- N. Nakagawa and Y. Kuramoto. Anomalous Lyapunov spectrum in globally coupled oscillators. *Physica D*, 80:307–316, 1995.

- H. Nakao. Asymptotic power law of moments in a random multiplicative process with weak additive noise. *Phys. Rev. E*, 58(2):1591–1600, 1998.
- S. Nakata, T. Miyata, N. Ojima, and K. Yoshikawa. Self-synchronization in coupled salt-water oscillators. *Physica D*, 115:313–320, 1998.
- Z. Néda, E. Ravasz, Y. Brechet, T. Vicsek, and A.-L. Barabási. Tumultuous applause can transform itself into waves of synchronized clapping. *Nature*, 403(6772):849–850, 2000.
- A. Neiman, X. Pei, D. F. Russell, W. Wojtenek, L. Wilkens, F. Moss, H. A. Braun, M. T. Huber, and K. Voigt. Synchronization of the noisy electrosensitive cells in the paddlefish. *Phys. Rev. Lett.*, 82(3):660–663, 1999a.
- A. Neiman, L. Schimansky-Geier, A. Cornell-Bell, and F. Moss. Noise-enhanced phase synchronization in excitable media. *Phys. Rev. Lett.*, 83(23):4896–4899, 1999b.
- A. Neiman, L. Schimansky-Geier, F. Moss, B. Shulgin, and J. J. Collins. Synchronization of noisy systems by stochastic signals. *Phys. Rev. E*, 60(1):284–292, 1999c.
- A. Neiman, A. Silchenko, V. S. Anishchenko, and L. Schimansky-Geier. Stochastic resonance: Noise-enhanced phase coherence. *Phys. Rev. E*, 58(6):7118–7125, 1998.
- A. B. Neiman, D. F. Russell, X. Pei, W. Wojtenek, J. Twitty, E. Simonotto, B. A. Wettring, E. Wagner, L. A. Wilkens, and F. Moss. Stochastic synchronization of electroreceptors in the paddlefish. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 10(11):2499–2518, 2000.
- A. C. Newell. Envelope equations. In *Lectures in Applied Mathematics*, volume 15, page 157, American Mathematical Society, Providence, RI, 1974.
- S. Nichols and K. Wiesenfeld. Ubiquitous neutral stability of splay-phase states. *Phys. Rev. A*, 45:8430–8435, 1992.
- K. Niizeki, K. Kawahara, and Y. Miyamoto. Interaction among cardiac, respiratory, and locomotor rhythms during cardiocomotor synchronization. *J. Appl. Physiol.*, 75(4):1815–1821, 1993.
- T. Nishikawa and K. Kaneko. Fractalization of torus revisited as a strange nonchaotic attractor. *Phys. Rev. E*, 54(6):6114–6124, 1996.
- E. P. Odum. *Fundamentals of Ecology*. Saunders, Philadelphia, 1953.
- K. Okuda. Variety and generality of clustering in globally coupled oscillators. *Physica D*, 63:424–436, 1993.
- F. Ollendorf and W. Peters. Schwingungstabilität parallelarbeitender Synchromaschinen. In *Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern*, volume 6, pages 7–26. Springer, Berlin, 1925–1926.
- G. Osipov, A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators. *Phys. Rev. E*, 55(3):2353–2361, 1997.
- S. Ostlund, D. Rand, J. Sethna, and E. Siggia. Universal properties of the

- transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems. *Physica D*, 8:303–342, 1983.
- E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- G. Paladin and A. Vulpiani. Anomalous scaling laws in multifractal objects. *Phys. Rep.*, 156:147–225, 1987.
- M. Palus. Detecting phase synchronization in noisy systems. *Phys. Lett. A*, 227:301–308, 1997.
- P. Panter. *Modulation, Noise, and Spectral Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- P. Paoli, A. Politi, and R. Badii. Long-range order in the scaling behaviour of hyperbolic dynamical systems. *Physica D*, 36(6):263–286, 1989a.
- P. Paoli, A. Politi, G. Broggi, M. Ravani, and R. Badii. Phase transitions in filtered chaotic signals. *Phys. Rev. Lett.*, 62(21):2429–2432, 1989b.
- N. Parekh, V. R. Kumar, and B. D. Kulkarni. Analysis and characterization of complex spatio-temporal patterns in nonlinear reaction–diffusion systems. *Physica A*, 224(1–2):369–381, 1996.
- E.-H. Park, M. A. Zaks, and J. Kurths. Phase synchronization in the forced Lorenz system. *Phys. Rev. E*, 60(6):6627–6638, 1999.
- K. Park, S. W. Rhee, and M. Y. Choi. Glass synchronization in the network of oscillators with random phase shifts. *Phys. Rev. E*, 57(5):5030–5035, 1998.
- S. H. Park, S. Kim, H.-B. Pyo, and S. Lee. Effects of time-delayed interactions on dynamic patterns in a coupled oscillator system. *Phys. Rev. E*, 60(4):4962–4965, 1999a.
- S. H. Park, S. Kim, H.-B. Pyo, and S. Lee. Multistability analysis of phase locking patterns in an excitatory coupled neural system. *Phys. Rev. E*, 60(2):2177–2181, 1999b.
- U. Parlitz, L. Junge, and L. Kocarev. Subharmonic entrainment of unstable periodic orbits and generalized synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 79(17):3158–3161, 1997.
- U. Parlitz, L. Junge, W. Lauterborn, and L. Kocarev. Experimental observation of phase synchronization. *Phys. Rev. E*, 54(2):2115–2118, 1996.
- U. Parlitz and L. Kocarev. Synchronization of chaotic systems. In H. Schuster, Editor, *Handbook of Chaos Control*, pages 271–303. Wiley-VCH, Weinheim, 1999.
- V. Parlitz and W. Lauterborn. Period-doubling cascades and devil’s staircases of the driven van der Pol oscillator. *Phys. Rev. A*, 36(3):1428–1434, 1987.
- F. Pasemann. Synchronized chaos and other coherent states for two coupled neurons. *Physica D*, 128(2–4):236–249, 1999.
- I. Pastor-Díaz and A. López-Fraguas. Dynamics of two coupled van der Pol oscillators. *Phys. Rev. E*, 52(2):1480–1489, 1995.
- I. Pastor-Díaz, V. Perez-Garcia, F. Encinas-Sanz, and J. M. Guerra. Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators. *Phys. Rev. E*, 48(1):171–182, 1993.

- T. Pavlidis. Populations of interacting oscillators and circadian rhythms. *J. Theor. Biol.*, 22:418–436, 1969.
- L. Pecora, Editor. A focus issue on synchronization in chaotic systems. *Chaos*, 7(4):509–687, 1997.
- L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64:821–824, 1990.
- L. M. Pecora and T. L. Carroll. Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. A*, 44:2374–2383, 1991.
- L. M. Pecora and T. L. Carroll. Discontinuous and nondifferentiable functions and dimension increase induced by filtering chaotic data. *Chaos*, 6(3): 432–439, 1996.
- L. M. Pecora and T. L. Carroll. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 80(10):2109–2112, 1998.
- L. M. Pecora, T. L. Carroll, and J. F. Heagy. Statistics for continuity and differentiability: An application to attractor reconstruction from time series. In C. D. Cutler and D. T. Kaplan, Editors, *Nonlinear Dynamics and Time Series*, volume 11 of *Fields Inst. Communications*, pages 49–62. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997a.
- L. M. Pecora, T. L. Carroll, G. Johnson, and D. Mar. Volume-preserving and volume-expanding synchronized chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 56(5): 5090–5100, 1997b.
- L. M. Pecora, T. L. Carroll, G. A. Johnson, D. J. Mar, and J. F. Heagy. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos*, 7(4):520–543, 1997c.
- J. Peinke, R. Richter, and J. Parisi. Spatial coherence of nonlinear dynamics in a semiconductor experiment. *Phys. Rev. B*, 47(1):115–124, 1993.
- H.-O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer, New York, 1992.
- J. H. Peng, E. J. Ding, M. Ding, and W. Yang. Synchronizing hyperchaos with a scalar transmitted signal. *Phys. Rev. Lett.*, 76(6):904–907, 1996.
- H. Pessenhofer and T. Kenner. Zur Methodik der kontinuierlichen Bestimmung der Phasenbeziehung zwischen Herzschlag und Atmung. *Pflügers Arch.*, 355:77–83, 1975.
- D. W. Peterman, M. Ye, and P. E. Wigen. High frequency synchronization of chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 74:1740–1742, 1995.
- D. Petracchi, M. Barbi, S. Chillemi, E. Pantazelou, D. Pierson, C. Dames, L. Wilkens, and F. Moss. A test for a biological signal encoded by noise. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 5(1):89–100, 1995.
- V. Petrov, Q. Ouyang, and H. L. Swinney. Resonant pattern formation in a chemical system. *Nature*, 388:655–657, 1997.
- A. Pikovsky and U. Feudel. Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors. *J. Phys. A: Math., Gen.*, 27(15):5209–5219, 1994.
- A. Pikovsky, G. Osipov, M. Rosenblum, M. Zaks, and J. Kurths. Attractor–repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase

- synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 79:47–50, 1997a.
- A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators. *Europhys. Lett.*, 34(3):165–170, 1996.
- A. Pikovsky, M. Rosenblum, G. Osipov, and J. Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving. *Physica D*, 104:219–238, 1997b.
- A. Pikovsky and S. Ruffo. Finite-size effects in a population of interacting oscillators. *Phys. Rev. E*, 59(2):1633–1636, 1999.
- A. Pikovsky, M. Zaks, M. Rosenblum, G. Osipov, and J. Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillations in terms of periodic orbits. *Chaos*, 7(4):680–687, 1997c.
- A. S. Pikovsky. On the interaction of strange attractors. *Z. Physik B*, 55(2):149–154, 1984a.
- A. S. Pikovsky. Synchronization and stochastization of nonlinear oscillations by external noise. In R. Z. Sagdeev, Editor, *Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, pages 1601–1604, Harwood, Singapore, 1984b.
- A. S. Pikovsky. Statistics of trajectory separation in noisy dynamical systems. *Phys. Lett. A*, 165:33, 1992.
- A. S. Pikovsky. Comment on “Chaos, Noise, and Synchronization”. *Phys. Rev. Lett.*, 73(21):2931, 1994.
- A. S. Pikovsky and U. Feudel. Characterizing strange nonchaotic attractors. *Chaos*, 5(1):253–260, 1995.
- A. S. Pikovsky and P. Grassberger. Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors. *J. Phys. A: Math., Gen.*, 24(19):4587–4597, 1991.
- A. S. Pikovsky and J. Kurths. Roughening interfaces in the dynamics of perturbations of spatiotemporal chaos. *Phys. Rev. E*, 49(1):898–901, 1994.
- A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, and J. Kurths. Phase synchronization in regular and chaotic systems. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 10(1):2291–2306, 2000.
- N. Platt, S. M. Hammel, and J. F. Heagy. Effects of additive noise on on–off intermittency. *Phys. Rev. Lett.*, 72:3498–3501, 1994.
- N. Platt, E. A. Spiegel, and C. Tresser. On–off intermittency: A mechanism for bursting. *Phys. Rev. Lett.*, 70:279–282, 1989.
- A. A. Polezhaev and E. I. Volkov. On the possible mechanism of cell cycle synchronization. *Biol. Cybern.*, 41:81–89, 1981.
- A. Politi, R. Livi, G.-L. Oppo, and R. Kapral. Unpredictable behavior of stable systems. *Europhys. Lett.*, 22:571, 1993.
- B. Pompe. Measuring statistical dependencies in a time series. *J. Stat. Phys.*, 73:587–610, 1993.
- D. Postnov, S. K. Han, and H. Kook. Synchronization of diffusively coupled oscillators near the homoclinic bifurcation. *Phys. Rev. E*, 60(3):2799–2807, 1999a.
- D. E. Postnov, T. E. Vadivasova, O. V. Sosnovtseva, A. G. Balanov, V. S. Anishchenko, and E. Mosekilde. Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization. *Chaos*, 9(1):227–232, 1999b.
- A. Prasad, V. Mehra, and R. Ramaswamy. Strange nonchaotic attractors in

- the quasiperiodically forced logistic map. *Phys. Rev. E*, 57(2):1576–1584, 1998.
- W. H. Press, S. T. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1992.
- K. Pyragas. Weak and strong synchronization of chaos. *Phys. Rev. E*, 54(5):R4508–R4511, 1996.
- K. Pyragas. Conditional Lyapunov exponents from time series. *Phys. Rev. E*, 56(5):5183–5188, 1997.
- W. J. Rappel and A. Karma. Noise-induced coherence in neural networks. *Phys. Rev. Lett.*, 77(15):3256–3259, 1996.
- D. V. R. Reddy, A. Sen, and G. L. Johnston. Time delay effects on coupled limit cycle oscillators at Hopf bifurcation. *Physica D*, 129(1–2):15–34, 1999.
- C. Reichhardt and F. Nori. Phase locking, devil’s staircase, Farey trees, and Arnold tongues in driven vortex lattices with periodic pinning. *Phys. Rev. Lett.*, 82(2):414–417, 1999.
- P. Reimann, C. Van den Broeck, and P. Kawai. Nonequilibrium noise in coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E*, 60(6):6402–6406, 1999.
- L. Ren and B. Ermentrout. Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators. *Physica D*, 143(1–4):56–73, 2000.
- A. Rényi. *Probability Theory*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.
- P. Richard, B. M. Bakker, B. Teusink, K. Van Dam, and H. V. Westerhoff. Acetaldehyde mediates the synchronization of sustained glycolytic oscillations in population of yeast cells. *Eur. J. Biochem.*, 235: 238–241, 1996.
- H. Z. Risken. *The Fokker–Planck Equation*. Springer, Berlin, 1989.
- E. Rodriguez, N. George, J.-P. Lachaux, J. Martinerie, B. Renault, and F. J. Varela. Perception’s shadow: Long distance synchronization of human brain activity. *Nature*, 397(4):430–433, 1999.
- O. E. Rössler. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, 57:397–398, 1976.
- J. L. Rogers and L. T. Wille. Phase transitions in nonlinear oscillator chains. *Phys. Rev. E*, 54(3):R2193–R2196, 1996.
- F. J. Romeiras, A. Bondeson, E. Edward Ott, Th. M. Antonsen Jr., and C. Grebogi. Quasiperiodically forced dynamical systems with strange nonchaotic attractors. *Physica D*, 26:277–294, 1987.
- E. Rosa Jr., E. Ott, and M. H. Hess. Transition to phase synchronization of chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 80(8):1642–1645, 1998.
- E. Rosa Jr., W. B. Pardo, C. M. Ticos, J. A. Walkenstein, and M. Monti. Phase synchronization of chaos in a plasma discharge tube. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 10(11):2551–2564, 2000.
- J. E. Rose, J. F. Brugge, D. J. Anderson, and J. E. Hind. Phase-locked response to low-frequency tones in single auditory nerve fibers of the squirrel monkey. *J. Neurophysiol.*, 30:769–793, 1967.

- M. Rosenblum, A. Pikovsky, and J. Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1804, 1996.
- M. Rosenblum, A. Pikovsky, and J. Kurths. Effect of phase synchronization in driven chaotic oscillators. *IEEE Trans. CAS-I*, 44(10):874–881, 1997a.
- M. Rosenblum, A. Pikovsky, and J. Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 78:4193–4196, 1997b.
- M. G. Rosenblum. A characteristic frequency of chaotic dynamical system. *Chaos, Solit. Fract.*, 3(6):617–626, 1993.
- M. G. Rosenblum, G. I. Firsov, R. A. Kuuz, and B. Pompe. Human postural control: Force plate experiments and modelling. In H. Kantz, J. Kurths, and G. Mayer-Kress, Editors, *Nonlinear Analysis of Physiological Data*, pages 283–306. Springer, Berlin, 1998.
- M. G. Rosenblum and J. Kurths. Analysing synchronization phenomena from bivariate data by means of the Hilbert transform. In H. Kantz, J. Kurths, and G. Mayer-Kress, Editors, *Nonlinear Analysis of Physiological Data*, pages 91–99. Springer, Berlin, 1998.
- M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, C. Schäfer, and P. A. Tass. Phase synchronization: From theory to data analysis. In F. Moss and S. Gielen, Editors, *Handbook of Biological Physics. Vol. 4, Neuro-informatics*, pages 279–321. Elsevier, Amsterdam, 2001.
- M. G. Rosenblum, P. A. Tass, and J. Kurths. Estimation of synchronization from noisy data with application to human brain activity. In J. A. Freund and T. Pöschel, Editors, *Stochastic Processes in Physics, Chemistry, and Biology*, Lecture Notes in Physics, LNP 557, pages 202–211. Springer, Berlin, 2000.
- O. E. Rössler. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, 57(5):397, 1976.
- R. Roy and K. S. Thornburg. Experimental synchronization of chaotic lasers. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2009–2012, 1994.
- N. F. Rulkov. Images of synchronized chaos: Experiments with circuits. *Chaos*, 6(3):262–279, 1996.
- N. F. Rulkov and M. M. Suschik. Experimental observation of synchronized chaos with frequency ratio 1:2. *Phys. Lett. A*, 214:145–150, 1996.
- N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 51(2):980–994, 1995.
- D. F. Russell, L. A. Wilkens, and F. Moss. Use of behavioral stochastic resonance by paddle fish for feeding. *Nature*, 402:291–294, 1999.
- T. Saitoh and T. Nishino. Phase locking in a double junction of Josephson weak links. *Phys. Rev. B*, 44(13):7070–7073, 1991.
- H. Sakaguchi and Y. Kuramoto. A solvable active rotator model showing phase transition via mutual entrainment. *Prog. Theor. Phys.*, 76(3):576–581, 1986.
- H. Sakaguchi, S. Shinomoto, and Y. Kuramoto. Mutual entrainment in

- oscillator lattices with nonvariational type interaction. *Prog. Theor. Phys.*, 79(5):1069–1079, 1988a.
- H. Sakaguchi, S. Shinomoto, and Y. Kuramoto. Phase transitions and their bifurcation analysis in a large population of active rotators with mean-field coupling. *Prog. Theor. Phys.*, 79(3):600–607, 1988b.
- E. Sánchez, M. A. Matías, and V. Pérez-Muñuzuri. Analysis of synchronization of chaotic systems by noise: An experimental study. *Phys. Rev. E*, 56(4):4068–4071, 1997.
- G. Santoboni, A. Varone, and S. R. Bishop. Spatial distribution of chaotic transients in unidirectional synchronisation. *Phys. Lett. A*, 257(3–4):175–181, 1999.
- P. Sassone-Corsi. Molecular clocks: Mastering time by gene regulation. *Nature*, 392:871–874, 1999.
- M. Sauer and F. Kaiser. Synchronized spatiotemporal chaos and spatiotemporal on-off intermittency in a nonlinear ring cavity. *Phys. Rev. E*, 54(3):2468–2473, 1996.
- J. P. Saul. Cardiorespiratory variability: Fractals, white noise, nonlinear oscillators, and linear modeling. What's to be learned? In H. Haken and H. P. Koepchen, Editors, *Rhythms in Physiological Systems*, volume 55 of *Springer Series in Synergetics*, pages 115–126. Springer, Berlin, 1991.
- C. Schäfer, M. G. Rosenblum, H.-H. Abel, and J. Kurths. Synchronization in the human cardiorespiratory system. *Phys. Rev. E*, 60:857–870, 1999.
- C. Schäfer, M. G. Rosenblum, J. Kurths, and H.-H. Abel. Heartbeat synchronized with ventilation. *Nature*, 392(6673):239–240, March 1998.
- M. Schiek, F. R. Drepper, R. Engbert, H.-H. Abel, and K. Suder. Cardiorespiratory synchronization. In H. Kantz, J. Kurths, and G. Mayer-Kress, Editors, *Nonlinear Analysis of Physiological Data*, pages 191–209. Springer, Berlin, 1998.
- S. J. Schiff, P. So, T. Chang, R. E. Burke, and T. Sauer. Detecting dynamical interdependence and generalized synchrony through mutual prediction in a neural ensemble. *Phys. Rev. E*, 54(6):6708–6724, 1996.
- G. Schmidt and A. A. Chernikov. General form of coupling leading to synchronization of oscillating dynamical systems. *Phys. Rev. E*, 60(3):2767–2770, 1999.
- A. Schrader, M. Braune, and H. Engel. Dynamics of spiral waves in excitable media subjected to external periodic forcing. *Phys. Rev. E*, 52(1):98–108, 1995.
- H. G. Schuster, Editor. *Handbook of Chaos Control*. Wiley-VCH, Weinheim, 1999.
- H. G. Schuster, S. Martin, and W. Martienssen. A new method for determining the largest Lyapunov exponent in simple nonlinear systems. *Phys. Rev. A*, 33:3547, 1986.
- D. M. Scolnick and T. D. Halazonetis. *Chfr* defines a mitotic stress checkpoint that delays entry into metaphase. *Nature*, 406:354–356, 2000.

- H. Seidel and H.-P. Herzel. Analyzing entrainment of heartbeat and respiration with surrogates. *IEEE Eng. Med. Biol.*, 17(6):54–57, 1998.
- S. Shapiro. Josephson current in superconducting tunneling: The effect of microwaves and other observations. *Phys. Rev. Lett.*, 11(2):80–82, 1963.
- S. Shinomoto and Y. Kuramoto. Cooperative phenomena in two-dimensional active rotator systems. *Prog. Theor. Phys.*, 75(6):1319–1327, 1986.
- B. I. Shraiman, A. Pumir, W. van Saarloos, P. C. Hohenberg, H. Chaté, and M. Hohen. Spatiotemporal chaos in the one-dimensional Ginzburg-Landau equation. *Physica D*, 57:241–248, 1992.
- J. W. Shuai and K. W. Wong. Noise and synchronization in chaotic neural networks. *Phys. Rev. E*, 57(6):7002–7007, 1998.
- B. Shulgin, A. Neiman, and V. Anishchenko. Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by a periodic force. *Phys. Rev. Lett.*, 75(23):4157–4160, 1995.
- A. E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, Mill Valley, CA, 1986.
- A. Simon and A. Libchaber. Escape and synchronization of a Brownian particle. *Phys. Rev. Lett.*, 68:3375, 1992.
- J. Simonet, M. Warden, and E. Brun. Locking and Arnold tongues in an infinite-dimensional system: The nuclear magnetic resonance laser with delayed feedback. *Phys. Rev. E*, 50:3383–3391, 1994.
- W. Singer. Striving for coherence. *Nature*, 397(4):391–393, 1999.
- W. Singer and C. M. Gray. Visual feature integration and the temporal correlation hypothesis. *Annu. Rev. Neurosci.*, 18:555–586, 1995.
- G. Sivashinsky. Self-turbulence in the motion of a free particle. *Found. Phys.*, 8(9–10):735–744, 1978.
- S. Smale. *The Mathematics of Time*. Springer, New York, 1980.
- M. J. T. Smith and R. M. Mersereau. *Introduction to Digital Signal Processing. A Computer Laboratory Textbook*. Wiley, New York, 1992.
- M. Smolensky. Chronobiology and chronotherapeutics: Applications to cardiovascular medicine. In P. C. Deedwania, Editor, *Circadian Rhythms of Cardiovascular Disorders*, pages 173–206. Futura, Armonk, NY, 1997.
- Y. Soen, N. Cohen, D. Lipson, and E. Braun. Emergence of spontaneous rhythm disorders in self-assembled networks of heart cells. *Phys. Rev. Lett.*, 82(17):3556–3559, 1999.
- O. V. Sosnovtseva, A. G. Balanov, T. E. Vadivasova, V. V. Astakhov, and E. Mosekilde. Loss of lag synchronization in coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 60(6):6560–6565, 1999.
- P. Stange, A. S. Mikhailov, and B. Hess. Mutual synchronization of molecular turnover cycles in allosteric enzymes. *J. Phys. Chem. B*, 102(32):6273–6289, 1998.
- P. Stange, A. S. Mikhailov, and B. Hess. Mutual synchronization of molecular turnover cycles in allosteric enzymes II. *J. Phys. Chem. B*, 103(29):6111–6120, 1999.

- J. Stark. Invariant graphs for forced systems. *Physica D*, 109(1-2):163–179, 1997.
- O. Steinbock, V. Zykov, and S. Müller. Control of spiral-wave dynamics in active media by periodic modulation of excitability. *Nature*, 366:322–324, 1993.
- P. N. Steinmetz, A. Roy, P. J. Fitzgerald, S. S. Hsiao, K. O. Johnson, and E. Niebur. Attention modulates synchronized neuronal firing in primate somatosensory cortex. *Nature*, 404(9):187–190, 2000.
- E. A. Stern, D. Jaeger, and C. J. Wilson. Membrane potential synchrony of simultaneously recorded striatal spiny neurons *in vivo*. *Nature*, 394:475–478, 1998.
- E. F. Stone. Frequency entrainment of a phase coherent attractor. *Phys. Lett. A*, 163:367–374, 1992.
- M. Stopfer, S. Bhagavan, B. H. Smith, and G. Laurent. Impaired odour discrimination on desynchronization of odour-encoding neural assemblies. *Nature*, 390(6):70–74, 1997.
- S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.
- S. H. Strogatz. From Kuramoto to Crawford: Exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, 143(1–4):1–20, 2000.
- S. H. Strogatz, C. M. Marcus, R. M. Westervelt, and R. E. Mirollo. Collective dynamics of coupled oscillators with random pinning. *Physica D*, 36:23–50, 1989.
- S. H. Strogatz and R. E. Mirollo. Stability of incoherence in a population of coupled oscillators. *J. Stat. Phys.*, 63(3/4):613–635, 1991.
- S. H. Strogatz and R. E. Mirollo. Splay states in globally coupled Josephson arrays: Analytical prediction of Floquet multipliers. *Phys. Rev. E*, 47(1):220–227, 1993.
- S. H. Strogatz, R. E. Mirollo, and P. C. Matthews. Coupled nonlinear oscillators below the synchronization threshold: Relaxation by generalized Landau damping. *Phys. Rev. Lett.*, 68(18):2730–2733, 1992.
- S. H. Strogatz and I. Stewart. Coupled oscillators and biological synchronization. *Sci. Am.*, 12:68–75, 1993.
- J. Sturis, C. Knudsen, N. M. O’Meara, J. S. Thomsen, E. Mosekilde, E. Van Cauter, and K. S. Polonsky. Phase-locking regions in a forced model of slow insulin and glucose oscillations. *Chaos*, 5(1):193–199, 1995.
- J. Sturis, E. Van Cauter, J. Blackman, and K. S. Polonsky. Entrainment of pulsatile insulin secretion by oscillatory glucose infusion. *J. Clin. Invest.*, 87:439–445, 1991.
- K. H. Stutte and G. Hildebrandt. Untersuchungen über die Koordination von Herzschlag und Atmung. *Pflügers Arch.*, 289:R47, 1966.
- T. Sugawara, M. Tachikawa, T. Tsukamoto, and T. Shimizu. Observation of synchronization in laser chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 72:3502–3505, 1994.

- J. W. Swift, S. H. Strogatz, and K. Wiesenfeld. Averaging of globally coupled oscillators. *Physica D*, 55:239–250, 1992.
- S. Taherion and Y.-C. Lai. Observability of lag synchronization of coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. E*, 59(6):R6247–R6250, 1999.
- F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In *Dynamical Systems and Turbulence*, volume 898 of *Springer Lecture Notes in Mathematics*, pages 366–381. Springer, New York, 1981.
- A. Tamasevicius and A. Čenys. Synchronizing hyperchaos with a single variable. *Phys. Rev. E*, 55(1):297–299, 1997.
- T. Tamura, N. Inaba, and J. Miyamichi. Mechanism for taming chaos by weak harmonic perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, 83(19):3824–3827, 1999.
- H. Tanaka, A. Lichtenberg, and S. Oishi. First order phase transition resulting from finite inertia in coupled oscillator systems. *Phys. Rev. Lett.*, 78(11):2104–2107, 1997a.
- H.-A. Tanaka, A. J. Lichtenberg, and Sh. Oishi. Self-synchronization of coupled oscillators with hysteretic responses. *Physica D*, 100:279–300, 1997b.
- D. Y. Tang, R. Dykstra, M. W. Hamilton, and N. R. Heckenberg. Experimental evidence of frequency entrainment between coupled chaotic oscillations. *Phys. Rev. E*, 57(3):3649–3651, 1998a.
- D. Y. Tang, R. Dykstra, M. W. Hamilton, and N. R. Heckenberg. Observation of generalized synchronization of chaos in a driven chaotic system. *Phys. Rev. E*, 57(5):5247–5251, 1998b.
- D. Y. Tang, R. Dykstra, M. W. Hamilton, and N. R. Heckenberg. Stages of chaotic synchronization. *Chaos*, 8(3):697–701, 1998c.
- P. Tass. Phase and frequency shifts of two nonlinearly coupled oscillators. *Z. Physik B*, 99:111–121, 1995.
- P. Tass. Phase and frequency shifts in a population of phase oscillators. *Phys. Rev. E*, 56(2):2043–2060, 1997.
- P. Tass and H. Haken. Synchronization in networks of limit cycle oscillators. *Z. Physik B*, 100:303–320, 1996.
- P. Tass, J. Kurths, M. G. Rosenblum, J. Weule, A. S. Pikovsky, J. Volkmann, A. Schnitzler, and H.-J. Freund. Complex phase synchronization in neurophysiological data. In C. Uhl, Editor, *Analysis of Neurophysiological Brain Functioning*, *Springer Series in Synergetics*, pages 252–273. Springer, Berlin, 1999.
- P. Tass, M. G. Rosenblum, J. Weule, J. Kurths, A. S. Pikovsky, J. Volkmann, A. Schnitzler, and H.-J. Freund. Detection of $n : m$ phase locking from noisy data: Application to magnetoencephalography. *Phys. Rev. Lett.*, 81(15):3291–3294, 1998.
- P. A. Tass. *Phase Resetting in Medicine and Biology. Stochastic Modelling and Data Analysis*. Springer, Berlin, 1999.
- J. R. Terry, K. S. Thornbug, D. J. DeShazer, G. D. VanWiggeren, S. Q. Zhu, P. Ashwin, and R. Roy. Synchronization of chaos in an array of three lasers. *Phys. Rev. E*, 59(4):4036–4043, 1999.

- K. S. Thornburg, M. Möller, R. Roy, T. W. Carr, R.-D. Li, and T. Erneux. Chaos and coherence in coupled lasers. *Phys. Rev. E*, 55(4):3865–3869, 1997.
- C. M. Ticos, E. Rosa Jr., W. B. Pardo, J. A. Walkenstein, and M. Monti. Experimental real-time phase synchronization of a paced chaotic plasma discharge. *Phys. Rev. Lett.*, 85(14):2929–2932, 2000.
- E. Toledo, M. G. Rosenblum, J. Kurths, and S. Akselrod. Cardiorespiratory synchronization: Is it a real phenomenon? In A. Murray and S. Swiryn, Editors, *Computers in Cardiology*, pages 237–240. IEEE Computer Society Press, Hannover, 1999.
- E. Toledo, M. G. Rosenblum, C. Schäfer, J. Kurths, and S. Akselrod. Quantification of cardiorespiratory synchronization in normal and heart transplant subjects. In *Proc. of Int. Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, volume 1, pages 171–174. Crans-Montana, Switzerland, Sept. 14–17, 1998. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998.
- A. Torcini, P. Grassberger, and A. Politi. Error propagation in extended systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 27:4533, 1995.
- C. Tresser, P. Worfolk, and C. W. Wu. Master–slave synchronization from the point of view of global dynamics. *Chaos*, 5(4):693–699, 1995.
- K. Y. Tsang, R. E. Mirollo, S. H. Strogatz, and K. Wiesenfeld. Dynamics of globally coupled oscillator array. *Physica D*, 48:102–112, 1991a.
- K. Y. Tsang, S. H. Strogatz, and K. Wiesenfeld. Reversibility and noise sensitivity in globally coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 66:1094–1097, 1991b.
- M. Tsodyks, I. Mitkov, and H. Sompolinsky. Pattern of synchrony in inhomogeneous networks of oscillators with pulse interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 71(8):1280–1283, 1993.
- T. Tsukamoto, M. Tachikawa, T. Hirano, T. Kuga, and T. Shimizu. Synchronization of a chaotic laser pulsation with its prerecorded history. *Phys. Rev. E*, 54(4):4476–4479, 1996.
- T. Tsukamoto, M. Tachikawa, T. Tohei, T. Hirano, T. Kuga, and T. Shimizu. Synchronization of a laser system to a modulation signal artificially constructed from its strange attractor. *Phys. Rev. E*, 56(6):6564–6568, 1997.
- N. Tufillaro, T. R. Abbott, and J. Reilly. *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.
- J. Urias, G. Salazar, and E. Ugalde. Synchronization of cellular automation pairs. *Chaos*, 8(4):814–818, 1998.
- T. E. Vadivasova, A. G. Balanov, O. V. Sosnovtseva, D. E. Postnov, and E. Mosekilde. Synchronization in driven chaotic systems: Diagnostics and bifurcations. *Phys. Lett. A*, 253:66–74, 1999.
- T. P. Valkering, C. L. A. Hooijer, and M. F. Kroon. Dynamics of two capacitively coupled Josephson junctions in the overdamped limit. *Physica*

- D, 135(1–2):137–153, 2000.
- B. van der Pol. A theory of the amplitude of free and forced triode vibration. *Radio Rev.*, 1:701, 1920.
- B. van der Pol. On relaxation oscillation. *Phil. Mag.*, 2:978–992, 1926.
- B. van der Pol. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. (Reception with reactive triode). *Phil. Mag.*, 3:64–80, 1927.
- B. van der Pol and J. van der Mark. Frequency demultiplication. *Nature*, 120 (3019):363–364, 1927.
- B. van der Pol and J. van der Mark. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *Phil. Mag.*, 6:763–775, 1928.
- J. L. van Hemmen and W. F. Wreszinski. Lyapunov function for the Kuramoto model of nonlinearly coupled oscillators. *J. Stat. Phys.*, 72(1/2):145–166, 1993.
- N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, 2nd edition. North Holland, Amsterdam, 1992.
- C. van Vreeswijk. Partial synchronization in populations of pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 54(5):5522–5537, 1996.
- V. K. Vanag, L. Yang, M. Dolnik, A. M. Zhabotinsky, and I. R. Epshtein. Oscillatory cluster patterns in a homogeneous chemical system with global feedback. *Nature*, 406:389–391, 2000.
- S. R. S. Varadhan. *Large Deviations and Applications*. SIAM, Philadelphia, 1984.
- Ju. M. Vasiliev, I. M. Gelfand, V. I. Guelstein, and A. G. Malenkov. Interrelationships of contacting cells in the cell complexes of mouse ascites hepatoma. *Int. J. Cancer*, 1:451–462, 1966.
- J. J. P. Veerman. Irrational rotation numbers. *Nonlinearity*, 2:419–428, 1989.
- S. C. Venkataramani, T. M. Antonsen, E. Ott, and J. C. Sommerer. On–off intermittency: Power spectrum and fractal properties of time series. *Physica D*, 96(1–4):66–99, 1996.
- Sh. C. Venkataramani, Th. M. Antonsen Jr., E. Ott, and J. C. Sommerer. Characterization of on-off intermittent time series. *Phys. Lett. A*, 207: 173–179, 1995.
- M. D. Vieira. Chaos and synchronized chaos in an earthquake model. *Phys. Rev. Lett.*, 82(1):201–204, 1999.
- J. Volkmann, M. Joliot, A. Mogilner, A. A. Ioannides, F. Lado, E. Fazzini, U. Ribary, and R. Llinás. Central motor loop oscillations in Parkinsonian resting tremor revealed by magnetoencephalography. *Neurology*, 46:1359–1370, 1996.
- E. I. Volkov and V. A. Romanov. Bifurcations in the system of two identical diffusively coupled brusselators. *Phys. Scr.*, 51(1):19–28, 1994.
- H. Voss and J. Kurths. Reconstruction of nonlinear time delay models from data by the use of optimal transformations. *Phys. Lett. A*, 234:336–344, 1997.

- H. U. Voss. Anticipating chaotic synchronization. *Phys. Rev. E*, 61(5):5115–5119, 2000.
- D. Walgraef. *Spatio-Temporal Pattern Formation*. Springer, New York, 1997.
- T. J. Walker. Acoustic synchrony: Two mechanisms in the snowy tree cricket. *Science*, 166:891–894, 1969.
- I. Waller and R. Kapral. Synchronization and chaos in coupled nonlinear oscillators. *Phys. Lett. A*, 105:163–168, 1984.
- W. Wang, I. Z. Kiss, and J. L. Hudson. Experiments on arrays of globally coupled chaotic electrochemical oscillators: Synchronization and clustering. *Chaos*, 10(1):248–256, 2000a.
- W. Wang, G. Perez, and H. A. Cerdeira. Dynamical behavior of the firings in a coupled neuronal system. *Phys. Rev. E*, 47(4):2893–2898, 1993.
- Y. Wang, D. T. W. Chik, and Z. D. Wang. Coherence resonance and noise-induced synchronization in globally coupled Hodgkin-Huxley neurons. *Phys. Rev. E*, 61(1):740–746, 2000b.
- S. Watanabe and S. H. Strogatz. Integrability of a globally coupled oscillator array. *Phys. Rev. Lett.*, 70(16):2391–2394, 1993.
- S. Watanabe and S. H. Strogatz. Constants of motion for superconducting Josephson arrays. *Physica D*, 74:197–253, 1994.
- D. Whitmore, N. S. Foulkes, and P. Sassone-Corsi. Light acts directly on organs and cells in culture to set the vertebrate circadian clock. *Nature*, 404:87–91, 2000.
- K. Wiesenfeld. Noise, coherence, and reversibility in Josephson arrays. *Phys. Rev. B*, 45(1):431–435, 1992.
- K. Wiesenfeld, P. Colet, and S. H. Strogatz. Synchronization transition in a disordered Josephson series array. *Phys. Rev. Lett.*, 76(3):404–407, 1996.
- K. Wiesenfeld and F. Moss. Stochastic resonance: From ice ages to crayfish and SQUIDS. *Nature*, 373:33–36, 1995.
- K. Wiesenfeld and J. W. Swift. Averaged equations for Josephson junction series arrays. *Phys. Rev. E*, 51(2):1020–1025, 1995.
- S. Wiggins. *Global Bifurcations and Chaos (Analytical Methods)*. Springer, New York, 1988.
- S. Wiggins. *Introduction to Applied Dynamical Systems and Chaos*. Springer, New York, 1990.
- L. A. Wilkens, D. F. Russell, X. Pei, and C. Gurgens. The paddlefish rostrum functions as an electrosensory antenna in plankton feeding. *Proc. Roy. Soc. Lond. B*, 264:1723–1729, 1997.
- A. T. Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *J. Theor. Biol.*, 16:15–42, 1967.
- A. T. Winfree. *The Geometry of Biological Time*. Springer, New York, 1980.
- H. G. Winful and L. Rahman. Synchronized chaos and spatiotemporal chaos in arrays of coupled lasers. *Phys. Rev. Lett.*, 65:1575–1578, 1990.
- F. Xie, G. Hu, and Z. Qu. On-off intermittency in a coupled-map lattice system. *Phys. Rev. E*, 52(2):1265, 1995.

- V. Yakhot. Large-scale properties of unstable systems governed by the Kuramoto–Sivashinski equation. *Phys. Rev. A*, 24:642, 1981.
- T. Yalcinkaya and Y.-Ch. Lai. Bifurcation to strange nonchaotic attractors. *Phys. Rev. E*, 56(2):1623–1630, 1997.
- T. Yamada and H. Fujisaka. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. II. The mapping approach. *Prog. Theor. Phys.*, 70(5):1240–1248, 1983.
- T. Yamada and H. Fujisaka. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. III. Mapping model for continuous system. *Prog. Theor. Phys.*, 72(5):885–894, 1984.
- T. Yamada and H. Fujisaka. Intermittency caused by chaotic modulation. I. Analysis with a multiplicative noise model. *Prog. Theor. Phys.*, 76(3):582–591, 1986.
- T. Yamada and H. Fujisaka. Effect of inhomogeneity on intermittent chaos in a coupled system. *Phys. Lett. A*, 124(8):421–425, 1987.
- Y. Yamaguchi and H. Shimizu. Theory of self-synchronization in the presence of native frequency distribution and external noises. *Physica D*, 11:212–226, 1984.
- H. L. Yang and E. J. Ding. Synchronization of chaotic systems and on–off intermittency. *Phys. Rev. E*, 54(2):1361–1365, 1996.
- T. Yang and K. Bilimgut. Experimental results of strange nonchaotic phenomenon in a second-order quasi-periodic forced electronic circuit. *Phys. Lett. A*, 236(5–6):494–504, 1997.
- A. R. Yehia, D. Jeandupeux, F. Alonso, and M. R. Guevara. Hysteresis and bistability in the direct transition from 1:1 to 2:1 rhythm in periodically driven ventricular cells. *Chaos*, 9(4):916–931, 1999.
- M. K. Stephen Yeung and S. H. Strogatz. Time delay in the Kuramoto model of coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 82(3):648–651, 1999.
- K.-P. Yip and N.-H. Holstein-Rathlou. Chaos and non-linear phenomena in renal vascular control. *Cardiovasc. Res.*, 31:359–370, 1996.
- L. Yu, E. Ott, and Q. Chen. Transition to chaos for random dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 65:2935–2938, 1990.
- Y. H. Yu, K. Kwak, and T. K. Lim. On–off intermittency in an experimental synchronization process. *Phys. Lett. A*, 198(1):34–38, 1995.
- M. A. Zaks, E.-H. Park, M. G. Rosenblum, and J. Kurths. Alternating locking ratios in imperfect phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 82:4228–4231, 1999.
- D. Zanette and A. S. Mikhailov. Condensation in globally coupled populations of chaotic dynamical systems. *Phys. Rev. E*, 57(1):276–281, 1998a.
- D. Zanette and A. S. Mikhailov. Mutual synchronization in ensembles of globally coupled neural networks. *Phys. Rev. E*, 58(1):872–875, 1998b.
- G. M. Zaslavsky. The simplest case of a strange attractor. *Phys. Lett. A*, 69(3):145–147, 1978.
- W.-Z. Zeng, M. Courtemanche, L. Sehn, A. Shrier, and L. Glass. Theoretical

- computation of phase locking in embrionic atrial heart cell aggregates. *J. Theoretical Biology*, 145:225–244, 1990.
- Z. G. Zheng, G. Hu, and B. Hu. Phase slips and phase synchronization of coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 81(24):5318–5321, 1998.
- T. Zhou, F. Moss, and A. Bulsara. Simulations of a strange non-chaotic attractor in a SQUID. In S. Vohra, M. Spano, M. Schlesinger, L. Pecora, and W. Ditto, Editors, *Proc. of the 1st Experiment. Chaos Conf., Arlington VA, Oct. 1–3, 1991*, pages 303–314. World Scientific, Singapore, 1992.
- Zh. Zhu and Zh. Liu. Strange nonchaotic attractors of Chua’s circuit with quasiperiodic excitation. *J. Bifurc. Chaos*, 7(1):227–238, 1997.
- L. Zonghua and C. Shigang. General method of synchronization. *Phys. Rev. E*, 55(6):6651–6655, 1997a.
- L. Zonghua and C. Shigang. Synchronization of a conservative map. *Phys. Rev. E*, 56(2):1585–1589, 1997b.

Предметный указатель

- автогенератор
 - триодный, 25, 144, 151
 - электронный, 66, 68
- автоколебания
 - вынуждаемые, 78, 96
 - с шумом, 113
 - хаотические, 186
- автоколебательная система, 28,
49–71, 232, 248
 - слабо нелинейная, 237, 292
- Адлера уравнение, 241
- амплитуда, 54–59, 73, 242
 - комплексная, 237, 249, 293, 348,
363
 - мгновенная, 206, 453, 457
- амплитудное уравнение, 248, 250,
293
- ансамбль
 - вынуждаемых осцилляторов, 135
 - копий хаотической системы, 332
 - нейронов, 369
 - хаотических осцилляторов, 197
 - хаотических отображений,
410–416
- аплодисменты, 176
- Арнольда язык, 81, 97, 269, 303,
334, 335
- аттрактор-воронка, 323
- аттрактор, 53, 406
 - симметричный, 387, 402
 - случайный, 436
 - странный, 185–189, 402
 - странный нехаотический, 444
 - топологический, 407
 - хаотический, 53
- Белоусова-Жаботинского реакция,
167–169, 173
- биений частота, 79, 145, 244, 336
- биения, 164
- бифуркация
 - вилки, 403, 407
 - докритическая, 365, 407
 - закритическая, 365, 403, 404
 - коразмерности 2 и 3, 258
 - седло-узел, 244, 255, 271, 276
 - удвоения периода, 128, 403
 - хаос-хаос, 408
 - Хопфа, 251, 254, 256, 364
- большие отклонения, 391
- Ван-дер-Поля уравнение, 24, 233,
250, 455
- взаимодействие
 - отталкивающее, 290
 - отталкивающее фазы, 143, 160

- притягивающее, 198, 290, 382
- притягивающее фазы, 143, 160
- статистическое, 423
- возмущение, 53
 - локальное, 413
 - начальных условий, 188
 - поперечное, 387
 - продольное, 387
- возмущений метод, 247
- вращения число, 266, 272, 292, 303
- время возврата, 191, 236, 325
- вымирание колебаний, *см.* гашение колебаний
- гашение колебаний, 24, 150, 295, 336, 368
- генератор, 136
 - пилообразного напряжения, 151
- Гильберта преобразование, 206, 453
- Гинзбурга-Ландау комплексное уравнение, 348, 350, 352, 422
- гиперхаос, 337
- гистерезис, 108, 365
- гликолитические колебания, 174
- Данжуа теорема, 267
- данные
 - двухканальные, 209–213, 221
 - многоканальные, 217
- деление частоты, 106
- демодуляция, 283, 314
- Джозефсона контакт, 157, 280–282, 370
- динамическая система, 49
 - автономная, 29, 324
 - диссипативная, 184
 - неавтономная, 324
 - с дискретным временем, 324
- диссипация, 50, 60
- дефект, 350, 352
 - пространственно-временной, 166
- дифференциальные уравнения
 - автономные, 186
 - в частных производных, 343, 348, 421
 - неавтономные, 186
 - нелинейные, 63
 - обыкновенные, 186, 417, 425
 - стохастические, 310
- диффузия, 305, 349, 400, 419, 433
- фазы, 113, 192, 305
- Дуффинга осциллятор, 454
- дыхание, 85, 113, 146, 177, 206
- захват
 - мод, 151
 - частот, 32, 77–82, 97, 141, 193, 210, 243, 327
 - фаз, 35, 77–82, 100, 142, 193, 243
- изохрона, 235–238
- импульсная сила, 264
- импульсов последовательность, 93–99
- инвариантная кривая, 261, 273, 278
- Каплана-Йорке формула, 439, 444
- Кардара-Паризи-Жанга уравнение, 346, 350
- кластер, 42, 161, 164, 173, 197, 202, 342, 362, 366, 415
 - в цепочке осцилляторов, 340
- клеточный автомат, 423
- когерентность, 135, 331–333, 347, 350, 356, 357, 360, 374
- колебания
 - возбуждаемые шумом, 131
 - затухающие, 454
 - изохронные, 238, 251
 - когерентные, 135, 326
 - коллективные, 42
 - неизохронные, 238, 299
 - противофазные, 148, 343
 - свободные, 37
 - сердечные, 120
 - синфазные, 148, 373
 - хаотические, 184
 - циркадные, 137
- кольца отображение, 260, 273–278
- корреляция взаимная, 210, 225
- косая система, 389
- квазипериодическая сила, 272

- квазипериодическое движение, 84, 267, 269, 288, 340
- Курамото модель, 371, 373
- Курамото переход, 170, 197, 373
- Курамото-Сивашицкого уравнение, 350, 421
- лазер, 133, 136, 151, 161
взаимодействие, 198
полупроводниковый, 136
с задержанной обратной связью, 101
- Ланжевена уравнение, 306, 361
- Лежандра преобразование, 393, 441
- Лиссажу фигура, 85, 145
- локомоция, 177
- Лоренца система, 185, 321, 426
взаимодействие, 198
диффузия фазы, 326
с периодической силой, 430
синхронизация внешней силой, 329
- Ляпунова показатель, 59, 189, 312, 336, 387, 432, 444
в системе с шумом, 432
локальный по времени, 391
максимальный, 188
нулевой, 59, 190, 234, 279, 318
по предыстории, 442
поперечный, 388, 411, 417, 419, 420, 424, 425
продольный, 388
условный, 426
- менструальный цикл, 124, 174
- Милнора аттрактор, 406
- Миролло-Строгатца модель, 369
- многообразие
неустойчивое, 236, 274, 276, 407
устойчивое, 236, 407
- модуляция, 110
хаотическая, 277
частоты, 109
- мозга активность, 153, 217
- мультистабильность, 159, 278, 439
- накопление—сброс осциллятор, 68–71, 106–109, 151, 263, 300, 369
- нейрон, 70, 132, 181, 183, 221, 369
- неустойчивость
абсолютная, 414
конвективная, 414
поперечная, 407, 423
- Ньюэла критерий, 350
- область притяжения, 53
- область синхронизации, 81, 97, 99, 108, 243, 270
- обобщенная синхронизация, 199, 438
- обратная связь, 63, 66, 67, 101, 124, 145
- окружности отображение, 96, 261–274, 289, 291–292, 433
обратимое, 265, 291
разрывное, 264, 271
- окружности поворот, 262, 265, 291
- органные трубы, 23
- осциллятор
автономный, 50, 73
взаимодействие, 141
квазилинейный, 54, 73–85
линейный, 454
на соляном растворе, 178
слабо нелинейный, 248
хаотический, 42, 184–190, 318
химический, 173
циркадный, 123
электрохимический, 201
- отображение
кольца, *см.* кольца отображение
логистическое, 382, 388, 445
одномерное, 382
окружности, *см.* окружности отображение
разрывное, 264
с шумом, 433
сброса, 301
связанные, 382
типа кривой тента, 384, 397, 425
типа тента, 382

- пейсмеркер, 71, 104, 153
циркадный, 122
- перемежаемость, 278, 354
модуляционная, 386, 392, 421, 437
- перемешивание, 189, 193
- перепад фазовый, 352
- переустановка фазы, 93
- переход к синхронизации, 82, 246,
254–257, 357, 385, 387
- переход к хаосу, 128
- период, 29, 30, 54, 233
средний, 113, 192
топологический, 319, 335
хаотических колебаний, 191
- периодическая траектория, 267,
318, 335
- подавление колебаний, 73, 128
- полная синхронизация, 45, 197–198
- популяция
клеток, 174, 179
осцилляторов с шумом, 360, 364
связанных осцилляторов, 27, 140,
355, 360
- порог синхронизации, 360, 385,
388–390
- порядка функция, 366
- порядка параметр, 357, 367
- потенциал
бистабильный, 133
действия, 70, 130, 153
наклонный, 75, 306
U-образный, 57
- потенциальный барьер, 114, 307
- поток специальный, 320
- предельный цикл, 51–54, 233–236
- профиль амплитуды, 166
- профиль фазы, 166, 346, 350
- проскок фазы, 82, 115, 117, 157,
307, 335
- противофазная синхронизация, 22,
35, 142, 143, 159, 160, 290, 297
- Пуанкаре отображение, 90, 191,
236, 319, 325
- размерность, 52
ляпуновская, 439
- обобщенная, 441
- фрактальная, 270
- разность фаз, 74, 81, 100, 241, 289,
460
обобщенная, 213
циклическая, 216, 222, 225
- распльвшееся состояние, 373
- распределение
автономных частот, 172, 356, 364,
367, 368, 376
локальных по времени
показателей Ляпунова, 391
фаз, 119, 226, 358, 362
циклической разности фаз, 156
- расстройка, 32, 73, 94, 142, 241, 265,
293, 310, 335
- реакции-диффузии уравнения, 419
- резонанс, 37, 130
- резонансное условие, 240, 241, 289
- релаксационный осциллятор, 45,
59, 67–71, 73, 299–303
- взаимодействие, 151
с внешней силой, 102–112
- репеллер, 53
- решетка двумерная, 163
- Рёсслера система, 320, 327, 335–336,
375
- ридинг, 407
- ритм, 28
дыхания, 85, 179
сердечный, 106, 119, 220
суточной активности, 51
физиологический, 51, 71
- ротатор, 157–159, 279–282, 365
ансамбль глобально связанных,
371
- светлячок, 91–93
- связи функция, 366
- связи оператор
собственные значения, 415
спектр, 411
- связь, 22, 30
асимметричная, 287, 414
ближайших соседей, 339, 414
глобальная, 170–176, 201, 375, 415

- диссипативная, 297, 382, 415
диффузионная, 293, 336, 420
задержанная, 148
линейная, 383, 410
линейный оператор, 382
непосредственная, 293
однонаправленная, 40, 41, 105, 199, 316, 412, 438
реактивная, 297, 299, 349, 368
симметричная, 290, 383
управление-подчинение, 200
сердечно-сосудистой и дыхательной систем взаимодействие, 220
сердце, 50, 70, 104, 152
частота биений, 146, 224, 459
сигнал
нестационарный, 455
аналитический, 453
сила
гармоническая, 73
квазипериодическая, 444
флуктуирующая, 131, 305, 388
хаотическая, 437
симметрия, 201, 395, 438
синоатриальный узел, 104, 152
синфазная синхронизация, 35, 142, 143, 159, 160, 290, 297
синхрограмма, 219
синхронизация
взаимная, 22, 141, 287–303, 315, 327
глобально связанных осцилляторов, 175
порядка $n : m$, 97, 99, 106, 211
ротаторов, 157, 158
сердцебиений, дыхания и локомоции, 178
сильная, 404
системы и ее копии, 201, 425, 439
слабая, 404, 416
управление-подчинение, 201
через подавление хаоса, 202, 430
случайное блуждание, 113, 192, 212, 305, 313
спайк, 70, 109, 131
спектр
особенностей, 440
пространственный, 346
спектр мощности, 202, 257, 306, 314, 331, 333
взаимный, 210, 213, 225
спиральная волна, 167, 169, 351
среднее поле, 171, 332, 357, 360, 375
хаотическое, 368
комплексное, 356
стохастический резонанс, 131–134
стробоскоп фазовый, 148, 218
стробоскопический метод, 196, 226, 236, 262, 328
стробоскопическое отображение, 261
термодинамический предел, 356, 362, 374, 414
тор, 261, 342, 444
инвариантный, 274, 288
точечный процесс, 91
турбулентность
фазовая, 350
узел, 277
усилитель, 66, 145, 412
усреднения метод, 250, 292, 348, 371
устойчивость, 56, 60, 189, 386
асимптотическая, 76, 234, 428
нейтральная, 73
поперечная, 387
топологическая, 270
фаза, 33, 54–59, 63, 233
мгновенная, 206, 453, 457
начальная, 55
оценка по сигналу, 204–208
плохо определенная, 323
развернутая, 219, 460
хаотических колебаний, 190
циклическая, 55, 218
фазовая когерентность, 326, 350
фазовая плоскость, 53
фазовая синхронизация, 42, 192–197, 375
фазовое пространство, 52, 233

- фазовой автоподстройки система,
283–285, 314, 315
- фазовый объем, 61
- фазовый переход, 357, 360, 364
неравновесный, 401
- фазовый портрет, 52
- фазовый сдвиг, 35, 78, 81, 234
- Фоккера-Планка уравнение, 309,
362, 365, 400
- хаос, 108, 184, 186, 276, 382
коллективный, 368
пространственно однородный,
418, 419
пространственно-временной, 418,
421
- хаотизация колебаний, 73
- химическая реакция, 419
колебательная, 167, 342, 352
светочувствительная, 167
- хищник-жертва система, 180
- Хопфа-Коула преобразование, 345
- хронотерапия, 123
- центральный генератор ритма, 148,
160
- печочка
осцилляторов, 161, 165, 197, 418,
419
слабо нелинейных, 348
связанных отображений, 414, 418
с однонаправленной связью,
413
- циркадный ритм, 26, 41, 51, 67,
121–124
- частота, 30, 54, 234
автономная, 30, 73, 234, 339, 356,
376
зависящая от амплитуды, 238
мгновенная, 192, 305, 325, 454,
461
наблюдаемая, 78, 141, 243, 266,
290, 327
несоизмеримая, 267, 272, 288
оценка по сигналу, 208, 461
средняя, 43, 114, 192, 197,
320–321, 335
точечного процесса, 463
угловая, 30, 54
- частоты профиль, 165
- часы, 447
биологические, 25, 51, 138
маятниковые, 19, 30, 447–452
- чертова лестница, 270, 303
- численная ловушка, 394, 416, 437
- Шапиро ступеньки, 282
- шум, 113–119, 360, 364
гауссовский, 115, 305, 309, 346,
362
мультипликативный, 401
ограниченный, 114, 308–309
узкополосный, 314
- щель спектральная, 412, 413, 420
- Эдвардса-Уилкинсона уравнение,
346
- электрическая сеть, 157
- электрокардиограмма, 205–207,
457–458
- энтропийная функция, 393, 398
- эпилепсия, 182, 227
- эргодичность, 274, 387